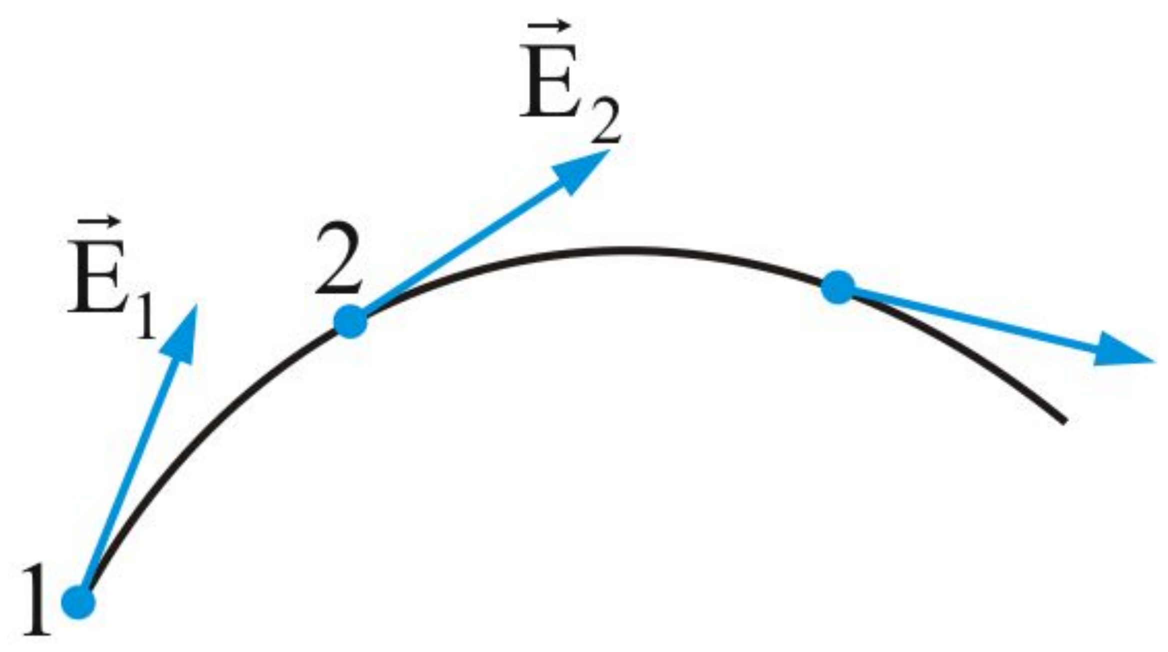
Лекция 3.
ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА

3.1. Силовые линии электростатического поля

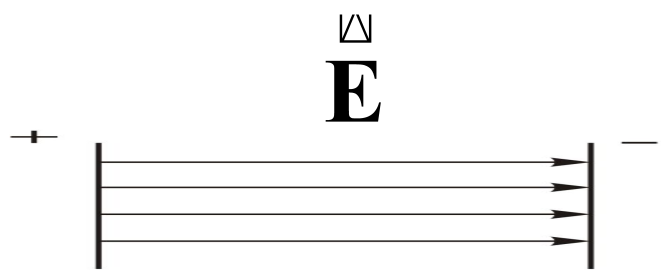
Теорема Остроградского-Гаусса, которую мы докажем и обсудим позже, устанавливает связь между электрическими зарядами и электрическим полем. Она представляет собой более общую и более изящную формулировку закона Кулона.

Основная ценность теоремы Остроградского-Гаусса состоит в том, что она позволяет *глубже понять природу электростатического поля и устанавливает* более общую *связь между зарядом и полем.*

силовые линии *– это линии, касательная к которым в любой точке поля совпадает с направлением вектора напряженности*

