27.5. Резонанс напряжений.

Если в цепи переменного тока, содержащей последовательно включенные конденсатор, катушку индуктивности и резистор (см. рис. 27.8),

$$\omega L = 1/(\omega C), \qquad (27.5.1)$$

то угол сдвига фаз между током и напряжением (27.3.9) обращается в нуль ($\varphi = 0$), т. е. изменения тока и напряжения происходят синфазно. Условию (27.5.1) удовлетворяет частота

$$\omega = 1/\sqrt{LC}$$

В данном случае полное сопротивление цепи Z (27.3.12) становится наименьшим, равным активному сопротивлению R цепи, и ток в цепи определяется активным сопротивлением, принимая наибольшие (возможные при данном U_m) значения. При этом падение напряжения на активном сопротивлении равно внешнему напряжению, приложенному к цепи ($U_R = U$), а падения напряжений на конденсаторе (U_C) и катушке индуктивности (U_L) одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе.

Рассмотренное явление называется резонансом напряжений (последовательным резонансом), так как при этом происходит взаимная компенсация напряжений U_L и U_C, каждое из которых, как будет показано ниже, может значительно превышать приложенное к цепи напряжение U. Векторная диаграмма для резонанса напряжений приведена на рис. 27.10, а зависимость амплитуды силы тока от ω уже была дана на рис. 27.3. В случае резонанса напряжений $(U_L)_{\text{рез}}=(U_C)_{\text{рез}}$ поэтому, подставив в эту формулу значения резонансной частоты и амплитуды напряжений на катушке индуктивности и конденсаторе, получим

$$(U_L)_{рез} = (U_C)_{рез} = I_m\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{U_m}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \theta U_m,$$

где θ — добротность контура, определяемая выражением (27.1.14). Так как добротность обычных колебательных контуров больше единицы, то напряжение как на катушке индуктивности, так и на конденсаторе превышает напряжение, приложенное к цепи.

Поэтому явление резонанса напряжений используется в технике для усиления колебания напряжения какой-либо определенной частоты. Например, в случае резонанса на конденсаторе можно получить напряжение с амплитудой θU_m (θ в данном случае — добротность контура), которая может быть значительно больше U_m. Это усиление напряжения возможно только для узкого интервала частот вблизи резонансной частоты контура, что позволяет выделить из многих сигналов одно колебание определенной частоты, т. е. на радиоприемнике настроиться на нужную длину волны. Явление резонанса напряжений необходимо учитывать при расчете изоляции электрических линий, содержащих конденсаторы и катушки индуктивности, так как иначе может наблюдаться их пробой.

27.6. Резонанс токов

Рассмотрим цепь переменного тока, содержащую параллельно включенные конденсатор емкостью C и катушку индуктивностью L (рис. 27.11). Для простоты допустим, что активное сопротивление обеих ветвей настолько мало, что им можно пренебречь. Если

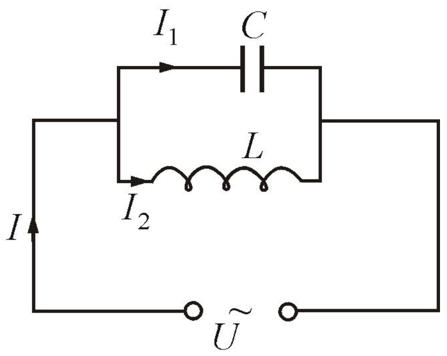

Рис. 27.11.

приложенное напряжение изменяется по закону $U = U_m \cos \omega t$ (см. (27.3.1), то, согласно формуле (27.3.11), в ветви 1C2 течет ток

$$I_1 = I_{m1} \cos(\omega t - \varphi_1),$$

амплитуда которого определяется из выражения (27.3.10) при условии $R = 0$ и $L = 0$:

$$I_{m1} = \frac{U_m}{1/(\omega C)}.$$

Начальная фаза φ_1 этого тока по формуле (27.3.9) определяется равенством $\mathrm{tg}\varphi_1 = -\infty$,

откуда $\varphi_1 = (2n + 26/2)\pi$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$. (27.5.1)

Аналогично, ток в ветви 1L2 $I_2 = I_{m2}\cos(\omega t - \varphi_2)$,

амплитуда которого определяется из (27.3.10) при условии $R = 0$ и $C = \infty$ (условие отсутствия емкости в цепи).

