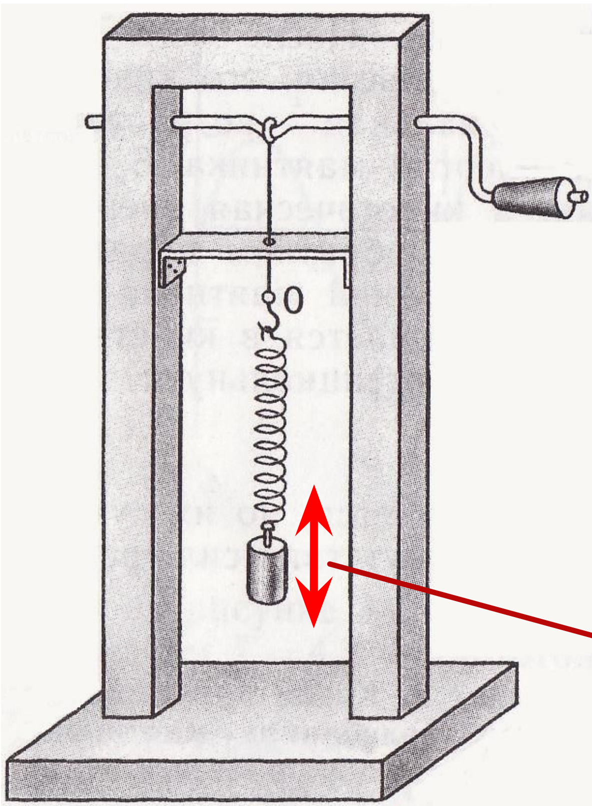
Вынужденные колебания в механической системе.



Ω → Угловая скорость вращения ручки

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = const. \Rightarrow \varphi = \Omega t \Rightarrow 2\pi = \Omega T$$