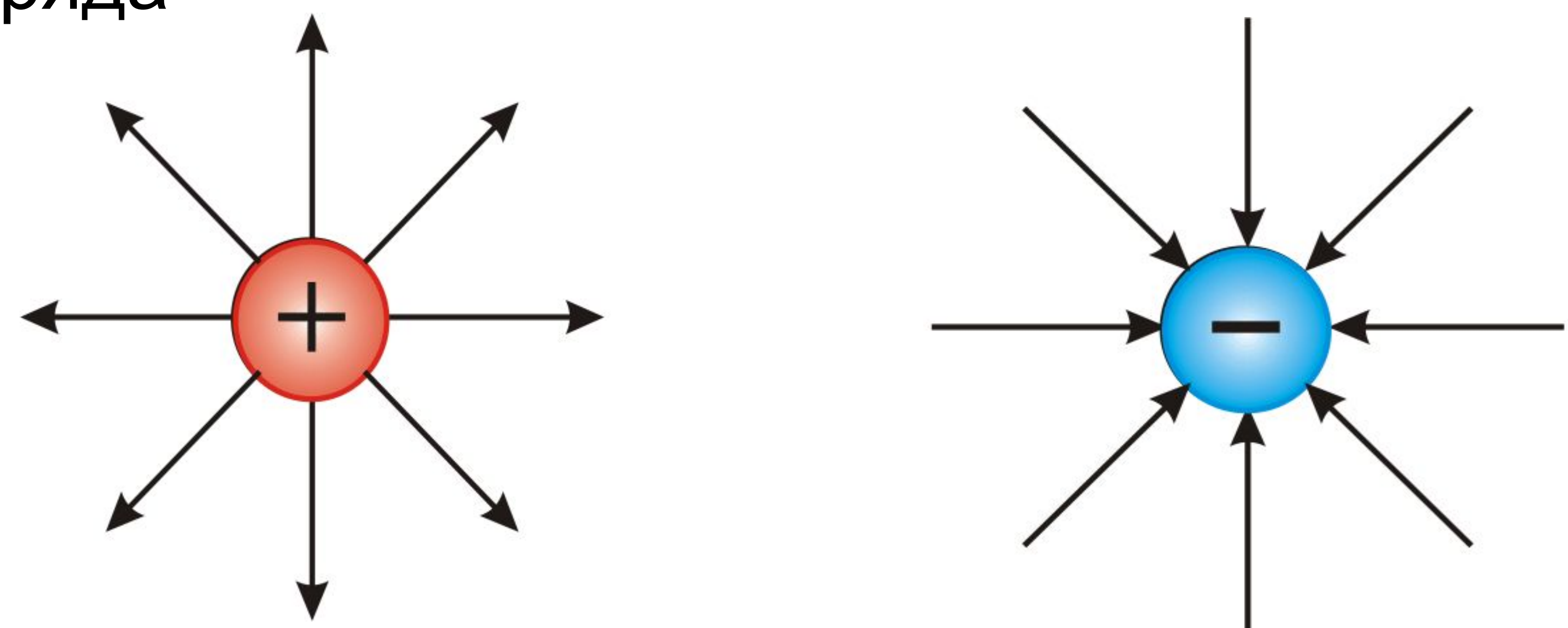


Однородным *называется электростатическое поле, во всех точках которого напряженность одинакова по величине и направлению,* т.е. однородное электростатическое поле изображается параллельными силовыми линиями на равном расстоянии друг от друга

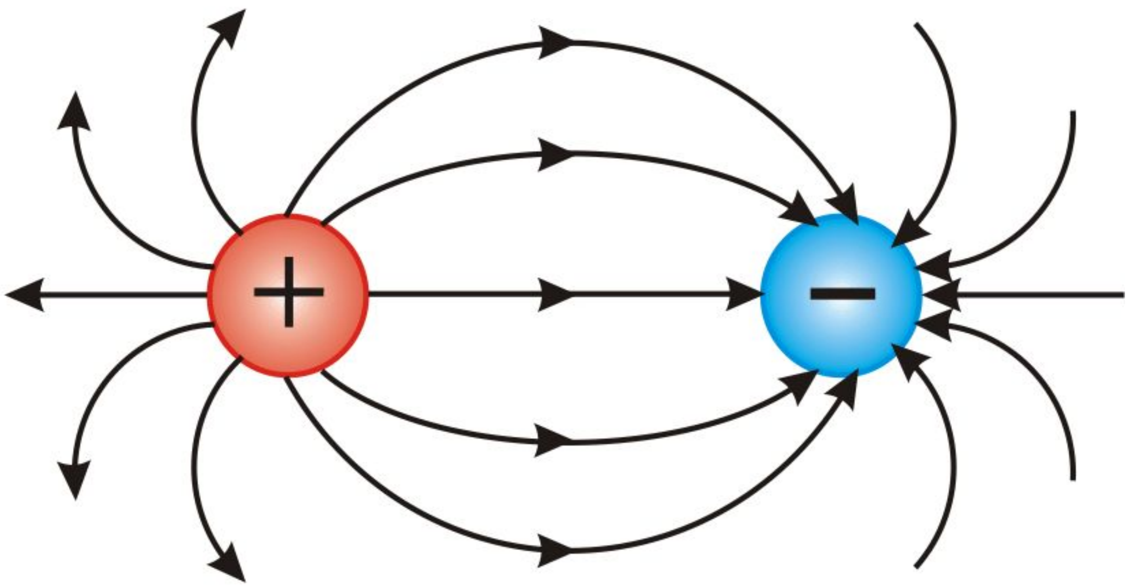


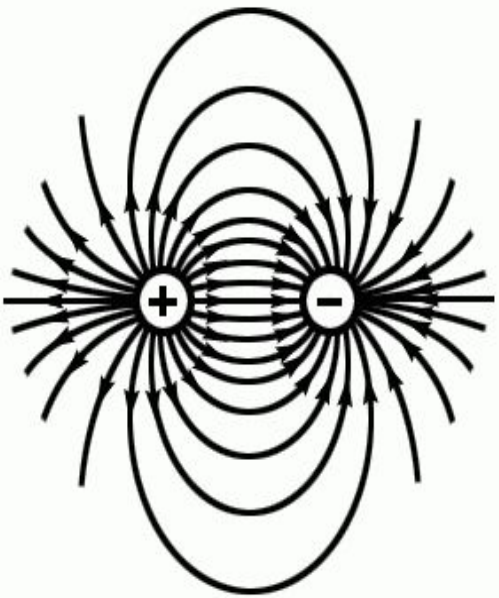
В случае точечного заряда, линии напряженности исходят из положительного заряда и уходят в бесконечность; и из бесконечности входят в отрицательный заряд.

