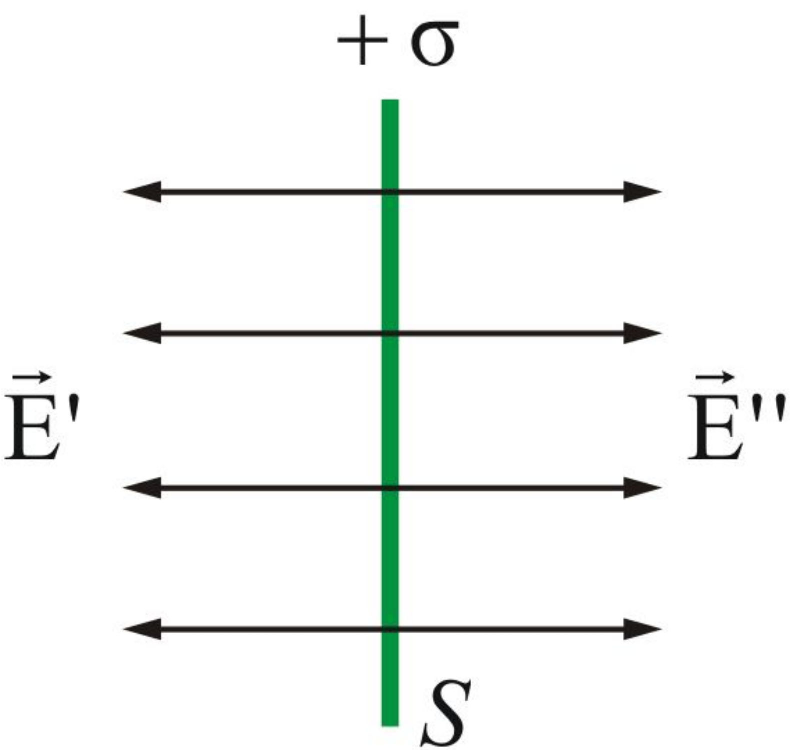
Лекция 4. Вычисление электрических полей с помощью теоремы Остроградского-Гаусса

4.1. Поле бесконечной однородно заряженной плоскости

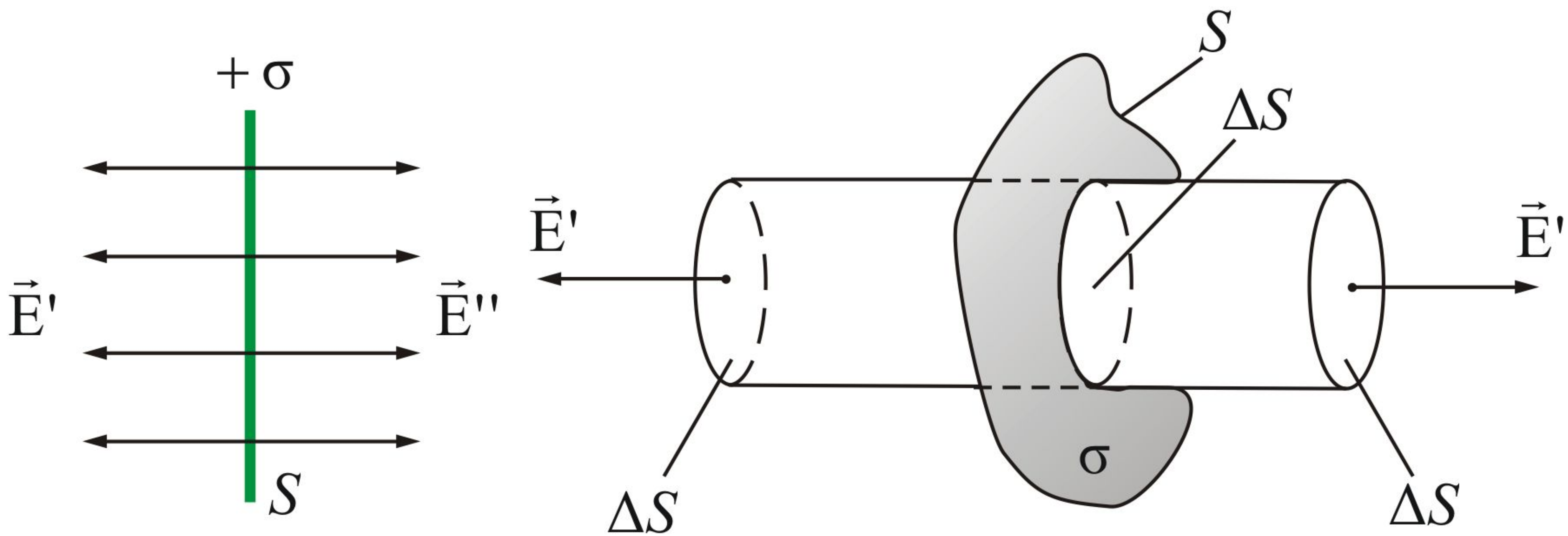


Поверхностная плотность заряда на произвольной плоскости площадью *S* определяется по формуле:

$$\sigma = \frac{dq}{dS},$$

d*q* – заряд, сосредоточенный на площади d*S*;
d*S* – физически бесконечно малый участок поверхности.

Представим себе цилиндр с образующими, перпендикулярными плоскости, и основаниями ΔS, расположенными симметрично относительно плоскости



Тогда $E' = E'' = E.$

Применим теорему Гаусса. Поток Φ_E через боковую часть поверхности цилиндра равен нулю, т.к. $E_n = 0$. Для основания цилиндра $En = E$.