$Im_2 = U_m/(\omega L)$.

Начальная фаза φ_2 этого тока (см. (27.3.9)) $\mathrm{tg}\,\varphi_2 = +\infty$.

откуда

$$\varphi_2 = (2n + 1/2)\pi, \text{ где } n = 1, 2, 3,.... \qquad (27.5.2)$$

Из сравнения выражений (27.5.1) и (27.5.2) вытекает, что разность фаз токов в ветвях 1*C*2 и 1L2 равна $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$, т. е. токи в ветвях противоположны по фазе. Амплитуда тока во внешней (неразветвленной) цепи $I_m = |I_{m1} - I_{m2}| = U_m|\omega C - 1/(\omega L)|$.

Если $\omega = \omega_{рез} = \omega = 1/\sqrt{LC}$, то $I_{m1} = I_{m2}$ и $I_m = 0$. Явление резкого уменьшения амплитуды силы тока во внешней цепи, питающей параллельно включенные конденсатор и катушку индуктивности, при приближении частоты ω приложенного напряжения к резонансной частоте $\omega_{рез}$ называется резонансом токов (параллельным резонансом). В данном случае для резонансной частоты получили такое же значение, как и при резонансе напряжений (см. 27.5).

Амплитуда силы тока I_m оказалась равна нулю потому, что активным сопротивлением контура пренебрегли. Если учесть сопротивление *R*, то разность фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ не будет равна π, поэтому при резонансе токов амплитуда силы тока I_m будет отлична от нуля, но примет наименьшее возможное значение. Таким образом, при резонансе токов во внешней цепи токи I_1 и I_2 компенсируются, и ток I в подводящих проводах достигает минимального значения, обусловленного только током через резистор. При резонансе токов токи I_1 и I_2 могут значительно превышать ток I.

Рассмотренный контур оказывает большое сопротивление переменному току с частотой, близкой к резонансной, поэтому это свойство резонанса токов используется в резонансных усилителях, позволяющих выделять одно определенное колебание из сигнала сложной формы. Кроме того, резонанс токов используется в индукционных печах, где нагревание металлов производится вихревыми токами. В них емкость конденсатора, включенного параллельно нагревательной катушке, подбирается так, чтобы при частоте генератора получился резонанс токов, в результате чего сила тока через нагревательную катушку будет гораздо больше, чем сила тока в подводящих проводах.

27.6. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока

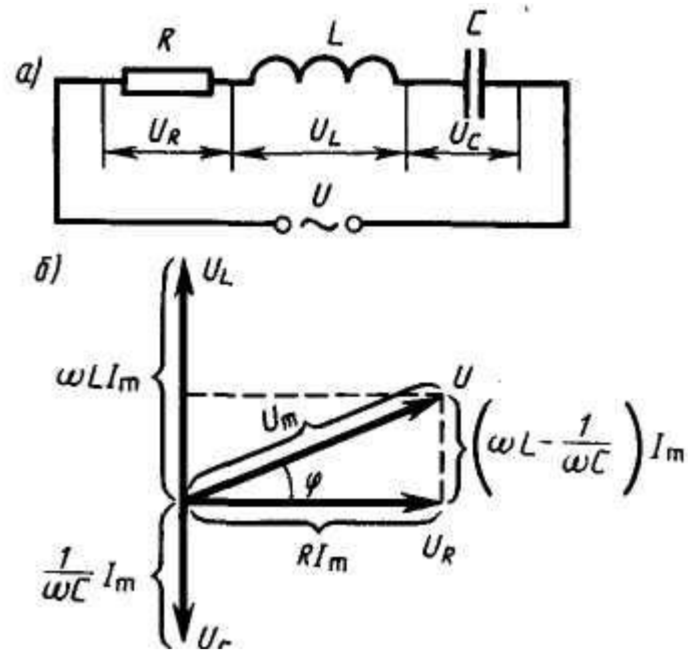

Рис. 27.8

Мгновенное значение мощности переменного тока равно произведению мгновенных значений напряжения и силы тока: $P(t) = U(t)I(t)$,

где $U(t) = U_m \cos\omega t$, $I(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$ (см. выражения (27.3.1) и (27.3.11)). Раскрыв $\cos(\omega t - \varphi)$, получим $P(t) = I_m U_m \cos((\omega t - \varphi) \cos \omega t = I_m U_m (\cos^2 \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi)$.

