Лекция 28. Волновые процессы

1. Продольные и поперечные волны.
2. Уравнение бегущей волны. Фазовая скорость. Волновые уравнения.
3. Энергия и интенсивность волны.
4. Принцип суперпозиции. Групповая скорость.
5. Интерференция волн. Стоячие волны.
6. Волны в упругих средах.

5.1. Продольные и поперечные волны

Колебания, возбуждённые в какой-либо точке среды (твёрдой, жидкой или газообразной), распространяются в ней с конечной скоростью, зависящей от свойств среды, передаваясь от одной точки среды к другой. Чем дальше расположена частица среды от источника колебаний, тем позднее она начнёт колебаться. Иначе говоря, фазы колебаний частиц среды и источника тем больше отличаются друг от друга, чем больше это расстояние. При изучении распространения колебаний не учитывается дискретное (молекулярное) строение среды и среда рассматривается как *СПЛОШНАЯ*, т.е. непрерывно распределённая в пространстве и обладающая упругими свойствами. Процесс распространения колебаний в сплошной среде называется волновым процессом (или ***ВОЛНОЙ***). При рассмотрении волны частицы не движутся вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия. Вместе с волной от частицы к частице среды передаются лишь состояние свойством всех волн, независимо от их природы, является перенос энергии без переноса вещества.

Среди разнообразных волн, встречающихся в природе и технике, выделяют следующие их типы: волны на поверхности жидкости, упругие и электромагнитные волны. Упругими (или механическими) волнами называется механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде. Упругие волны бывают продольные и поперечные. В продольных волнах частицы среды колеблются в направлении распространения волны. В поперечных – в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения. В жидкостях и газах возникают только продольные волны, а в твёрдых телах – как продольные, так и поперечные.

Упругая волна называется *ГАРМОНИЧЕСКОЙ*, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими. На рис. 5.1 представлена гармоническая (синусоидальная поперечная) волна, распространяющаяся со скоростью υ вдоль оси x, т.е. приведена зависимость между расстоянием *x* этих частиц (например, частицы *B*) от источника колебаний *0* для какого-то фиксированного момента *t*. Хотя приведенный график функции $\xi(x,t)$ похож на график гармонического колебания, но они различны по существу.

Рис.5.1

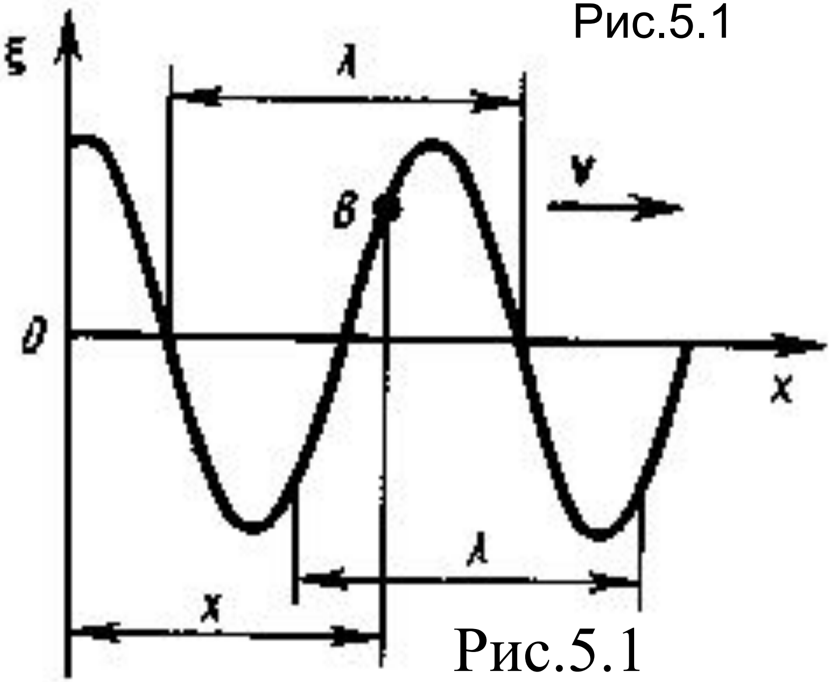


Рис.5.1

График волны дает зависимость смещения *всех частиц среды* от расстояния до источника колебаний в данный момент времени, а график колебаний — зависимость смещения *данной частицы* от времени.

Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется длиной волны λ (рис. 5.1). Длина волны равна тому расстоянию, на которое

$$\lambda = \upsilon T,$$

или, учитывая, что $T=1/\nu$, где ν — частота колебаний,

$$\upsilon = \lambda\nu.$$

Если рассмотреть волновой процесс подробнее, то ясно, что колеблются не только частицы, расположенные вдоль оси x, а колеблется совокупность частиц, расположенных в некотором объеме, т. е. волна, распространяясь от источника колебаний, охватывает все новые и новые области пространства.

Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t, называется волновым фронтом.

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе,

называется волновой поверхностью. Волновых поверхностей можно провести бесчисленное множество, а волновой фронт в

каждый момент времени — один.

В принципе волновые поверхности могут быть любой формы, а в
простейшем случае они представляют собой совокупность
плоскостей, параллельных друг другу, или совокупность
концентрических сфер. Соответственно волна называется плоской
или сферической.

5.2. Уравнение бегущей волны. Фазовая скорость. Волновые уравнения.

Бегущими волнами называются волны, которые (в отличие от
стоячих волн (о них будет сказано ниже)) переносят в пространстве
энергию. Перенос энергии в волнах количественно характеризуется
вектором плотности потока энергии. Этот вектор для упругих волн
называется вектором Умова (по имени русского ученого Н. А.
Умова (1846 — 1915), решившего задачу о движении энергии

за единицу времени через единичную площадку, расположенную

перпендикулярно направлению распространения волны.

Для вывода уравнения бегущей волны — зависимости смещения

колеблющейся частицы от координат и времени — рассмотрим

плоскую синусоидальную волну, предполагая, что ось *x* совпадает с

направлением распространения волны (рис. 5.1). В данном случае

волновые поверхности перпендикулярны оси *x*, а так как все точки

волновой поверхности колеблются одинаково, то смещение ξ, будет

зависеть . только от x и t т. е. $\xi = \xi\,(x, t)$.

На рис. 5.1 рассмотрим некоторую частицу *B,* находящуюся где υ — скорость распространения волны. Тогда уравнение колебаний частиц, лежащих в плоскости x, имеет вид

$$\xi(x, t) = A\cos\omega(t - x/\upsilon) \qquad (5.2.1)$$

откуда следует важный признак волны: волна — это процесс, *периодический во времени и пространстве.* Уравнение (5.2.1) есть уравнение бегущей волны. Если плоская волна распространяется в противоположном направлении, то

$$\xi(x, t) = A\cos\omega(t + x/\upsilon) \qquad (5.2.2)$$

В общем случае уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x в среде, *не поглощающей* энергию, имеет вид выбором начал отсчета x и t, $[\omega(t - x/\upsilon) + \phi_0]$ — фаза плоской волны. Для характеристики синусоидальной волны используется волновое число

$$k = 2\pi/\lambda = 2\pi/\upsilon = \omega/\upsilon$$

Учитывая (5.2.3), уравнению (5.2.2) можно придать вид

$$\xi\,(x,\ t) = A\cos(\omega t - kx + \phi_0) \qquad (5.2.4)$$

Уравнение волны, распространяющейся в сторону убывания x, отличается от (5.2.4) только знаком члена kx.

Основываясь на формуле Эйлера, уравнение плоской синусоидаль-ной волны можно записать в виде

$$\xi\,(x,\ t) = Ae^{i(\omega t - kx + \phi 0)},$$

Где физический смысл имеет лишь действительная часть.

Предположим, что при волновом процессе фаза постоянна, т. е.

$$\omega(t - x/\upsilon) + \phi_0 = \text{const}. \qquad dt - \frac{1}{\upsilon}dx$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon$$

(5.2.6)

Следовательно, скорость υ распространения волны в уравнении

(5.2.6) есть не что, как *скорость перемещения фазы волны*, и ее

называют фазовой скоростью.