Суммарный поток через замкнутую поверхность (цилиндр) будет равен:

$$\Phi_E = 2\Delta SE.$$

Внутри поверхности заключен заряд . Следовательно, из теоремы Остроградского-Гаусса получим:

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}; \quad \text{тогда} \quad 2\Delta SE = \sigma\Delta S \frac{1}{\varepsilon_0}$$

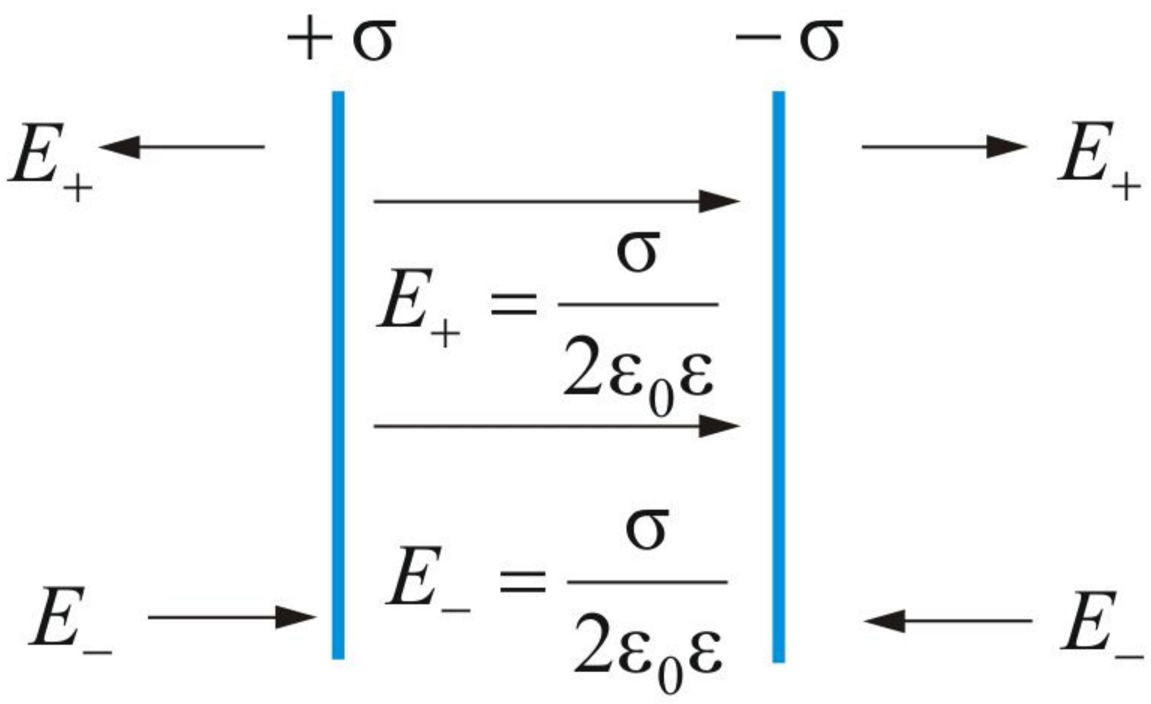
откуда видно, что напряженность поля плоскости S равна:

(4.1)

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

4.2. Поле двух равномерно заряженных плоскостей

Пусть две бесконечные плоскости заряжены разноименными зарядами с одинаковой по величине плотностью $|\sigma|$



Результирующее поле, как было сказано выше, находится как суперпозиция полей, создаваемых каждой из плоскостей. Тогда *внутри плоскостей*

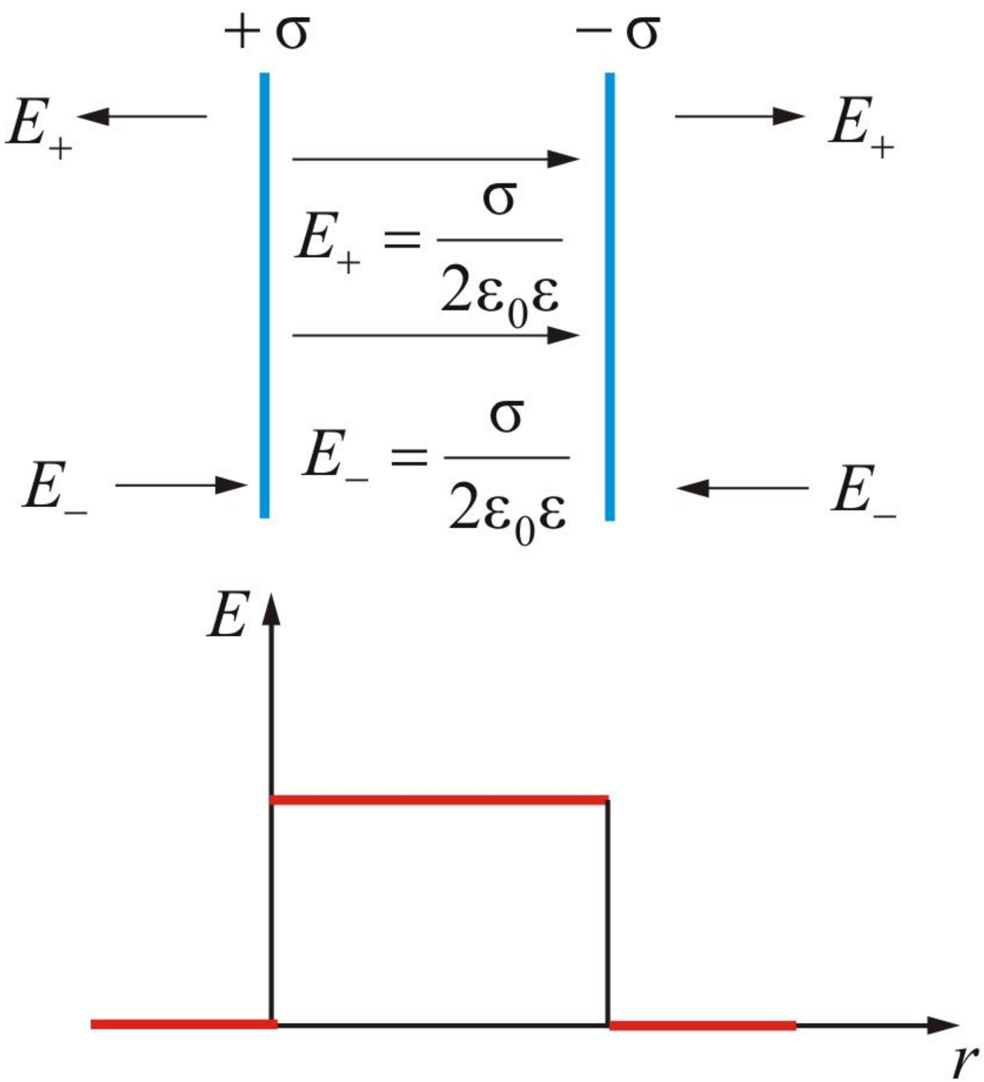
$$E = E_+ + E_- \text{ отсюда } E = \sigma / \varepsilon_0 \quad (4.2)$$

Вне плоскостей напряженность поля

$$\boxed{E = 0.}$$

Полученный результат справедлив и для плоскостей конечных размеров, если расстояние между плоскостями гораздо меньше линейных размеров плоскостей (плоский конденсатор).