Практический интерес представляет не мгновенное значение мощности, а ее среднее значение за период колебания. Учитывая, что $\langle \cos^2 \omega t \rangle = ½$, $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$, получим

$$\langle P \rangle = ½\, I_m U_m \cos \varphi. \qquad (27.6.1)$$

Из векторной диаграммы (см. рис. 27.8) следует, что $U_m \cos \varphi = RI_m$. Поэтому

$$\langle P\rangle = \tfrac{1}{2} R I_m^{\,2}.$$

Такую же мощность развивает постоянный ток $I = I_m/\sqrt{2}$. Величины

$$I = I_m/\sqrt{2}; \qquad U = U_m/\sqrt{2}$$

называются соответственно действующими (или эффективными) значениями тока и напряжения. Все амперметры и вольтметры градуируются по действующим значениям тока и напряжения.

Учитывая действующие значения тока и напряжения, выражение средней мощности (27.6.1) можно записать в виде

$$\langle P\rangle = IU\cos\varphi, \qquad (27.6.2)$$

где множитель cosφ называют коэффициентом мощности.

Формула (27.6.2) показывает, что мощность, выделяемая в цепи переменного тока, в общем случае зависит не только от силы тока и напряжения, но и от сдвига фаз между ними. Если в цепи реактивное сопротивление отсутствует, то $\cos\varphi = 1$ и $P = IU$. Если цепь содержит только реактивное сопротивление $(R = 0)$, то $\cos\varphi = 0$ и средняя мощность равна нулю, какими бы большими ни были ток и напряжение. Если cosφ имеет значения, существенно меньшие единицы, то для передачи заданной мощности при данном напряжении генератора нужно увеличивать силу тока I, что приведет либо к выделению джоулевой теплоты, либо потребует увеличения сечения проводов, что повышает стоимость линий электропередач. Поэтому на практике всегда стремятся увеличить cosφ, наименьшее допустимое значение которого для промышленных установок составляет примерно 0,85.

27.7. Параметрический резонанс

В рассмотренном в предыдущем параграфе случае приложенная извне вынуждающая сила обусловливала непосредственно смещение системы из положения равновесия. Оказывается, существует иной вид воздействия извне, с помощью которого можно сильно раскачать систему. Этот вид воздействия заключается в совершаемом в такт с колебаниями периодическом изменении какого-либо параметра системы, вследствие чего само явление называется параметрическим резонансом.

Возьмем для примера простейший маятник-шарик на нитке. Если периодически изменять длину маятника l, увеличивая ее в моменты, когда маятник находится в крайних положениях, и уменьшая, в

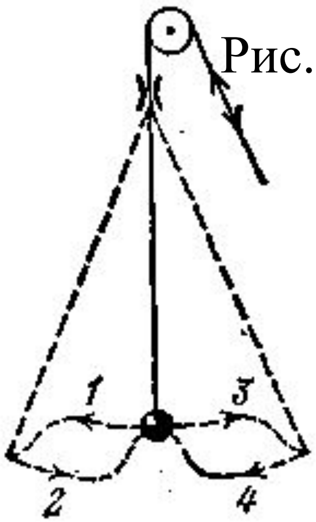

Рис. 27.12.

моменты, когда маятник находится в среднем положении (рис. 27.12), то маятник сильно раскачается. Увеличение энергии маятника при этом происходит за счет работы, которую совершает сила, действующая на нить. Сила натяжения нити при колебаниях маятника не постоянна: она меньше в крайних положениях, когда скорость обращается в нуль, и больше в среднем положении, когда скорость маятника максимальна. Поэтому отрицательная работа внешней силы при удлинении маятника оказывается меньше по величине, чем положительная работа, совершаемая при укорочении маятника. В итоге работа внешней силы за период оказывается больше нуля.