$$\boxed{\Omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu}$$

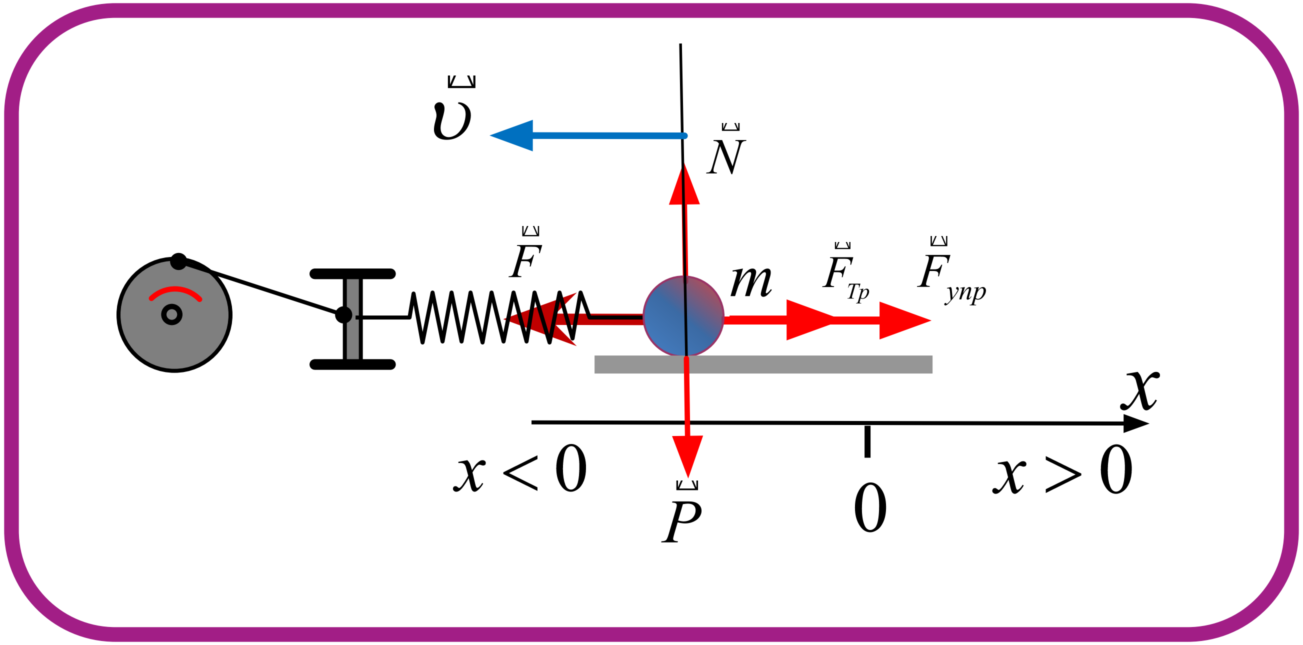
ν → Частота вращения ручки

Ω Циклическая частота колебаний груза

Установившиеся вынужденные колебания в механической системе происходят с частотой вынуждающей силы.

$$\boxed{F = F_0 \cos \Omega t}$$

Математическая модель вынужденных гармонических колебаний в механической системе.



2-ой з-н Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{упр} + \vec{F}_{Тр} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}$$

OX:

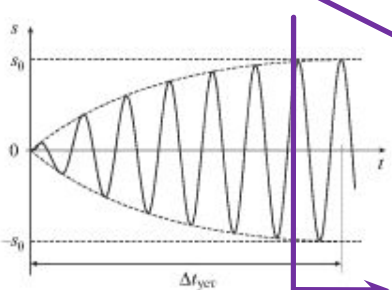
$$m\ddot{x} = -\kappa x - \mu\dot{x} + 0 + 0 + F_0 \cos \Omega t$$

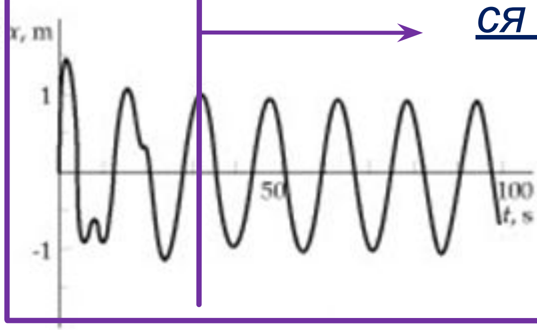
$$m\ddot{x} = -\kappa x - \mu\dot{x} + F_0\cos\Omega t \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{\kappa}{m}x + \frac{\mu}{m}\dot{x} = \frac{F_0}{m}\cos\Omega t$$

$$\boxed{\frac{\kappa}{m} = \omega_0^2} \quad \boxed{\frac{\mu}{m} = 2\alpha} \quad \boxed{\frac{F_0}{m} = f_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\alpha\dot{x} = f_0\cos\Omega t}$$

Неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка, решением которого…

$$x = \underbrace{Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t + \varphi)}_{\xrightarrow{t\to\infty} 0} + a\cos(\Omega t - \Psi)$$





Установившиеся колебания

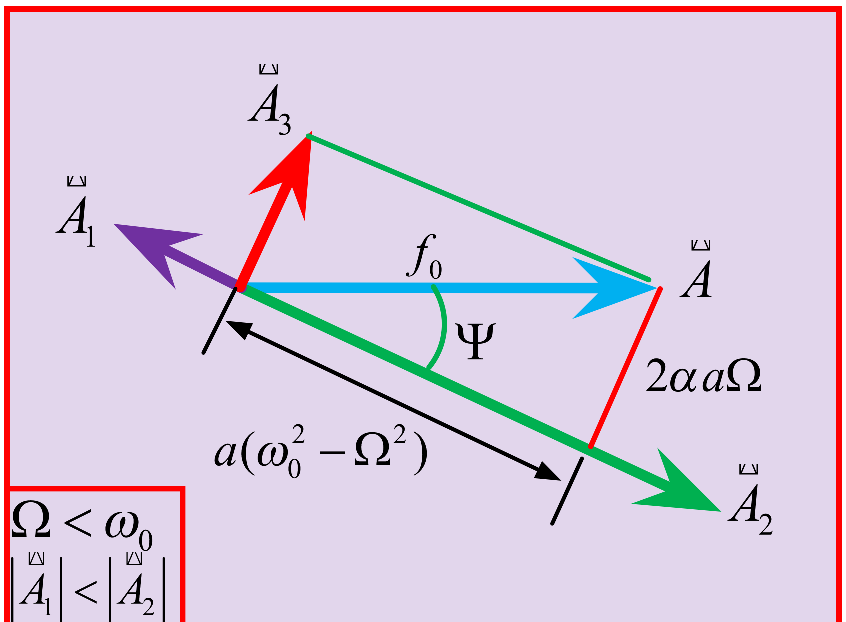
Для установившихся колебаний решение ищем в виде:

$$\boxed{x = \underset{?}{a}\cos(\Omega t - \underset{?}{\Psi})}$$

$$x = a\cos(\Omega t - \Psi)$$
$$\dot{x} = -a\Omega\sin(\Omega t - \Psi) = a\Omega\cos(\Omega t - \Psi + \frac{\pi}{2})$$
$$\ddot{x} = -a\Omega^2\cos(\Omega t - \Psi) = a\Omega^2\cos(\Omega t - \Psi + \pi)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\alpha\dot{x} = f_0\cos\Omega t$$

$$\underbrace{a\Omega^2\cos(\Omega t - \Psi + \pi)}_{\vec{A}_1} + \underbrace{a\omega_0^2\cos(\Omega t - \Psi)}_{\vec{A}_2} + \underbrace{2\alpha a\Omega\cos(\Omega t - \Psi + \frac{\pi}{2})}_{\vec{A}_3} = \underbrace{f_0\cos\Omega t}_{\vec{A}}$$

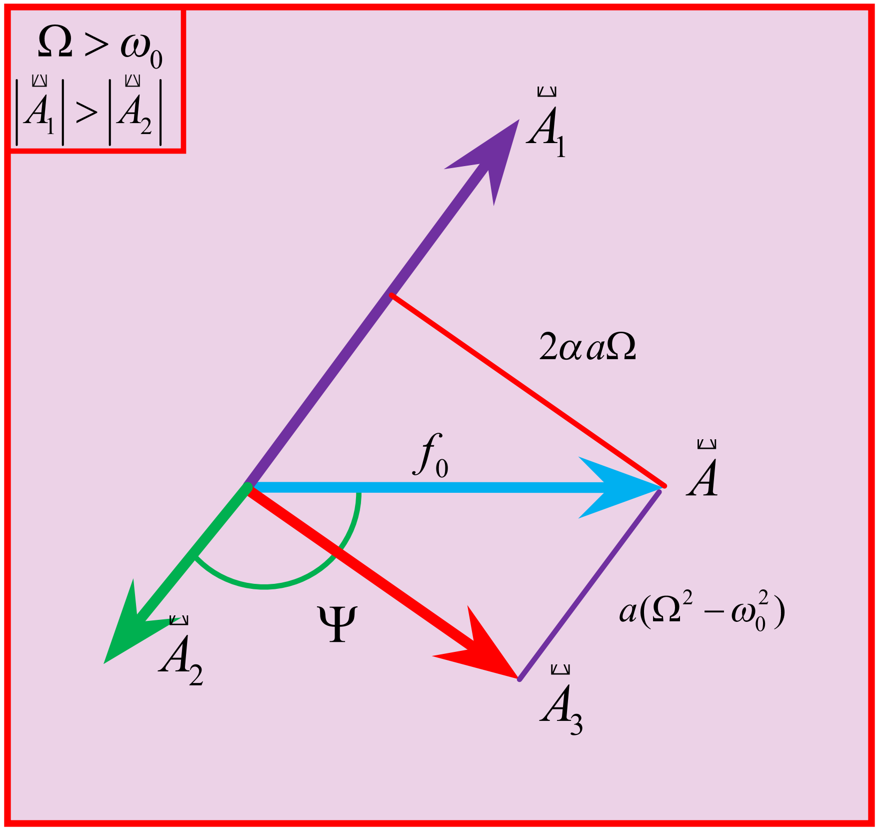


$$\Rightarrow \quad a^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\alpha^2 a^2\Omega^2 = f_0^2$$

$$\Downarrow$$

$$a = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\alpha^2\Omega^2}}$$

$$\Rightarrow \quad tg\Psi = \frac{2\alpha\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$



$$a^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\alpha^2 a^2 \Omega^2 = f_0^2$$

$$a = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\alpha^2\Omega^2}}$$

$$tg\Psi = \frac{2\alpha\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Зависимость амплитуды и фазы вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы. Явление резонанса.