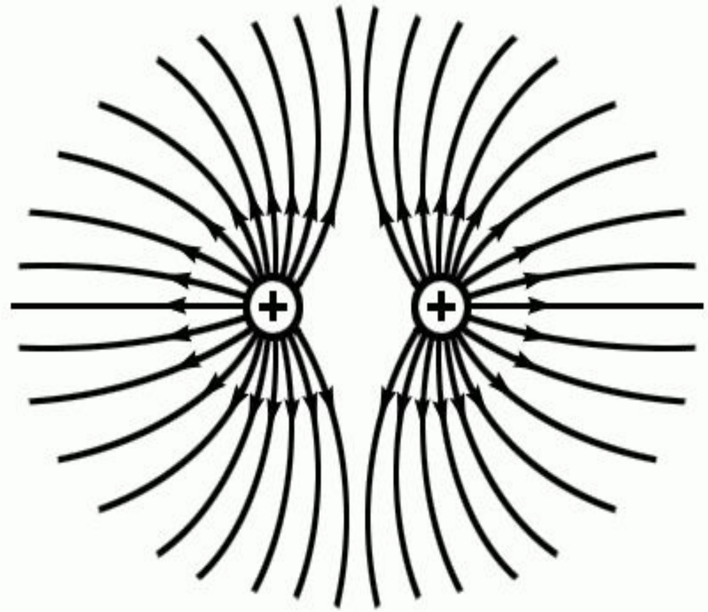
Т.к. $E \sim 1/r^2$ то густота силовых линий обратно пропорциональна квадрату расстояния от заряда

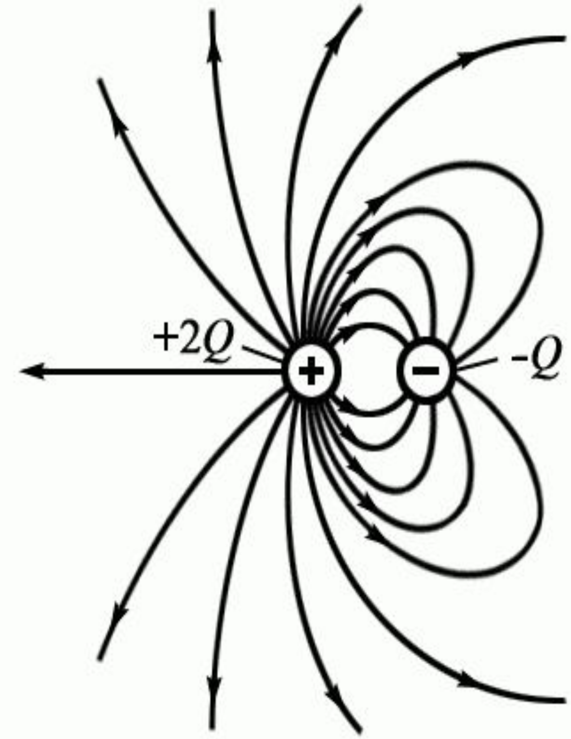


Для системы зарядов, как видим, силовыелинии направлены от положительного заряда к отрицательному







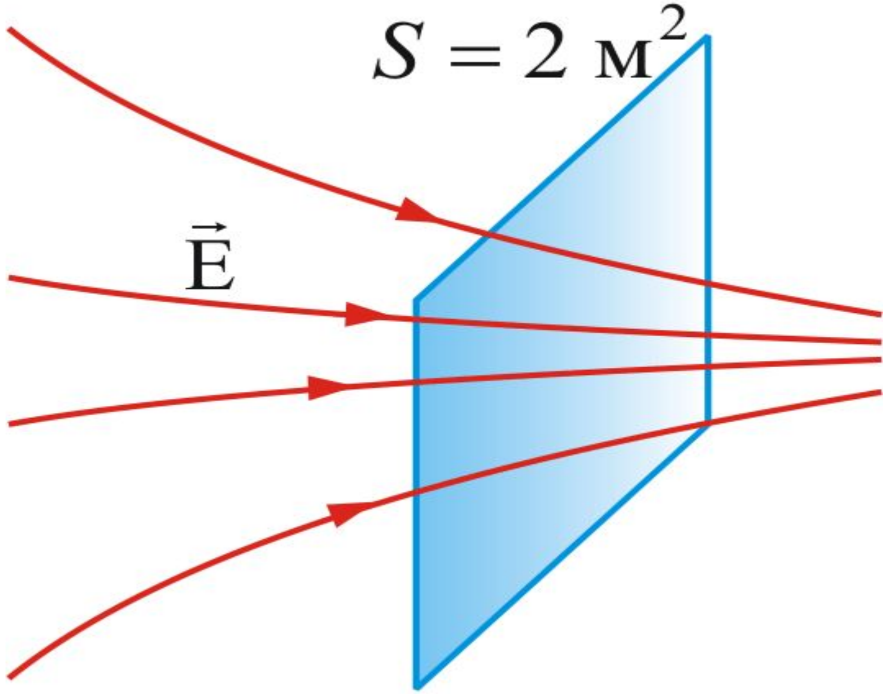

+2Q
-Q

Густота силовых линий должна быть такой, чтобы единичную площадку, нормальную к вектору напряженности пересекало такое их число, которое равно модулю вектора напряженности $\left|\vec{E}\right|$, т.е.

$$\boxed{\left|\vec{E}\right| = \frac{\text{число линий}}{S} = \frac{\Phi}{S}.}$$

если на рисунке выделить площадку $S = 2\ \text{м}^2$, то напряженность изображенного поля будет равна

$$\left|\vec{\mathrm{E}}\right| = \frac{\Phi}{S} = \frac{4}{2} = 2\,\frac{\mathrm{В}}{\mathrm{м}}.$$



Пример 2: площадка S = 3м^2 находится в однородном поле 100 Н/Кл. Сколько линий пересекает эту площадку, если угол составляет 30º (рис. 3.4).