Распределение напряженности электростатического поля между пластинами конденсатора показано на рисунке:



Между пластинами конденсатора действует **сила взаимного притяжения** (на единицу площади пластин):

$$\boxed{F_{\text{ед}} = \frac{F}{S} = \frac{S\sigma E}{S}}$$

т.е.

$$\boxed{F_{\text{ед}} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}}$$

Механические силы, действующие между заряженными телами, называют ***пондермоторными.***

Сила притяжения между пластинами конденсатора:

$$\boxed{F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0\varepsilon},}$$

где S – площадь обкладок конденсатора.
Т.к.

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} \Rightarrow} \quad \boxed{\sigma = \frac{q}{S} = E\varepsilon_0\varepsilon}$$

$$\boxed{F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} = \frac{\varepsilon_0 E^2 S}{2}} \qquad (4.3)$$

Это формула для расчета **пондермоторной силы**

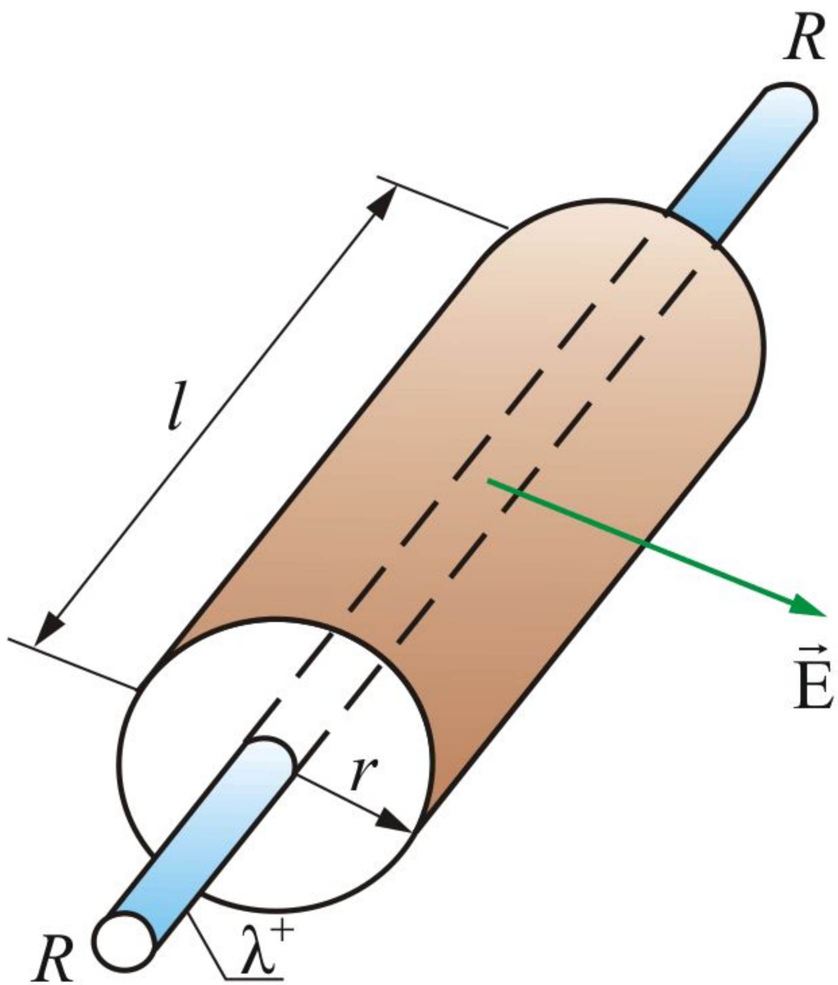
4.3. Поле заряженного бесконечного цилиндра (нити)

Пусть поле создается бесконечной цилиндрической *поверхностью радиуса R*, заряженной с постоянной линейной плотностью

$$\boxed{\lambda^{+} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}}$$

где $\mathrm{d}q$ – заряд, сосредоточенный на отрезке цилиндра

Представим вокруг цилиндра (нити) *коаксиальную* замкнутую поверхность (*цилиндр в цилиндре*) радиуса r и длиной l (основания цилиндров перпендикулярно оси).



Для оснований цилиндров $\boxed{E_n = 0,}$

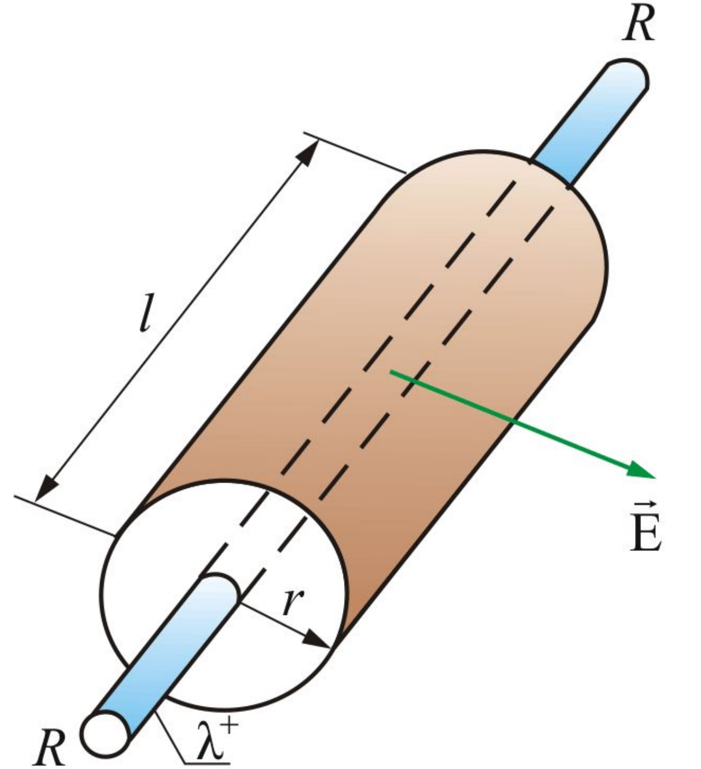
для боковой поверхности

$$\boxed{E_n = E(r),}$$

т.е. зависит от расстояния *r*.