Повторяя ход рассуждений для плоской волны, можно доказать, что

уравнение сферической синусоидальной волны — волны, волновые

поверхности которой имеют вид концентрических сфер,

записывается как

$$\xi(r, t) = (A_0/r)\cos(\omega t - kr + \phi_0), \qquad (5.2.7)$$

где r — расстояние от центра волны до рассматриваемой

точки среды. В случае сферической волны даже в среде, *не*

$$\upsilon = \omega/k, \qquad (5.2.8)$$

т. е. фазовая скорость синусоидальных волн зависит от их частоты.

Это явление называют дисперсией волн, а среда, в которой наблюдается дисперсия волн, называется диспергирующей средой.

Распространение волн в однородной изотропной среде в общем случае описывается волновым уравнением — дифференциальным уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

или $\Delta\xi = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ (5.2.9)

где υ — фазовая скорость, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор

$$\frac{\partial\ \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial\ \xi}{\partial t^2} \qquad (5.1.10)$$

Соответствующей подстановкой можно убедиться, что уравнению (5.2.10) удовлетворяют, в частности, плоская волна (см. (5.2.2)) и сферическая волна (см. (5.2.7)).

5.3. Принцип суперпозиции. Групповая скорость

Если среда, в которой распространяется одновременно несколько

волн, *линейна*, т. е. ее свойства не изменяются под действием

возмущений, создаваемых волной, то к ним применим принцип

суперпозиции (наложения) волн: при распространении в линейной

среде нескольких волн каждая из них распространяется так, как

Исходя из принципа суперпозиции и разложения Фурье любая

волна может быть представлена в виде системы синусоидальных

волн, т. е. в виде волнового пакета, или группы волн. Волновым

пакетом называется суперпозиция волн, мало отличающихся друг

от друга по частоте, занимающая в каждый момент времени

ограниченную область пространства.

«Сконструируем» простейший волновой пакет из двух распространяющихся вдоль оси *x* волн с одинаковыми амплитудами и близкими частотами и волновыми числами, причем $d\omega << \omega$ и $dk << dk$. Тогда

$$-2A_0\cos\left(\frac{td\omega - xdk}{2}\right)\cos(\omega t - kx).$$

$$\xi(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx) + A_0 \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x] =$$

$$-2A_0\cos\left(\frac{td\omega - xdk}{2}\right)$$

есть медленно изменяющаяся функция координаты *x* и времени *t*.

За скорость распространения этой несинусоидальной волны (волнового пакета) принимают скорость перемещения максимума амплитуды волны, рассматривая тем самым максимум в качестве центра волнового пакета. При условии, что *t*dω - *x*d*k* = const, получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk} = u \qquad (5.3.1)$$

Скорость *u* есть групповая скорость. Ее можно определить как скорость движения группы волн, образующих в каждый момент времени локализованный в пространстве волновой пакет.

$$u = \frac{d\omega}{dk}$$

Хотя выражение (5.3.1) получено для волнового пакета из двух составляющих, можно доказать, что оно справедливо в самом

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\upsilon k)}{dk} = \upsilon + \frac{d\upsilon}{dk} = \upsilon + k\left(\frac{d\upsilon}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk}\right) = \upsilon + k\left(-\frac{\lambda}{k}\right)\frac{d\upsilon}{d\lambda},$$

Или
$$u = \upsilon - \lambda\frac{d\upsilon}{d\lambda} \qquad (5.3.2)$$

Из формулы (5.3.2) вытекает, что *u* может быть как меньше, так и больше *υ* в зависимости от знака $\frac{d\upsilon}{d\lambda}$. В недиспергирующей среде $\frac{d\upsilon}{d\lambda}$ = 0 и групповая скорость совпадает с фазовой.

Понятие групповой скорости очень важно, так как именно она фигурирует при измерении дальности в радиолокации, в системах управления космическими объектами и т. д. В теории относительности доказывается, что *групповая скорость u ≤ c*, в то время как *для фазовой скорости ограничений не существует.*