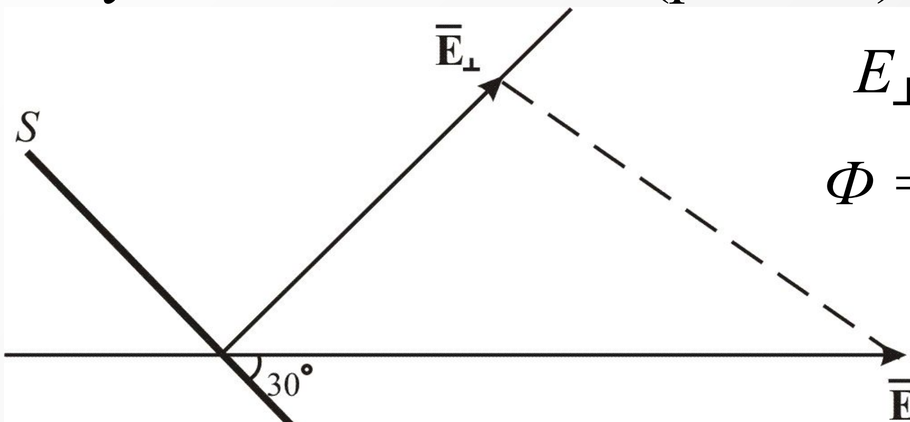


Рис. 3.4

$E_{\perp} = E \cos 60^0 = 50$ Н/Кл

$\Phi = E_{\perp} \cdot S = 50 \cdot 3 = 150$ линий

3.2. Поток вектора напряженности

Итак, на примерах мы показали, что если силовые линии однородного электрического поля напряженностью $\vec{\mathbf{E}}$ пронизывают некоторую площадку *S*, то поток напряженности (раньше мы называли число силовых линий через площадку) будет определяться формулой

$$\Phi_E = ES_{\perp} = ES\cos\alpha = E_n S \qquad (3.1)$$

где E_n – произведение вектора $\vec{\mathbf{E}}$ на нормаль $\vec{\mathbf{n}}$ к данной площадке (рис. 3.5).

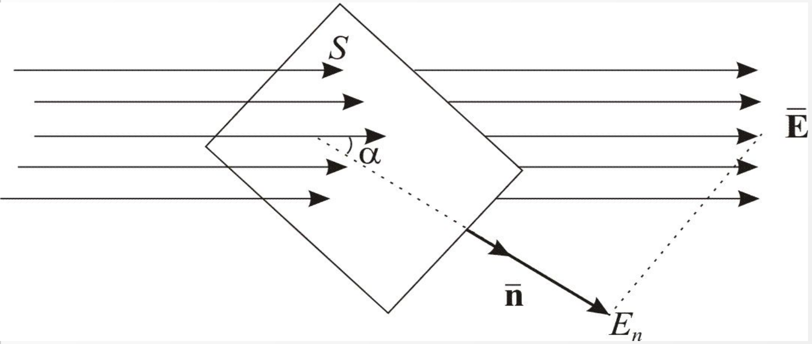


Рис. 3.5.

А величина Φ_E здесь и называется потоком вектора напряженности электрического поля через площадку *S*, т.е. определение:

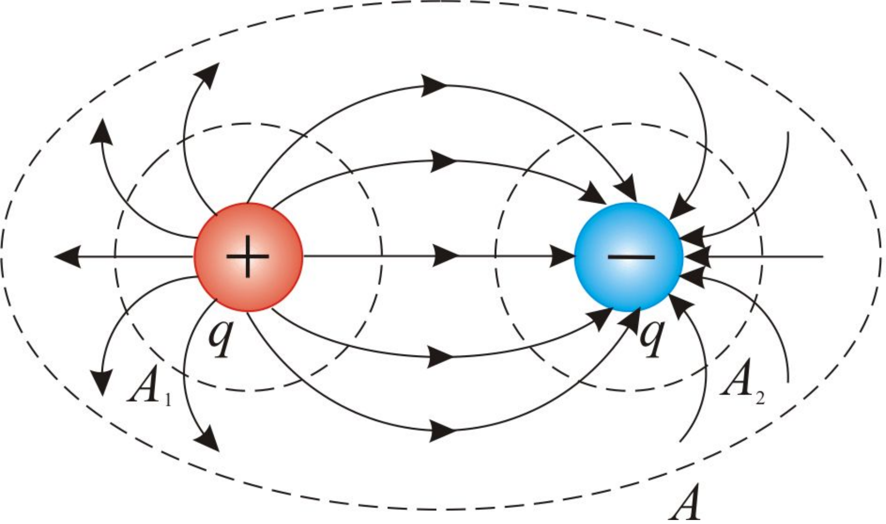
Полное число силовых линий, проходящих через поверхность S называется потоком вектора напряженности Φ_E через эту поверхность. $\Phi_E = (\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{S}})$