Следовательно, поток вектора через рассматриваемую поверхность, равен

$$\Phi_E = E(r)S = E(r)2\pi rl.$$



При $r \geq R,$ на поверхности будет заряд

$$q = \lambda l.$$

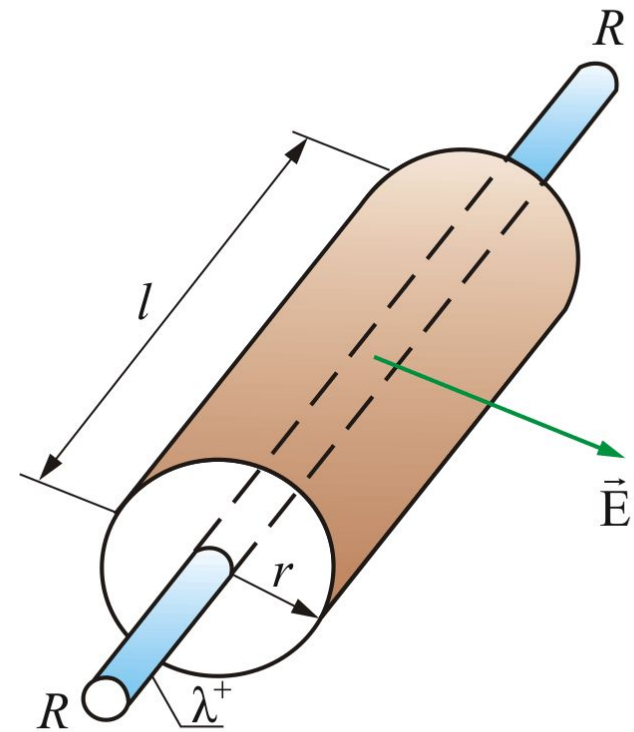
По теореме Остроградского-Гаусса

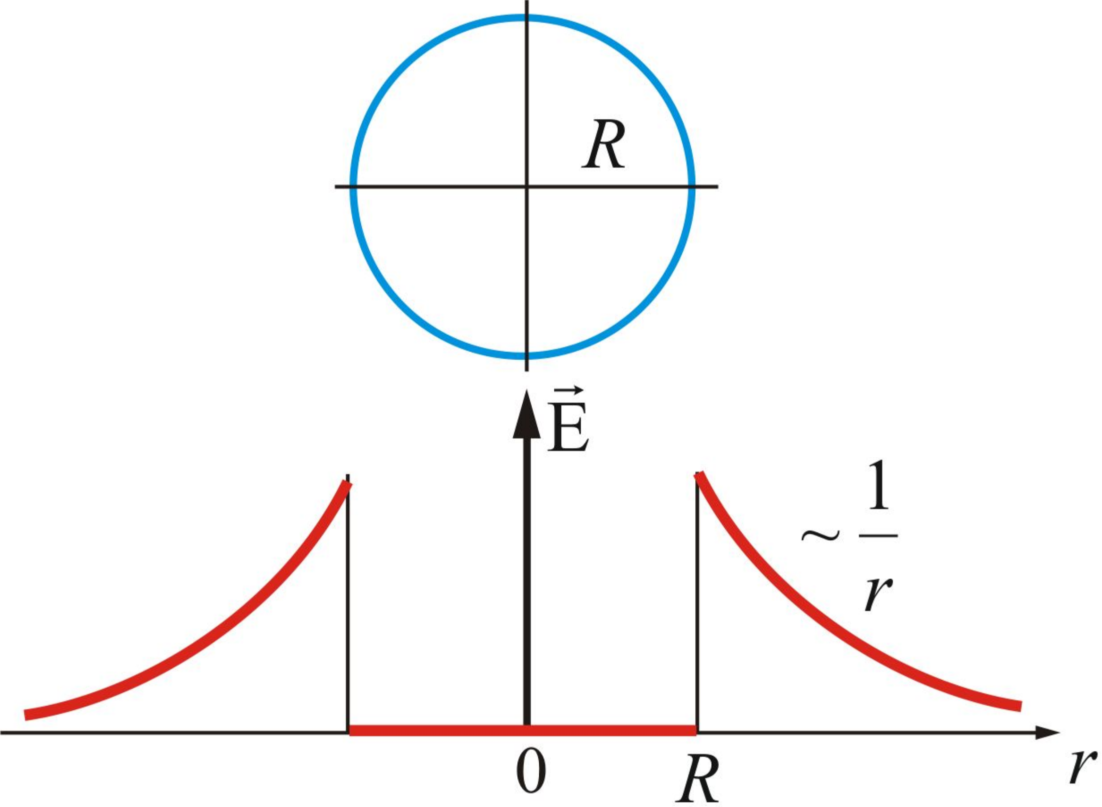
$$\boxed{E(r) 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}}$$

Тогда

$$\boxed{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \text{ при } r \geq R} \qquad (4.4)$$

Если $\boxed{r < R,}$ то $\boxed{E(r) = 0}$, т.к. внутри замкнутой поверхности зарядов нет.