5.4. Интерференция волн

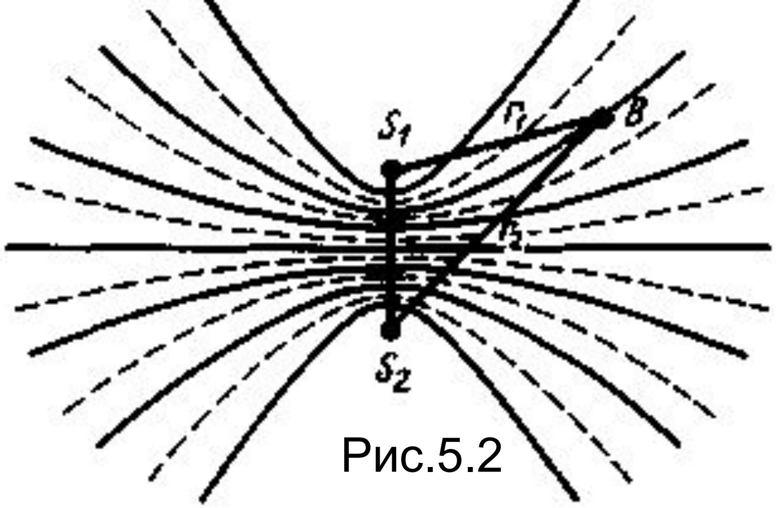


Рис.5.2

Согласованное протекание во времени и пространстве нескольких

колебательных или волновых процессов связывают с понятием когерентности. Волны называются когерентными, если разность их

фаз остается постоянной во времени. Очевидно, что когерентными

могут быть лишь волны, имеющие одинаковую частоту. При

аложении в пространстве двух (или нескольких) когерентных волн

в разных его точках получается усиление или ослабление

результирующей волны в зависимости от соотношения между

фазами этих волн. Это явление называется интерференцией волн.

постоянной разностью фаз. Согласно (5.1.7),

$$\xi(r, t) = (A_0/r_1)\cos(\omega t - kr_1 + \phi_1),$$

$$\xi(r, t) = (A_0/r_2)\cos(\omega t - kr_2 + \phi_2),$$

где r_1, и r_2 — расстояния от источников волн до рассматриваемой точки *B*, k — волновое число, ϕ_1 и ϕ_2 — начальные фазы обеих накладывающихся сферических волн. Амплитуда результирующей волны в точке *B* равна

$$A^2 = A_0^2\left\{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2}\cos[k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2)]\right\}.$$

Так как для когерентных источников разность начальных фаз $(\phi_1 - \phi_2) = \mathrm{const}$, то результат интерференции двух волн в различных

$$\{[k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2)]\} = \pm 2m\pi.$$

точках зависит от величины $\Delta = r_1 - r_2$, называемой разностью хода

$$\{[k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2)]\} = \pm(2m+1)\pi \qquad (m = 0,1,2...), \quad (5.4.2)$$

наблюдается интерференционный минимум: амплитуда результи-
рующего колебания $A = |A_0/r_1 - A_0/r_2|$. m = 0, 1, 2,.... называется соответственно порядком интерференционного максимума или
минимума.

Условия (5.4.1) и (5.4.2) сводятся к тому, что

$$r_1 - r_2 = \text{const}. \qquad (5.4.3)$$

Выражение (5.4.3) представляет собой уравнение гиперболы с фокусами в точках S_1 и S_2. Следовательно, геометрическое место
точек, в которых наблюдается усиление или ослабление результирующего колебания, представляет собой семейств гипербол (рис. 5.2), отвечающих условию $\phi_1 - \phi_2 = 0$. Между двумя интерференционными максимумами (на рис. 5.2 сплошные

5.5. Стоячие волны

Особым случаем интерференции являются стоячие волны. Стоячие

волны — волны, образующиеся при наложении двух бегущих синусоидальных волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами. Для вывода уравнения

стоячей волны предположим, что две бегущие синусоидальные

волны распространяются навстречу друг другу вдоль оси x в среде

без затухания, причем обе волны характеризуются одинаковыми

амплитудами и частотами. Кроме того, начало координат

выберем в точке, в которой обе волны имеют одинаковую фазу, а

отсчет времени начнем с момента, когда фазы обеих волн и волны, распространяющейся ей навстречу, будут иметь вид

$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx)$, $\xi_2 = A\cos(\omega t + kx)$. (5.5.1)

Сложив эти уравнения и учитывая, что $k = 2\pi/\lambda$ (см. (5.1.3)), получим уравнение стоячей волны:

$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos kx \cos\omega t = 2A\cos(2\pi x/\lambda)\cos\omega t$.
(5.5.2)

Из уравнения стоячей волны (5.5.2) вытекает, что в каждой точке
стоячей волны происходят колебания той же частоты ω с амплитудой $A_0 = |2A\cos(2\pi x/\lambda)|$, зависящей от координаты x рассматриваемой точки.