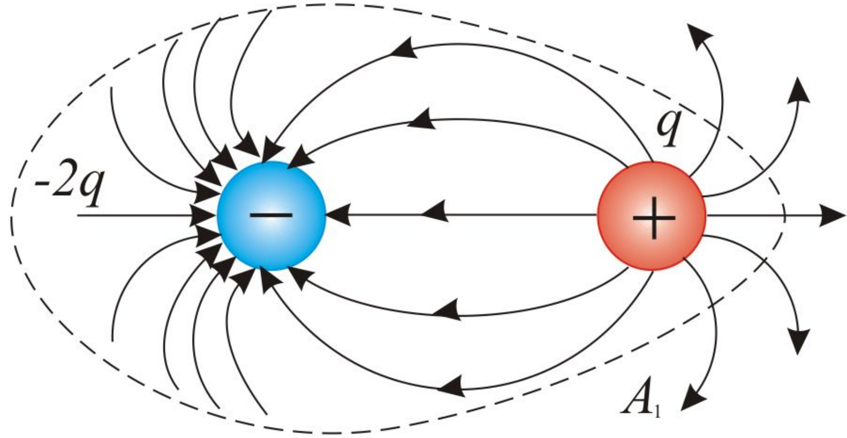
В векторной форме можно записать

$$\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{n}}S \qquad (3.2)$$

– скалярное произведение двух векторов, где вектор

· Таким образом, поток вектора есть скаляр, который в зависимости от величины угла α может быть как положительным, так и отрицательным.





Для первого рисунка – поверхность A_1 окружает положительный заряд и поток здесь направлен наружу, т.е. $\Phi_E > 0.$

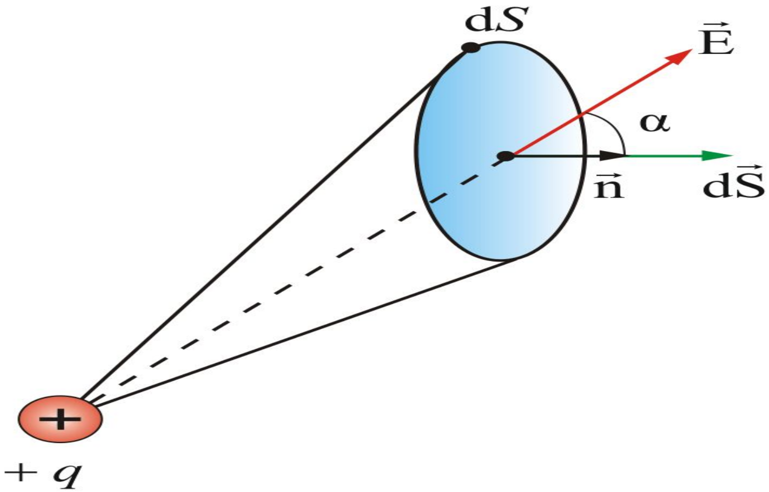
Поверхность A_2 – окружает отрицательный заряд, здесь поток направлен внутрь и $\Phi_E < 0$

Общий поток через поверхность *A* равен нулю.

Опишите второй рисунок самостоятельно.

3.3. Теорема Остроградского-Гаусса

Итак, по определению, поток вектора напряженности электрического поля равен числу линий напряженности, пересекающих поверхность S.



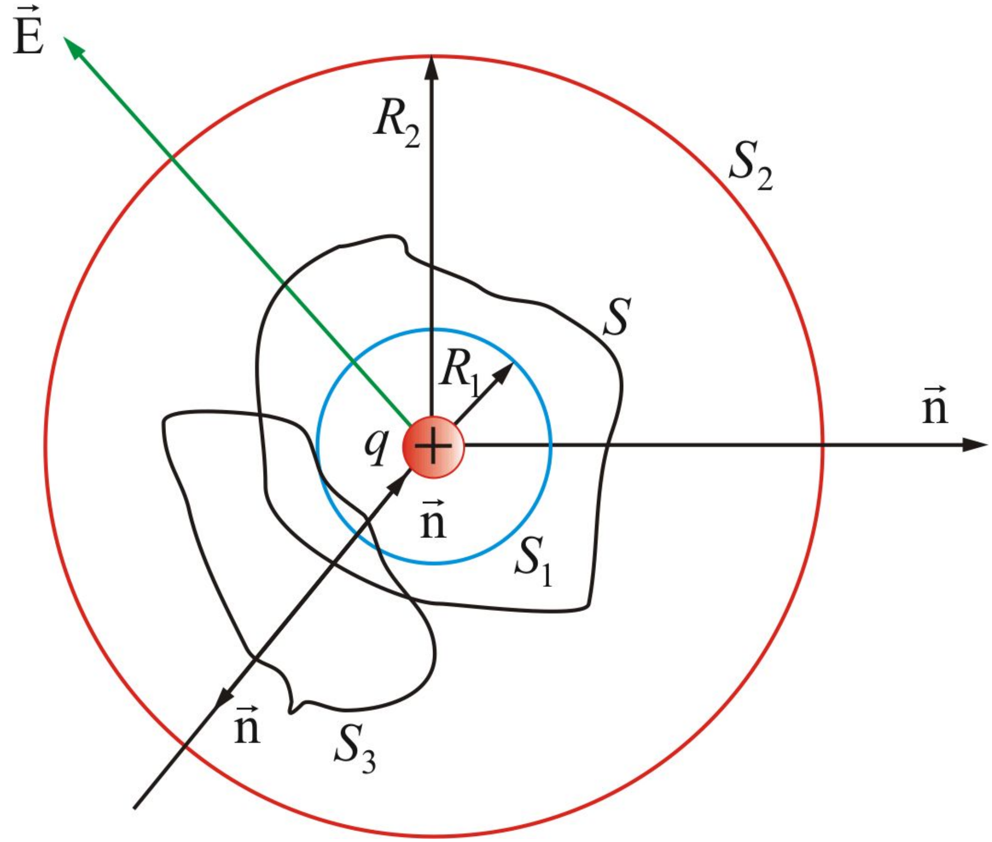
поток вектора напряженности через произвольную элементарную площадку dS будет равен:

$$\Phi_E = E\mathrm{d}S\cos\alpha = E_n\mathrm{d}S.$$

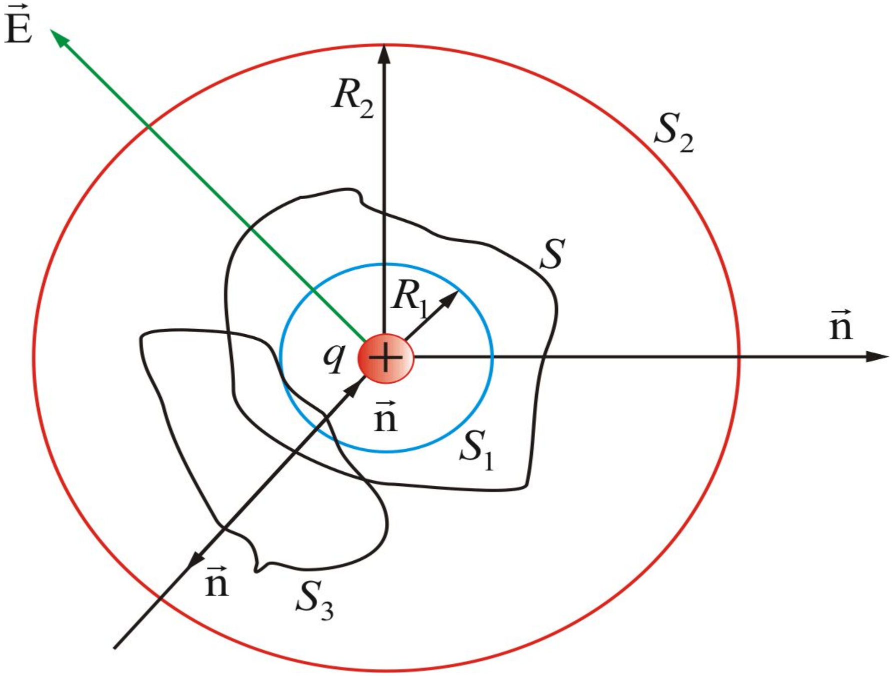
Т.е. в однородном поле $\quad \Phi_E = ES.$

В произвольном электрическом поле

$$\Phi_E = \int_S E_n\mathrm{d}S = \int_S \vec{E}\mathrm{d}\vec{S}.$$



Подсчитаем поток вектора через произвольную замкнутую поверхность S, окружающую точечный заряд q . Окружим заряд q сферой S_1.

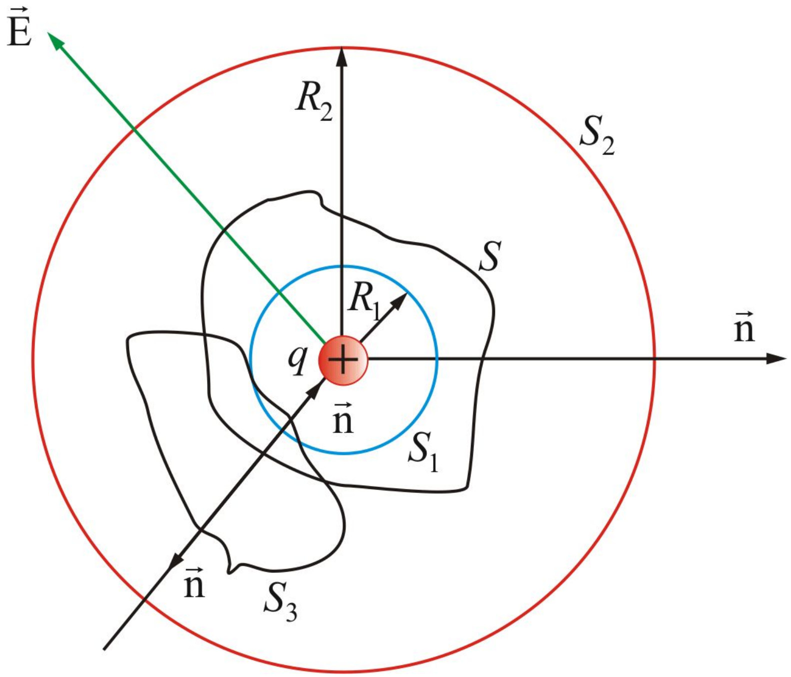


Центр сферы совпадает с центром заряда.