$$\boxed{a=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\alpha^2\Omega^2}}=\frac{f_0}{\sqrt{R}}}$$

1. $\Omega=0 \longrightarrow a=\dfrac{f_0}{\omega_0^2}=\dfrac{F_0\cancel{m}}{\cancel{m}\kappa}=\dfrac{F_0}{\kappa}$

2. $\Omega\to\infty \longrightarrow a\to 0$

Стат…

3. $extr.\,a=\dfrac{f_0}{\sqrt{R}}\Rightarrow extr.\,R=(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\alpha^2\Omega^2$

$$\frac{dR}{d\Omega}=2(\omega_0^2-\Omega^2)(-2\Omega)+8\alpha^2\Omega \Rightarrow \left.\frac{dR}{d\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_p}=2(\omega_0^2-\Omega_p^2)(-2\Omega_p)+8\alpha^2\Omega_p=0$$

$$\Omega_p^2-\omega_0^2+2\alpha^2=0$$

$$\Downarrow$$

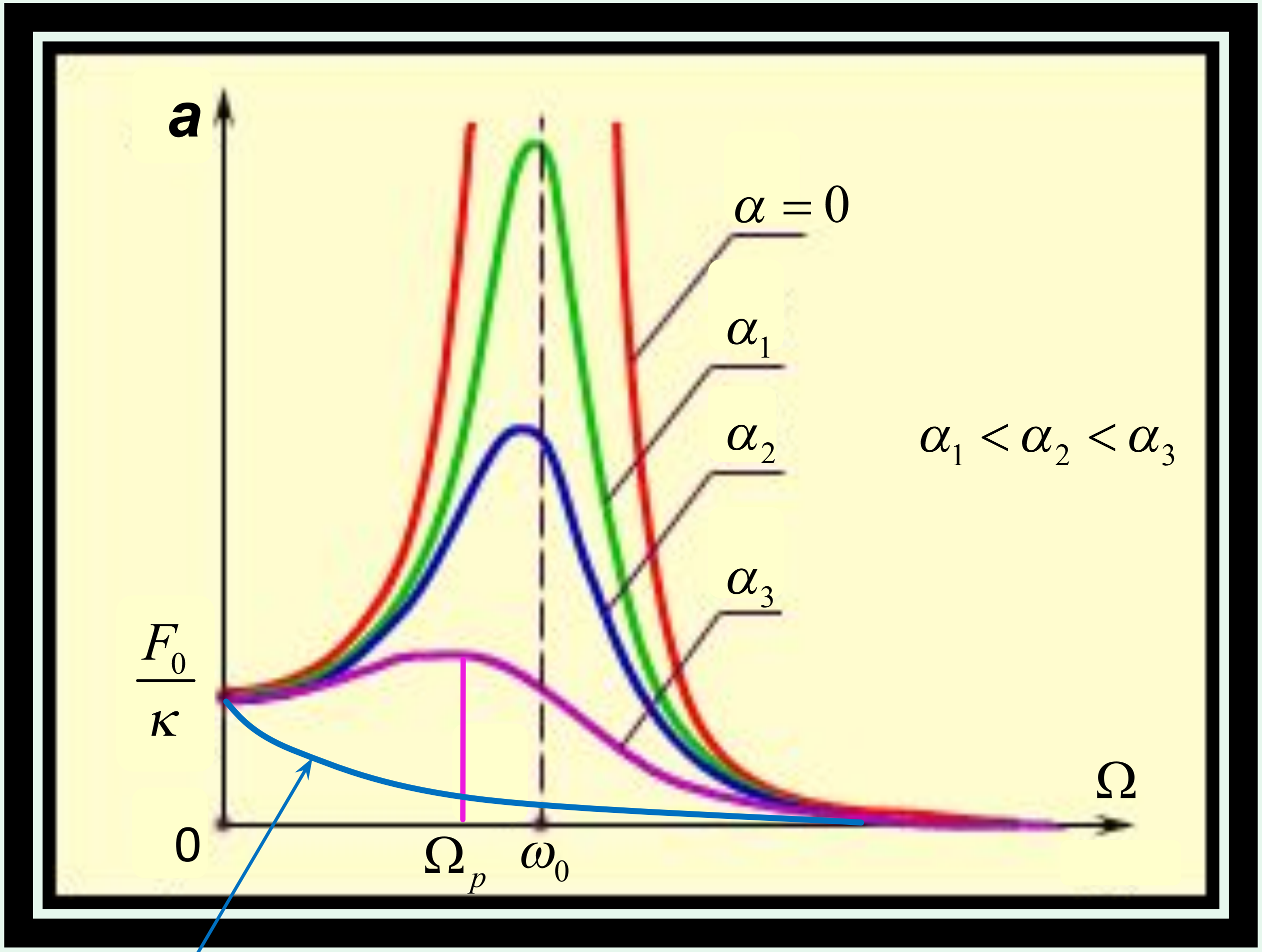
Резонансная циклическая частота вынужденных колебаний $\longrightarrow$

