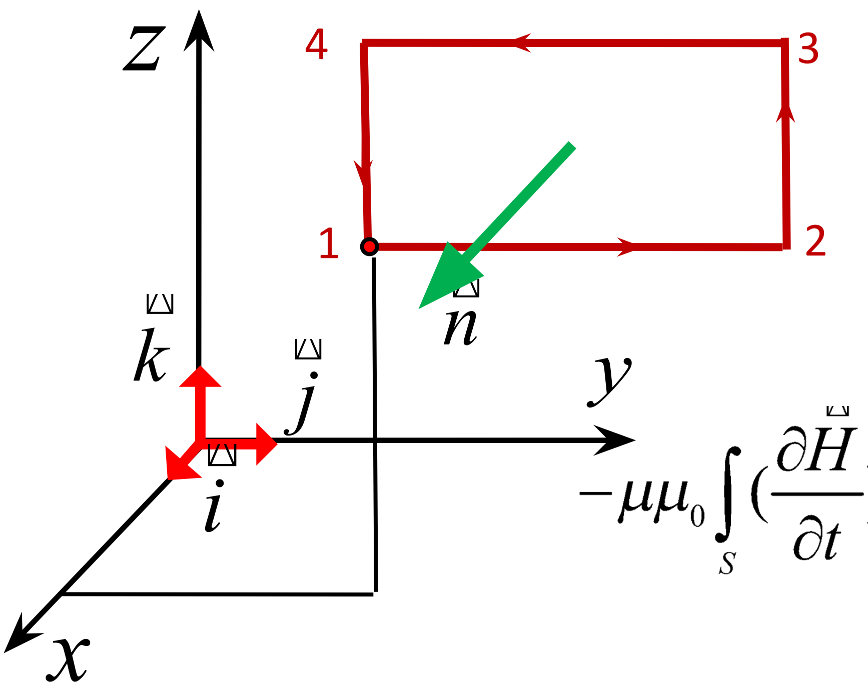
1 – ое уравнение Максвелла в дифференциальной форме

$$\mathbf{1.}\quad \oint_l E_l dl = -\mu\mu_0 \int_S \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right)_n dS$$

Преобразуем 1-е ур-ие М. так, чтобы **E** и **H** относились к одной и той же точке пр-ва. Для этого применим его к дифф-но малой площадке **dS**, ограниченной прямоугольным контуром, ориентированным (см.рис.)…



$$(\ell): 1 \to 2 \to 3 \to 4$$

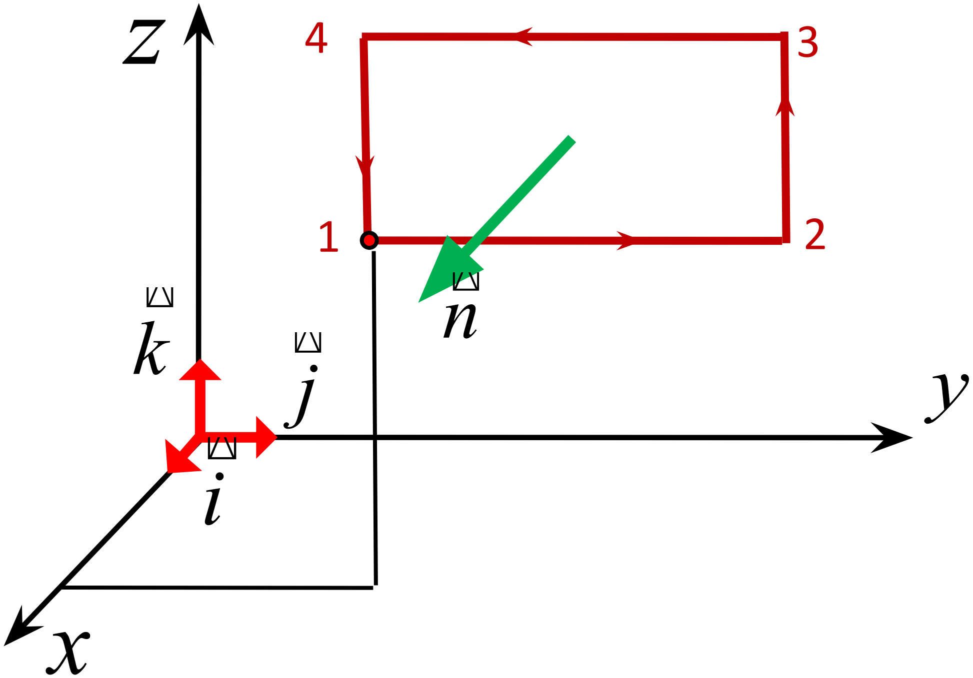
$$dS = dy \cdot dz \longrightarrow \vec{n} \longleftarrow \text{(п.п.в.)}$$

Преобразование правой части ур-я М.

$$-\mu\mu_0 \int_S \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right)_n dS = -\mu\mu_0 \int_S \frac{\partial (\vec{H}\vec{n})}{\partial t} dS = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S H_n dS$$

$$\boxed{-\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} dydz}$$

H_x - усредненное значение по поверхности dS



Преобразование **левой** части ур-я М.