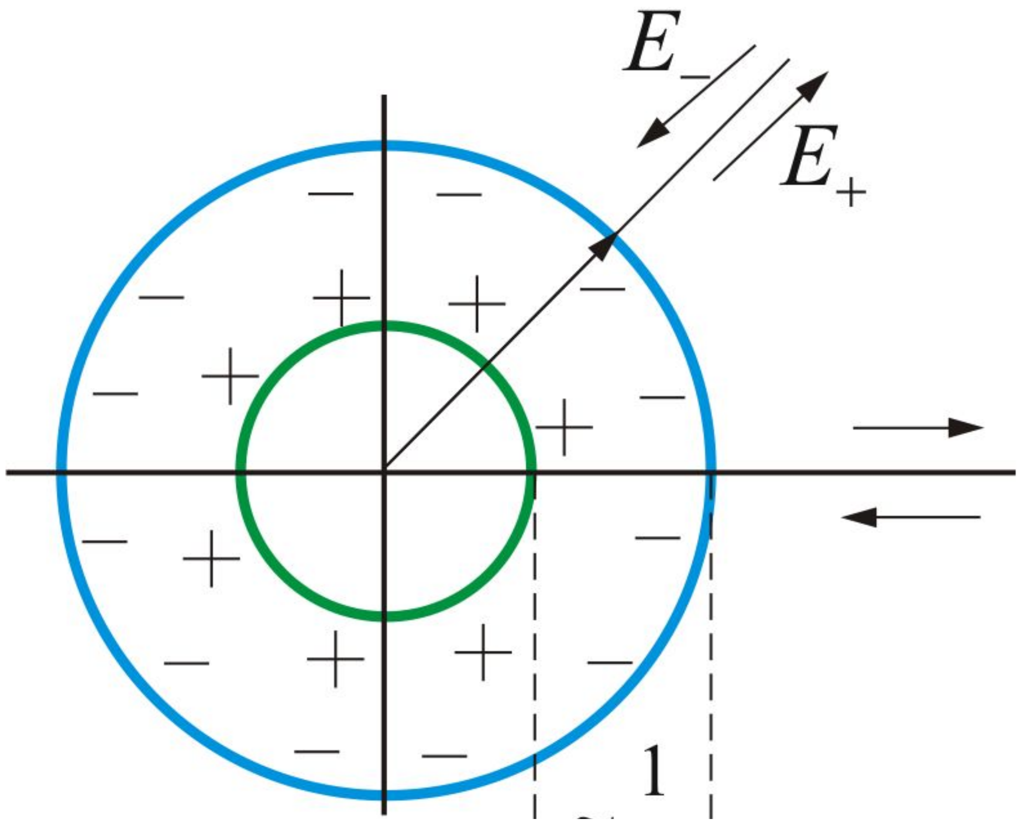




Графически распределение напряженности электростатического поля цилиндра показано на рисунке

$$E = \begin{cases} 0 - \text{внутри цилиндра, т к. нет зарядов} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \text{ или } \dfrac{\mathrm{q}}{2\pi\varepsilon_0 Rl} \text{ на поверхности цилиндра} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \text{ или } \dfrac{\mathrm{q}}{2\pi\varepsilon_0 rl} \text{ вне цилиндра} \end{cases}$$

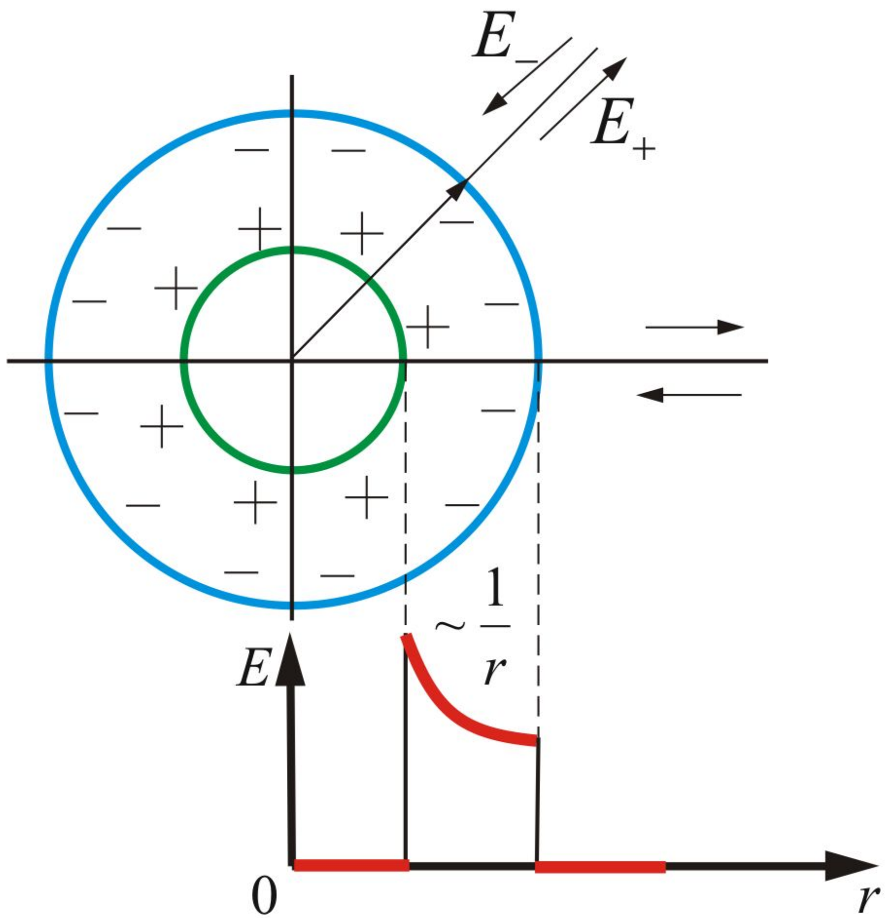
4.4. Поле двух коаксиальных цилиндров с одинаковой линейной плотностью λ, но разным знаком



Внутри меньшего и вне большего цилиндров поле будет отсутствовать

$$E = 0$$

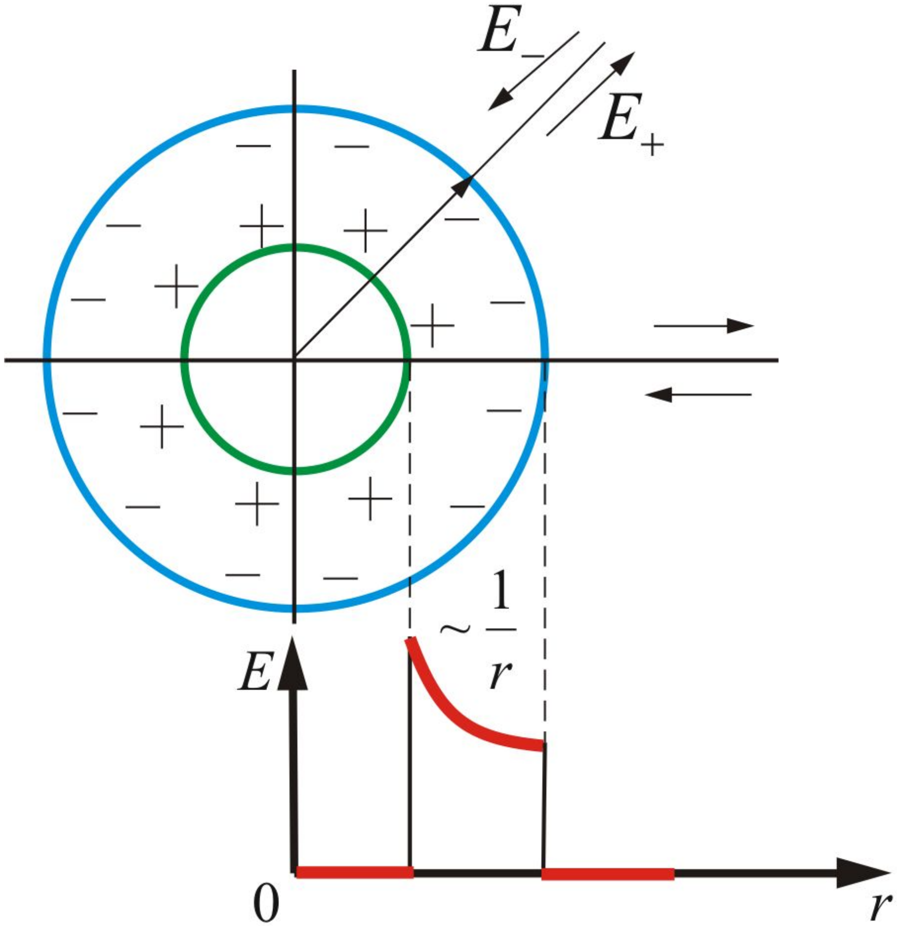
В зазоре между цилиндрами поле определяется так же, как в п. 4.3:



$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}. \quad (4.5)$$

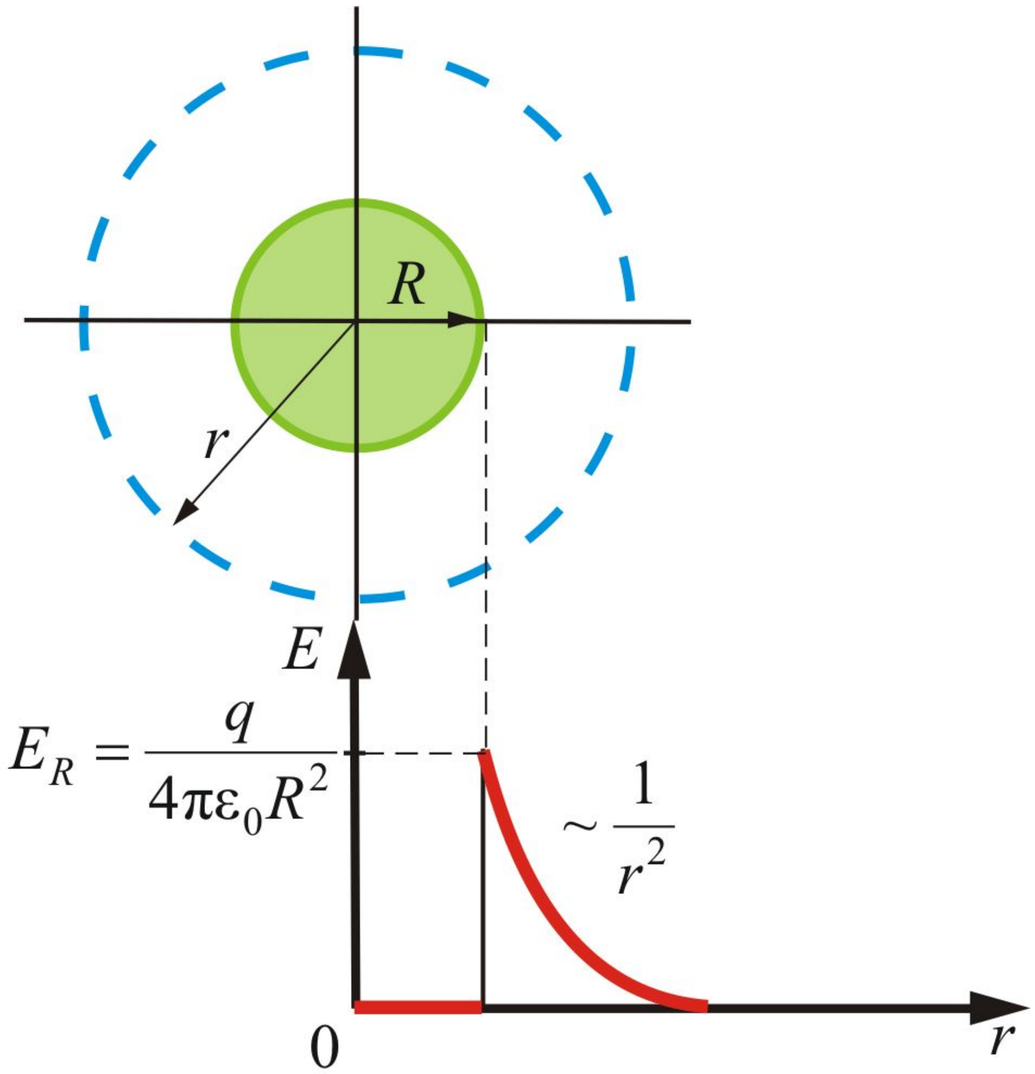
Таким образом для коаксиальных цилиндров имеем:

$$E = \begin{cases} 0 - \text{внутри меньшего и вне большего цилиндров зарядов нет} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} - \text{между цилиндрами, когда } R_1 < r < R_2 \end{cases}$$