$$\boxed{\Omega_p=\sqrt{\omega_0^2-2\alpha^2}}$$

Можно показать: $\longrightarrow$ $\dfrac{d^2R}{d\Omega^2}=8\Omega_p^2>0$

$$\boxed{\Omega=\Omega_p\Rightarrow \min R\Rightarrow \max a}$$

Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы Ω к собственной частоте ω_0 системы называется резонансом.



$$\alpha = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$

$$\mu = \sqrt{2m\kappa}$$

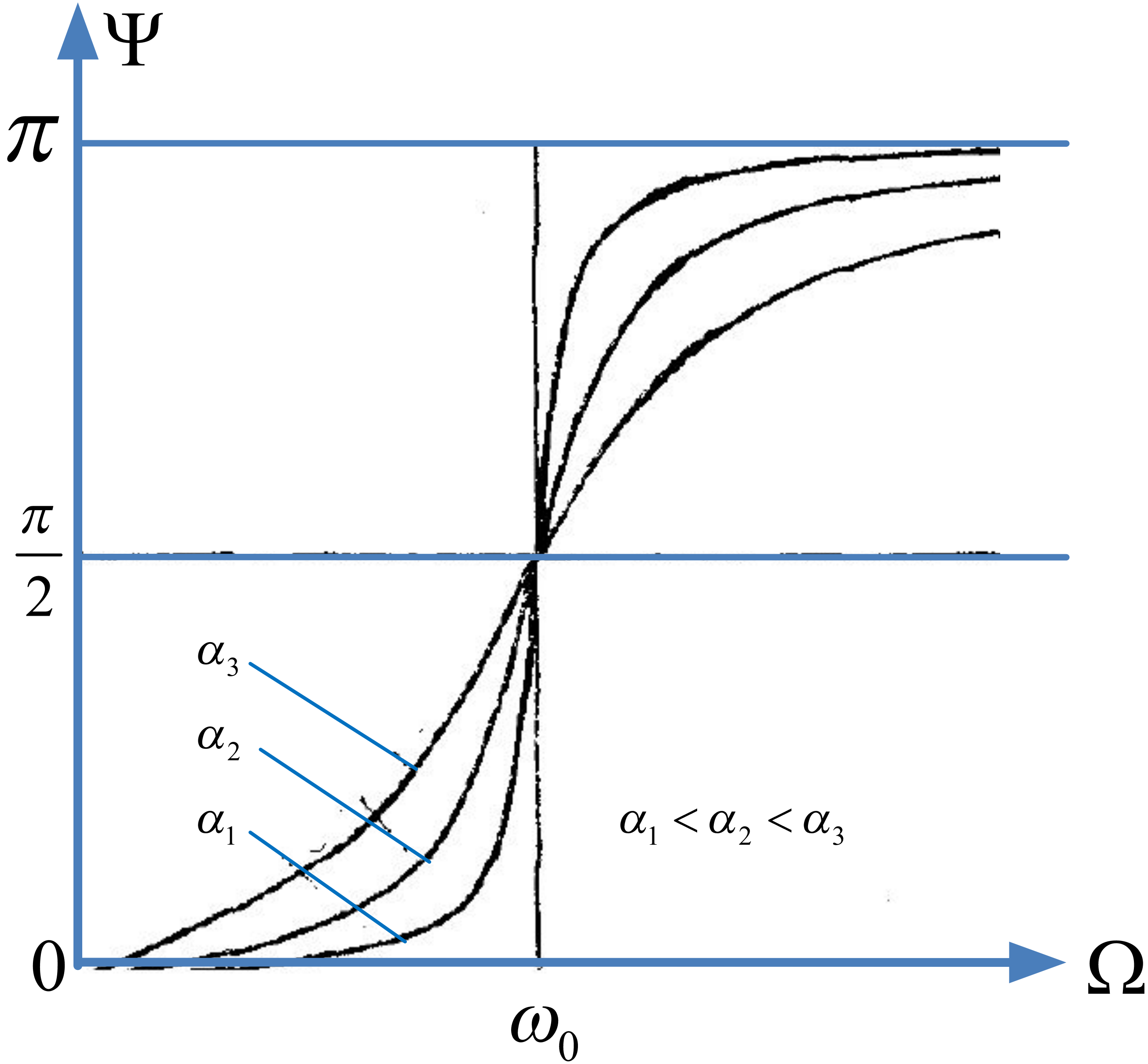
$$\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}$$