Радиус сферы S_1 равен R_1.

В каждой точке поверхности S_1 проекция **E** на направление внешней нормали одинакова и равна

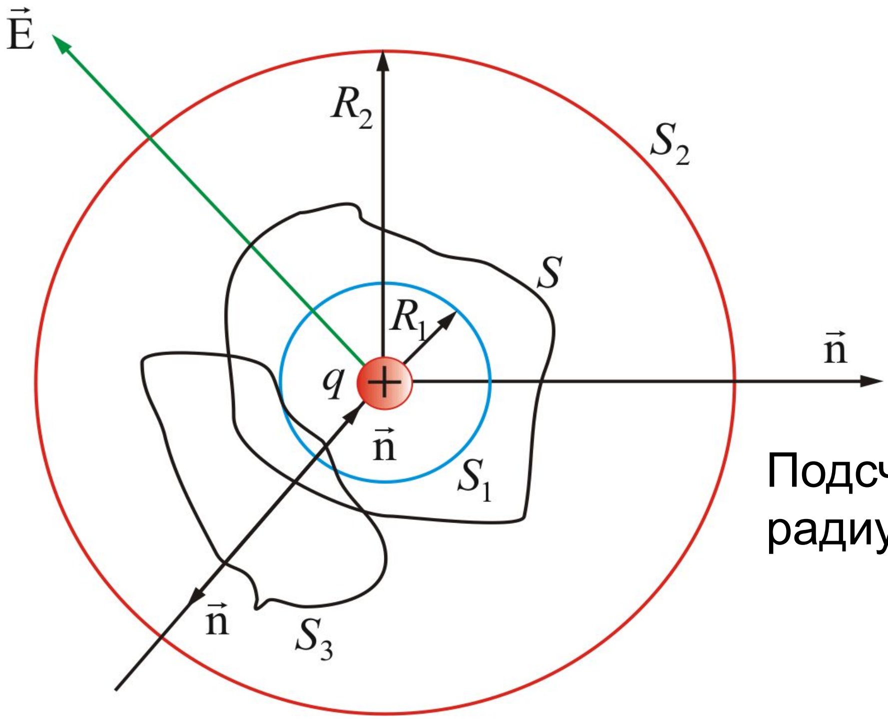
$$E_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_1^2}.$$



Тогда поток через S_1

$$\Phi_E = \oint_{S_1} E_n \mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} 4\pi R_1^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

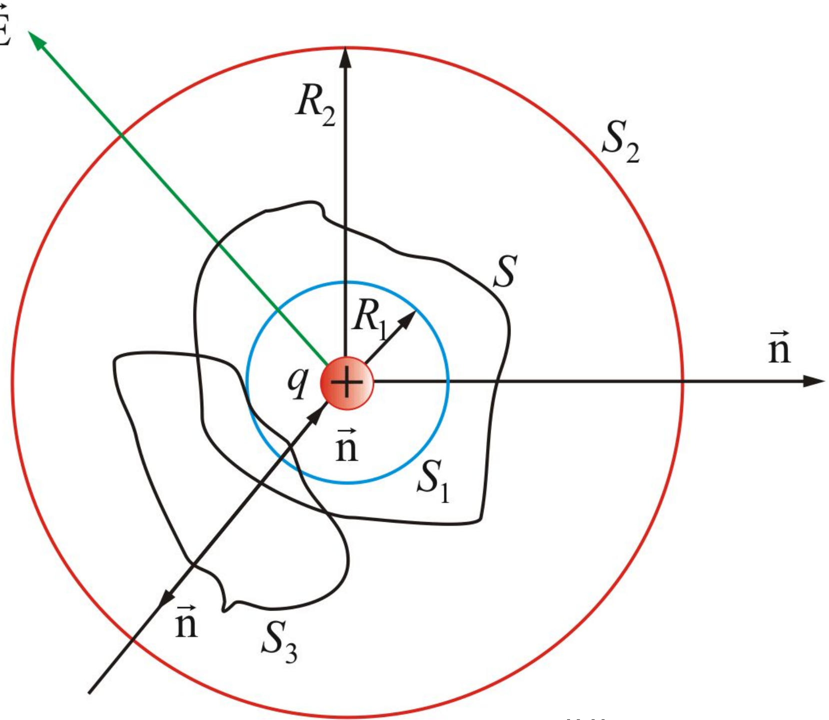
$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}. \qquad (3.3)$$



Подсчитаем поток через сферу S_2, имеющую радиус R_2:

$$\Phi_E = \oint_{S_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} \mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} 4\pi R_2^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}. \qquad (3.3)$$



Из непрерывности линии $\vec{E}$ следует, что поток и через любую *произвольную* поверхность *S* будет равен этой же величине:

$$\boxed{\Phi_E = \oint_S E_n \mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon_0}} \quad (3.3)$$