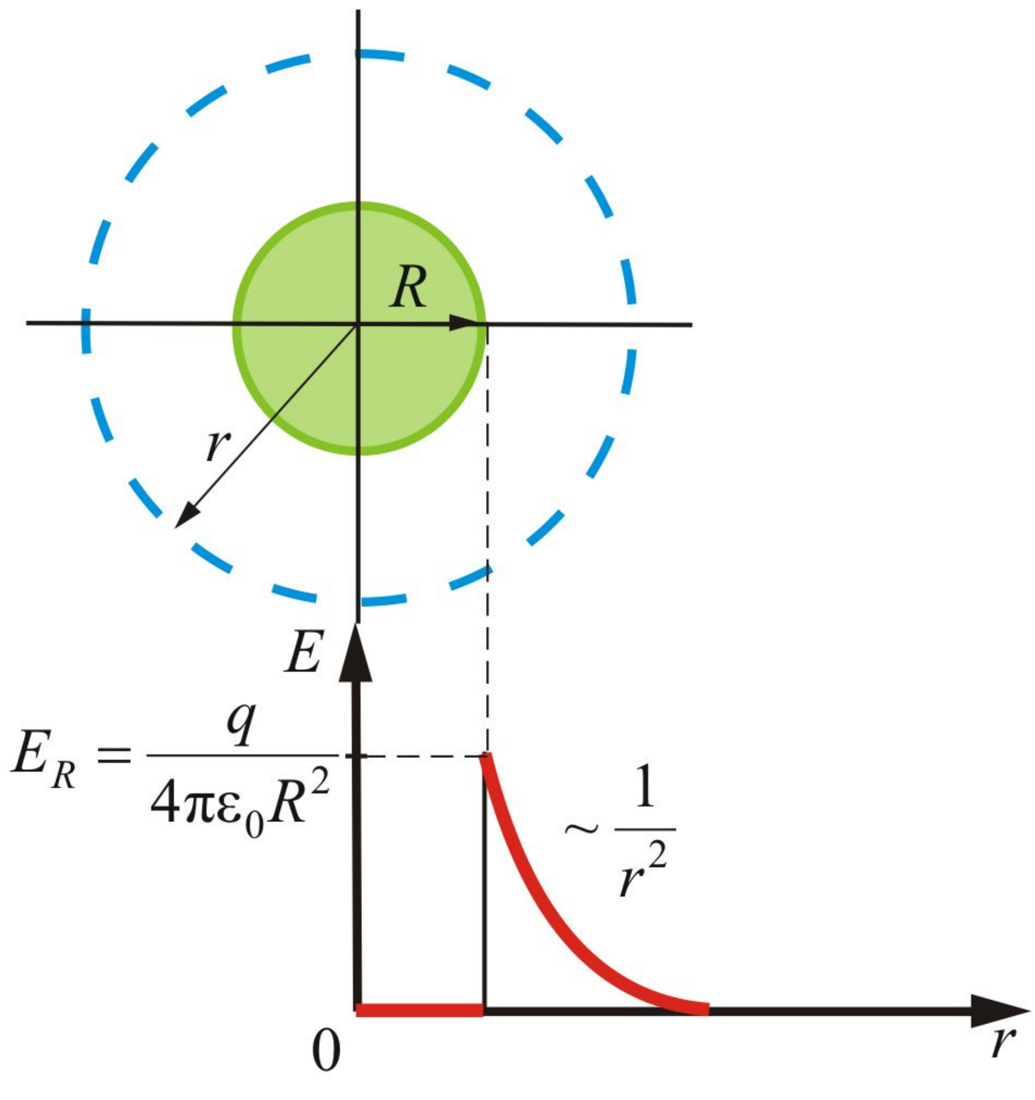


Это справедливо и для бесконечно длинного цилиндра, и для цилиндров конечной длины, если зазор между цилиндрами намного меньше длины цилиндров (цилиндрический конденсатор).

4.5. Поле заряженного пустотелого шара



Вообразим вокруг шара – сферу радиуса r (рис).



Если $\boxed{r \geq R,}$ то внутрь воображаемой сферы попадет весь заряд q, распределенный по сфере, тогда

$$\boxed{\Phi_E = E(r)S = E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

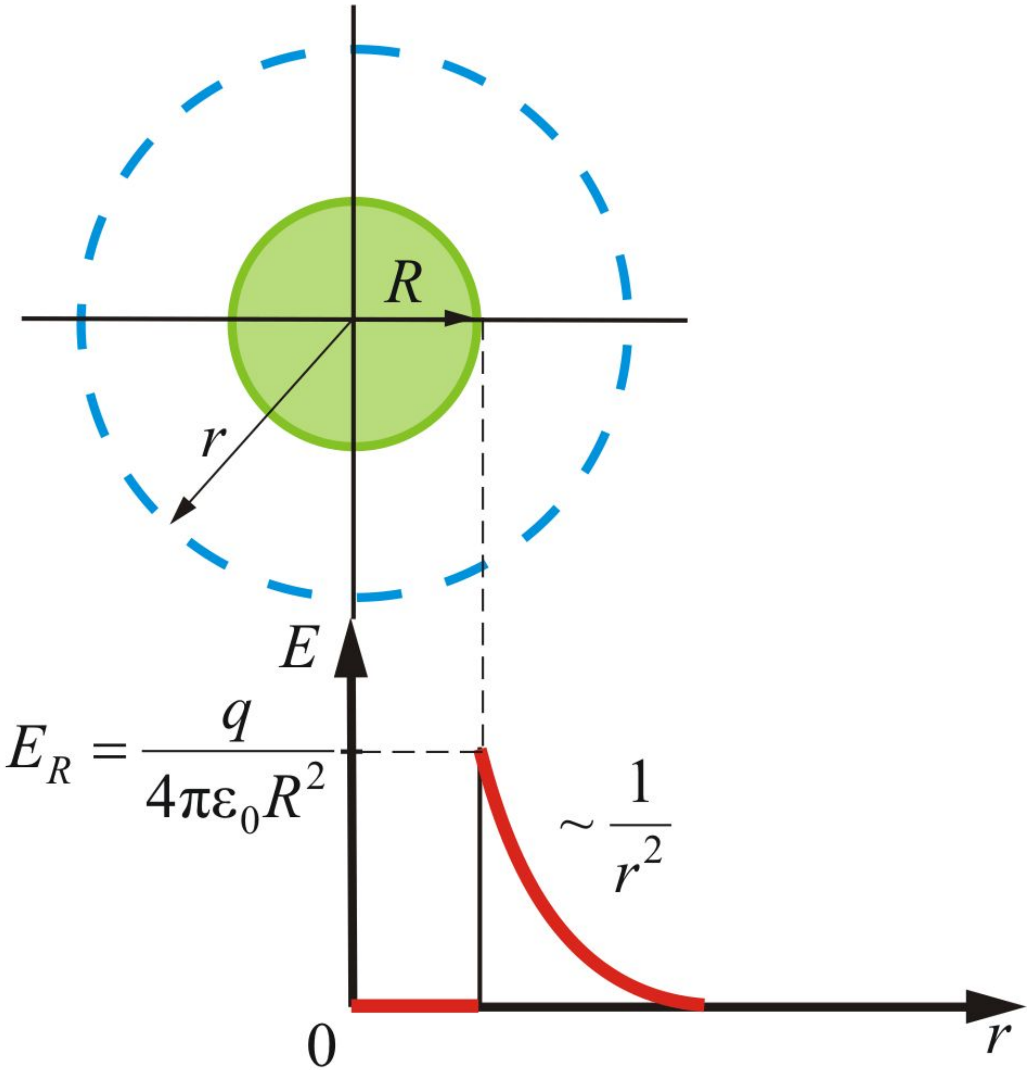
откуда ***поле вне сферы***:

$$\boxed{E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.} \qquad (4.6)$$

Внутри сферы, при $\boxed{r < R,}$ поле будет равно нулю, т.к. там нет зарядов:

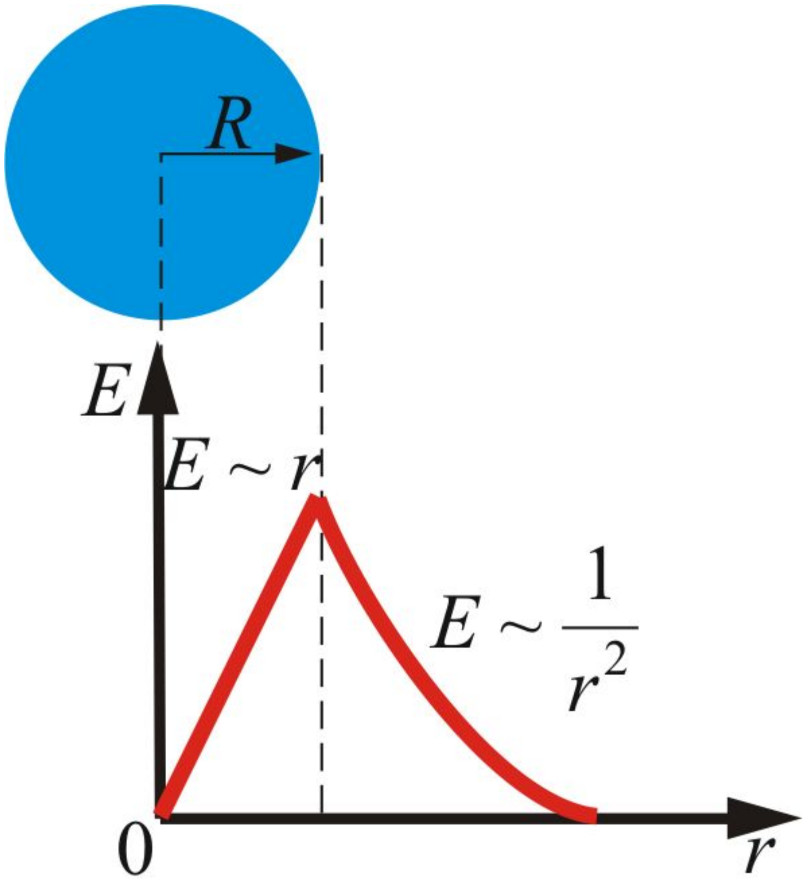
$$\boxed{E(r) = 0.}$$

Как видно, вне сферы поле тождественно полю точечного заряда той же величины, помещенному в центр сферы.



4.6. Поле объемного заряженного шара

Для поля ***вне шара*** радиусом R получается тот же результат, что и для пустотелой сферы, т.е. справедлива формула:



$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Внутри шара при $\boxed{r < R,}$ сферическая поверхность будет содержать в себе заряд, равный

$$\boxed{q = \rho \frac{4}{3} \pi r^3,}$$

где ρ – объемная плотность заряда, $\boxed{\rho = \frac{q}{V},}$

объем шара - $\boxed{V = \frac{4}{3} \pi r^3}$

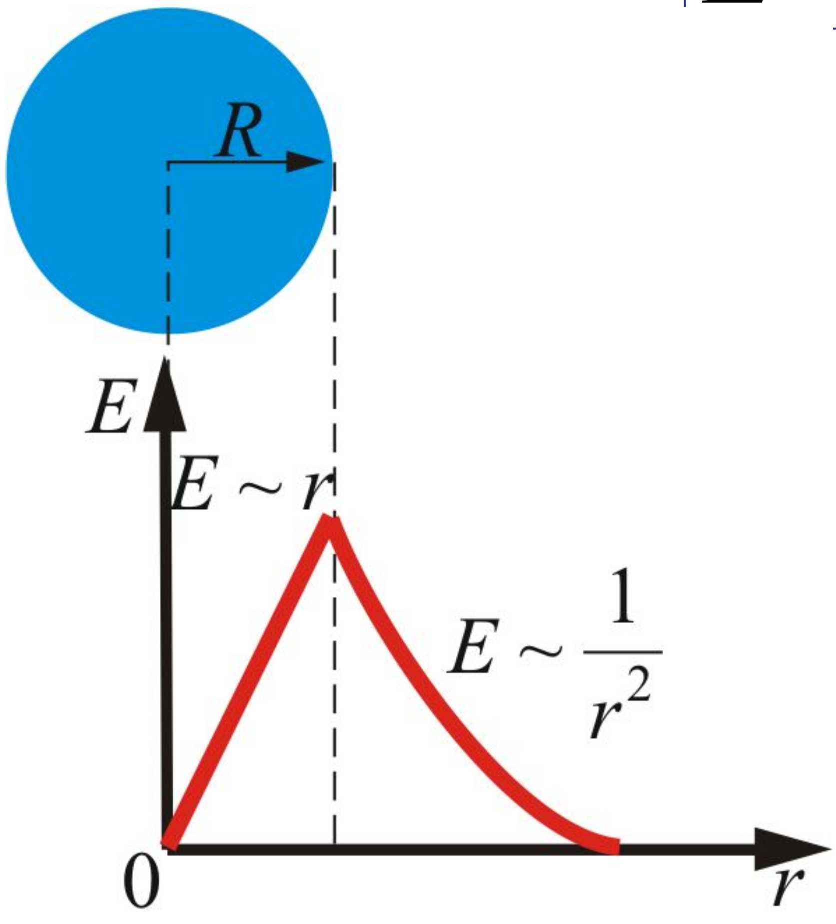
Тогда по теореме Остроградского-Гаусса запишем

$$\boxed{\Phi_E = E(r) S = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3}$$

Т.о., ***внутри шара***

$$\boxed{E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0},} \qquad (4.7)$$

внутри шара имеем $\boxed{E \sim r.}$



Таким образом, имеем:
поле объемного заряженного шара

$$E = \begin{cases} \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} - \text{внутри шара}(r < R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \text{на поверхности шара}(r = R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \text{вне шара } (r > R) \end{cases}$$