В точках среды, где $2\pi x/\lambda = \pm m\pi$ $(m=0, 1, 2,...)$, (5.5.3)
амплитуда стоячей волны достигает максимального значения, равного $2A$. В точках среды, где
$2\pi x/\lambda = \pm(m + 1/2)\pi$ $(m = 0, 1, 2,...)$, (5.5.4)
амплитуда стоячей волны обращается в нуль. Точки, в

пучностями стоячей волны, а точки, в которых амплитуда стоячей
волны равна нулю ($A_{ст} = 0$), называются узлами стоячей волны.

Из выражений (5.5.3) и (5.5.4) получим соответственно *координаты*
пучностей и узлов:

$$x_п = \pm m\lambda/2 \; (m = 0,1,2,...), \qquad (5.5.5)$$

$$x_{узл} = \pm(m + 1/2)\lambda/2 \; (m = 0, 1, 2,...). \qquad (5.5.6)$$

Из формул (5.5.5) и (5.5.6) следует, что расстояния между двумя
соседними пучностями и двумя соседними узлами одинаковы и
равны $\lambda/2$. Расстояние между соседними пучностью и узлом
стоячей волны равно $\pi/4$.

одинаковыми фазами (в уравнении (5.5.2) стоячей волны аргумент
косинуса не зависит от x). При переходе через узел множитель $2A\cdot$
$\cos(2\pi x/\lambda)$ меняет свой знак, поэтому фаза колебаний по разные
стороны от узла отличается на π, т. е. точки, лежащие по разные
стороны от узла, колеблются в противофазе.

Образование стоячих волн наблюдают обычно при интерференции бегущей и отраженной волн. Например, если конец веревки закрепить неподвижно, то отраженная в месте закрепления веревки волна будет интерферировать с бегущей волной и образует стоячую волну. На границе, где происходит отражение волны, в данном случае получается узел. Будет ли на границе отражения узел или пучность, зависит от соотношения плотностей сред. Если среда, от которой происходит отражение, менее плотная, то в месте отражения противоположных направлений, в результате чего получается узел. Если же волна отражается от менее плотной среды, то изменения фазы не происходит и у границы колебания складываются с одинаковыми фазами — получается

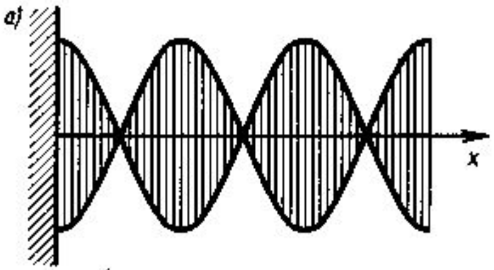
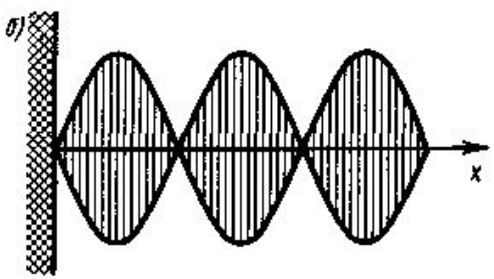


Рис.5.3



Если рассматривать бегущую волну, то в направлении ее распространения переносится энергия колебательного движения, В случае же стоячей волны *переноса энергии нет*, так как падающая и отраженная волны одинаковой амплитуды несут одинаковую энергию в противоположных направлениях. Поэтому полная энергия результирующей стоячей волны, заключенной между узловыми точками, остается постоянной. Лишь в пределах расстояний, равных половине длины волны, происходят взаимные превращения кинетической энергии в

Время	Дисциплина	Аудитория	Группы
Дата экзамена: 13.01.2011, четверг			
8:30-12:00	ЭМВ	19 - 528	13А91
12:20-15:50	ЭМВ	19 - 528	13А92
16:10-19:40	ЭМВ	19 - 528	13А93