

27.2. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний (механических и электромагнитных). Резонанс

Рассмотрим зависимость *амплитуды* A вынужденных колебаний от *частоты* ω . Механические и электромагнитные колебания будем

рассматривать одновременно, называя колеблющуюся величину либо смещением (x) колеблющегося тела из положения равновесия, либо зарядом (Q) конденсатора. Из формулы (27.8) следует, что амплитуда A смещения (заряда) имеет максимум. Чтобы определить резонансную частоту $\omega_{\text{рез}}$ — частоту, при которой амплитуда A смещения (заряда) достигает максимума, — нужно найти максимум функции (27.8), или, что то же самое, минимум подкоренного выражения. Продифференцировав подкоренное выражение по ω и приравняв нулю, получим условие, определяющее $\omega_{\text{рез}}$:

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0$$

Это равенство выполняется при $\omega = 0, \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$, физический

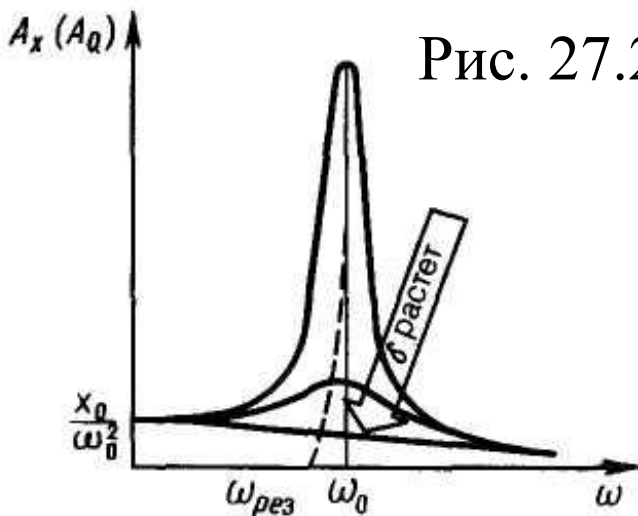


Рис. 27.2 смысл которых имеет лишь положительное значение. Следовательно, резонансная частота

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (27.2.1)$$

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы (частоты вынуждающего переменного напряжения) к частоте $\omega_{\text{рез}}$ называется **резонансом** (соответственно **механическим** или **электрическим**). В случае когда $\beta^2 \ll \omega_0^2$, значение $\omega_{\text{рез}}$ практически совпадает с собственной частотой ω_0 колебательной системы. Подставляя (27.2.1) в формулу (27.8), получим

$$A_{\text{рез}} = \frac{x_0}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}. \quad (27.2.2)$$

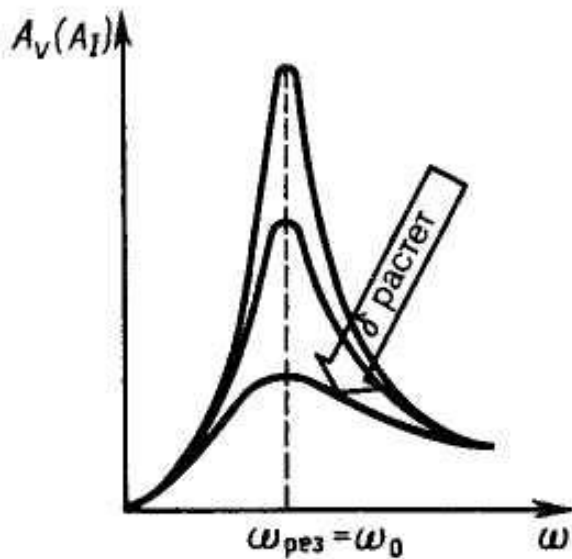
На рис. 27.2 приведена зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты при различных значениях β . Из (27.2.1) и (27.2.2) вытекает, что чем меньше β , тем выше и правее лежит максимум данной кривой. Если $\omega \rightarrow 0$, то все кривые (см. также (27.8)) приходят к одному и тому же, отличному от нуля предельному значению x_0/ω_0^2 , так называемому **статическому отклонению**. В случае механических колебаний $x_0/\omega_0^2 = F_0/(m\omega_0^2)$, в случае электромагнитных — $(U_m/(L\omega_0^2))$. Если $\omega_0 \rightarrow \infty$, то все кривые асимптотически стремятся к нулю. Приведенная

совокупность кривых называется **резонансными кривыми**.

Из формулы (27.2.2) вытекает, что при малом затухании ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) резонансная амплитуда смещения (заряда)

$$A_{\text{рез}} = \frac{X_0}{2\beta\omega_0} = \frac{\omega_0 X_0}{2\beta\omega_0^2} = \theta \frac{X_0}{\omega_0^2},$$

где θ — добротность колебательной системы x_0/ω_0^2 — рассмотренное выше статическое отклонение. Отсюда следует, что добротность θ характеризует резонансные свойства колебательной системы: чем больше θ , тем больше $A_{\text{рез}}$. На рис. 27.26 представлены резонансные кривые для амплитуды скорости (тока).



$$\omega A = \frac{X_0 \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2} + 4\beta^2}}$$

максимальна при $\omega_{\text{рез}} = \bar{\omega}_0$ и равна $x_0/(2\beta)$, т. е. чем больше коэффициент затухания β , тем ниже максимум резонансной кривой.