$$2\alpha^2 \le \omega_0^2 \; (\alpha \le \frac{\omega_0}{\sqrt{2}})$$

$$\textit{когда} \quad \alpha = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}, \Omega_p = 0$$

$$a = \frac{f_0}{\sqrt{\omega_0^4 + \Omega^4}} \qquad a \sim \frac{1}{\Omega^2}$$

Резонанса - нет

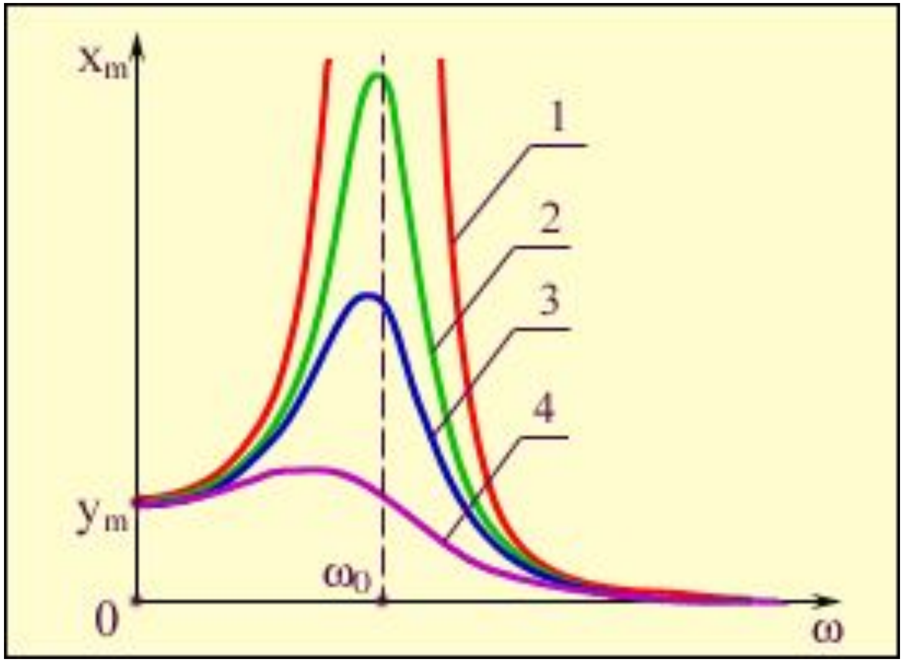


$$tg\Psi = \frac{2\alpha\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$\Omega = 0 \longrightarrow \Psi = 0$

$\Omega = \omega_0 \longrightarrow \Psi = \frac{\pi}{2}$

$\Omega \to \infty \longrightarrow \Psi \to \pi$



x_m
1
2
3
4
y_m
ω_0
0
ω