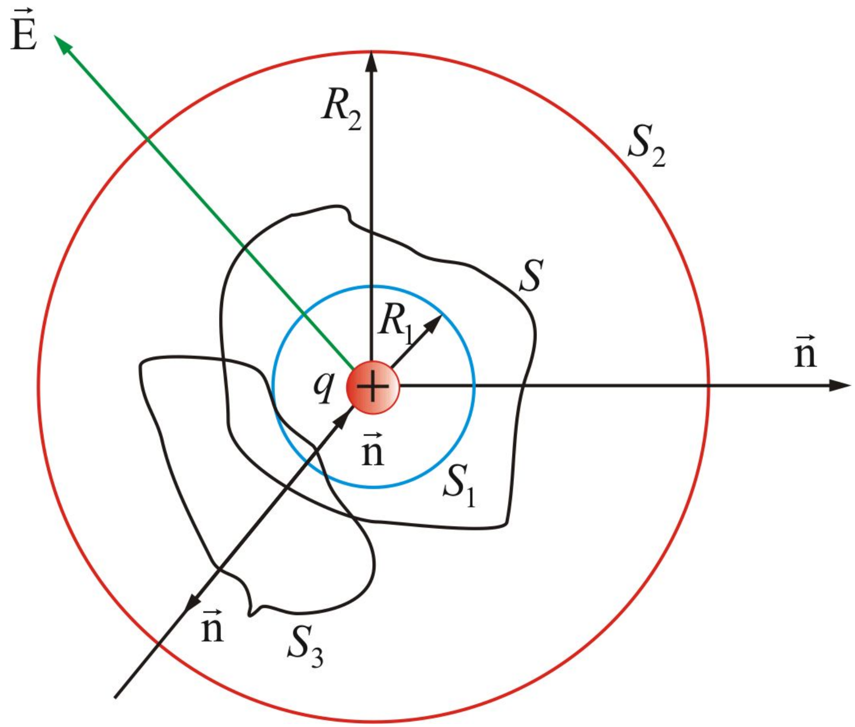
– ***теорема Гаусса для одного заряда***.

Для любого числа произвольно расположенных зарядов, находящихся внутри поверхности:

$$\Phi_E = \oint_S E_n \mathrm{d}S = \frac{\sum q}{\varepsilon_0} \quad (3.4)$$

– ***теорема Гаусса для нескольких зарядов***.

Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме всех зарядов, расположенных внутри поверхности, деленной на ε0.



Полный поток проходящий через S_3, не охватывающую заряд q, равен нулю:

$$\Phi_3 = 0$$

Таким образом, для точечного заряда q, полный поток через любую замкнутую поверхность S будет равен:

$$\boxed{\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

– если заряд расположен внутри замкнутой поверхности;

$$\Phi_E = 0$$

– если заряд расположен вне замкнутой поверхности;

этот результат не зависит от формы поверхности, и знак потока совпадает со знаком заряда.

Электрические заряды могут быть «размазаны» с некоторой ***объемной плотностью***, различной в разных местах пространства:

$$\rho = \mathrm{d}q / \mathrm{d}V$$

Здесь dV – ***физически бесконечно малый объем***, под которым следует понимать такой *объем, который с одной стороны* ***достаточно мал, чтобы в пределах его плотность заряда считать одинаковой***, *а с другой –* ***достаточно велик, чтобы не могла проявиться дискретность заряда***, т.е. то, что любой заряд кратен целому числу элементарных зарядов электрона или протона .

Суммарный заряд объема dV будет равен:

$$\sum q_i = \int_V \rho \mathrm{d}V.$$

Тогда из теоремы Гаусса можно получить:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{\mathrm{E}} \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \mathrm{d}V$$

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \mathrm{d}V \qquad (3.5)$$

это ещё одна форма записи ***теоремы Остроградского-Гаусса,*** *если заряд неравномерно распределен по объему.*

3.4. Дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса

- Пусть заряд распределен в пространстве ΔV, с объемной плотностью $<\rho>$. Тогда

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{<\rho> \Delta V}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{\Delta V} \oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{<\rho>}{\varepsilon_0}$$

Теперь устремим $\Delta V \to 0$, стягивая его к интересующей нас точке. Очевидно, что при этом $<\rho>$ будет стремиться к ρ в данной точке, т.е.

$$\frac{<\rho>}{\varepsilon_0} \to \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Величину, являющуюся пределом отношения $\oint \vec{E} d\vec{S}$ *к* ΔV*, при* $\Delta V \to 0$,

называют ***дивергенцией поля*** **E** *и обозначают*я .

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E}}$$

Дивергенция поля $\mathbf{E}$

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{E}} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \vec{\mathbf{E}} d\vec{\mathbf{S}}. \quad (3.6)$$

Аналогично определяется дивергенция любого другого векторного поля.

Из этого определения следует, что *дивергенция* является *скалярной функцией координат*.

В декартовой системе координат

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{\mathrm{E}} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.}$$

Итак, $$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \qquad (3.6.a)$$

Это теорема Остроградского-Гаусса в дифференциальной форме.

Написание многих формул упрощается, если ввести векторный дифференциальный оператор $\vec{\nabla}$ (Набла)

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{k},$$

где **i, j, k** – орты осей (единичные векторы).

Сам по себе оператор смысла не имеет. Он приобретает смысл в сочетании с векторной или скалярной функцией, на которую символично умножается:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \nabla_x E_x + \nabla_y E_y + \nabla_z E_z = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

***дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса*.**

$$\boxed{\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad (3.6.б)$$

В тех точках поля, где $\operatorname{div} E > 0$ – ***источники*** поля (положительные заряды),

где $\operatorname{div} E < 0$ – ***стоки*** (отрицательные заряды).

Линии выходят из источников и заканчиваются в стоках.