Используя ранее выведенные формулы, получим, что амплитуда скорости при механическом резонансе равна $(A_v)_{\max} = x_0/(2\beta) = F_0/r$, а амплитуда тока при электрическом резонансе

$$(A_I)_{\max} = x_0/(2\beta) = U_m/R.$$

Из выражения $\operatorname{tg} \varphi = 2\beta\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)$ (см. (26.9)) следует, что если затухание в системе отсутствует ($\beta = 0$), то *только* в этом случае колебания и вынуждающая сила (приложенное переменное напряжение) имеют одинаковые фазы; во всех других случаях $\varphi = 0$.

Зависимость φ от ω при разных коэффициентах β графически представлена на рис. 26.27, из которого следует, что при изменении ω изменяется и сдвиг фаз φ . Из формулы (26.9) вытекает, что при $\omega = 0$ $\varphi = 0$, а при $\omega = \omega_0$ независимо от значения коэффициента затухания β $\varphi = \pi/2$, т. е. сила (напряжение) опережает по фазе колебания на $\pi/2$. При дальнейшем увеличении ω сдвиг фаз возрастает и при $\omega \gg \omega_0$ $\varphi \rightarrow \pi$, т. е. фаза колебаний почти противоположна фазе внешней силы (переменного напряжения). Семейство кривых, изображенных на рис. 27.27, называется *фазовыми резонансными кривыми*.

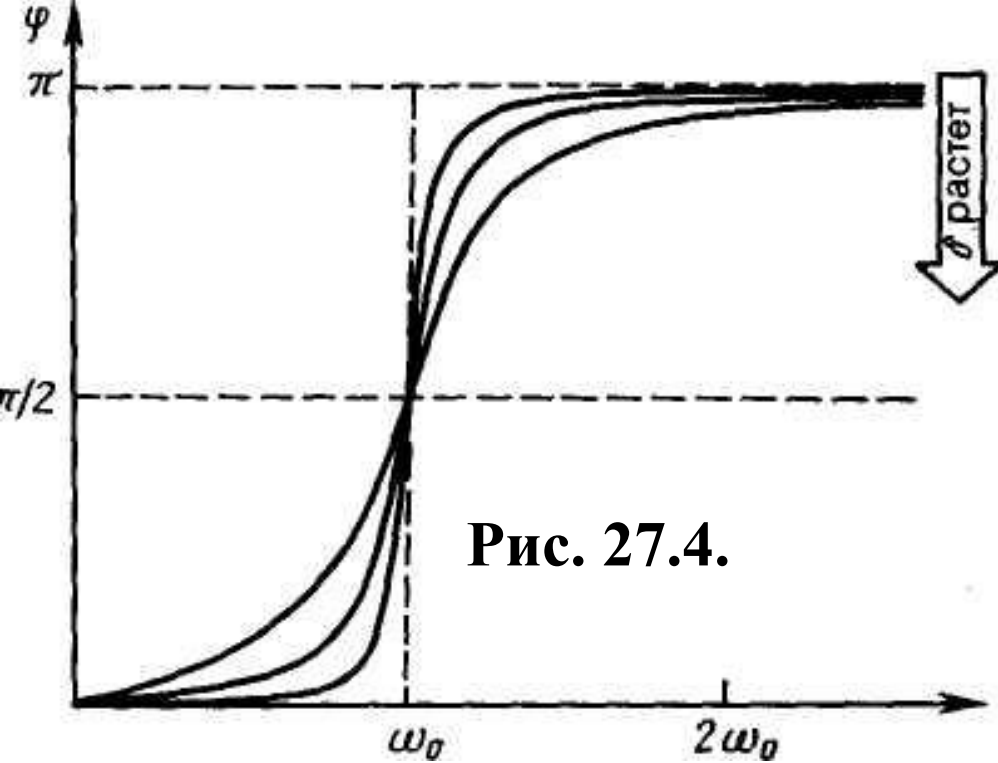


Рис. 27.4.

Явления резонанса могут быть как вредными, так и полезными. Например, при конструировании машин и различного рода сооружений необходимо, чтобы собственная частота колебаний их не совпадала с частотой возможных внешних воздействий, в

противном случае возникнут вибрации, которые могут вызвать серьезные разрушения. С другой стороны, наличие резонанса позволяет обнаружить даже очень слабые колебания, если их частота совпадает с частотой собственных колебаний прибора. Так, радиотехника, прикладная акустика, оборудование, воспринимающее электрические колебания, основаны на явлении резонанса.