В точке 1 $\longrightarrow$ $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$

$$1 \to 2 \quad E_l = E_y \qquad dl = dy$$

$$2 \to 3 \quad E_l = E_z + \frac{\partial E_z}{\partial y} dy \qquad dl = dz$$

$$3 \to 4 \quad E_l = E_y + \frac{\partial E_y}{\partial z} dz \qquad dl = -dy$$

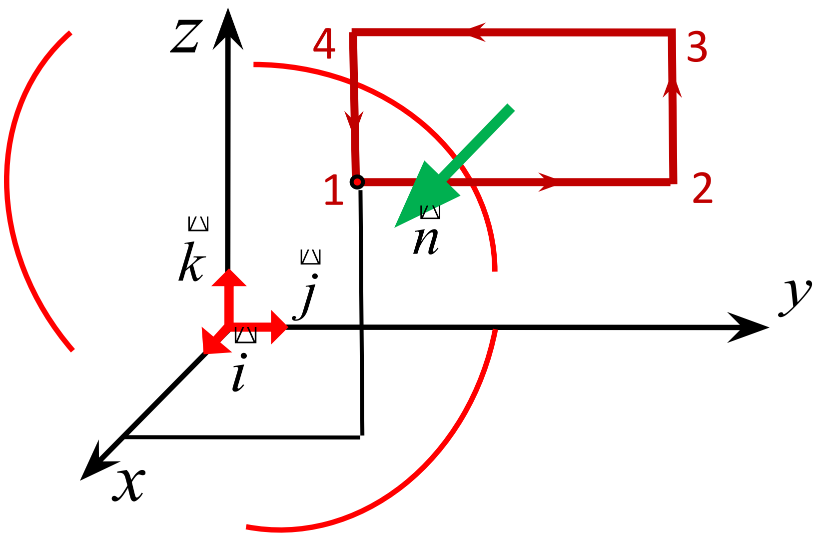
$$4 \to 1 \quad E_l = E_z \qquad dl = -dz$$

$$\oint_l E_l dl = E_y dy + (E_z + \frac{\partial E_z}{\partial y} dy) dz - (E_y + \frac{\partial E_y}{\partial z} dz) dy - E_z dz$$

$$\boxed{\oint_l E_l dl = (\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}) dy dz}$$

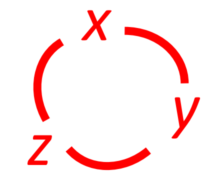
Соединим левую и правую части:

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)dydz=-\mu\mu_0\frac{\partial H_x}{\partial t}dydz \Rightarrow \boxed{\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\mu\mu_0\frac{\partial H_x}{\partial t}}$$



Свойства среды не зависят от выбора направления осей…

Циклическая перестановка: (поворот осей)



$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\mu\mu_0\frac{\partial H_y}{\partial t}}$$

$$\boxed{\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\mu\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial t}}$$

Все три равенства объединим в одно векторное

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{i}=-\mu\mu_0\frac{\partial H_x}{\partial t}\vec{i}$$

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{j}=-\mu\mu_0\frac{\partial H_y}{\partial t}\vec{j}$$

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{k}=-\mu\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial t}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{rot\,\vec{E}=-\mu\mu_0\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}}$$

Аналогично получается 2-ое ур-ие М. в дифференциальной форме:

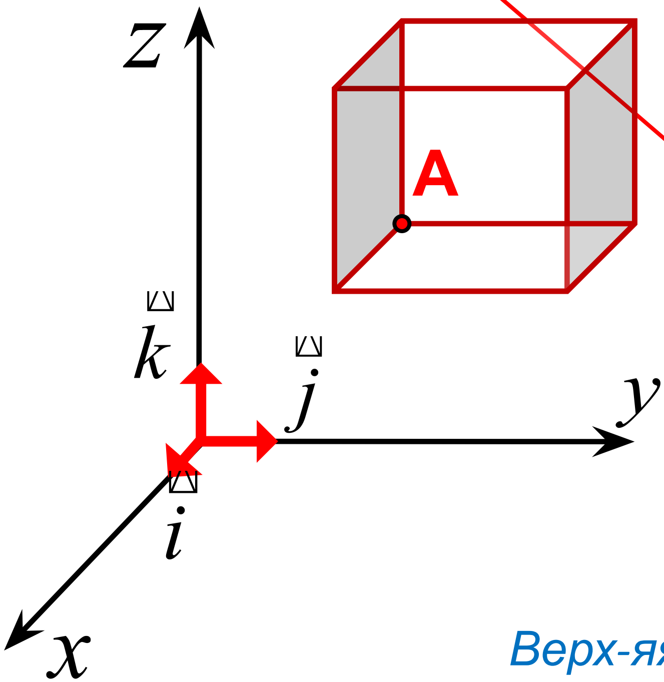
2. $$\oint_l H_l\,dl=\int_S j_n\,dS+\varepsilon\varepsilon_0\int_S\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)_n dS$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{rot\,\vec{H}=\vec{j}+\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

3 - е уравнение Максвелла (теорема Гаусса) в дифференциальной форме

3. $\Phi = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_V \rho dV$

Преобразуем 3-е ур-ие М. так, чтобы **E** ρ и относились к одной и той же точке пр-ва. Для этого применим его к дифф-но малому объему dV в виде параллелепипеда (см.рис.)…



dV = dx dy dz

В точке

A

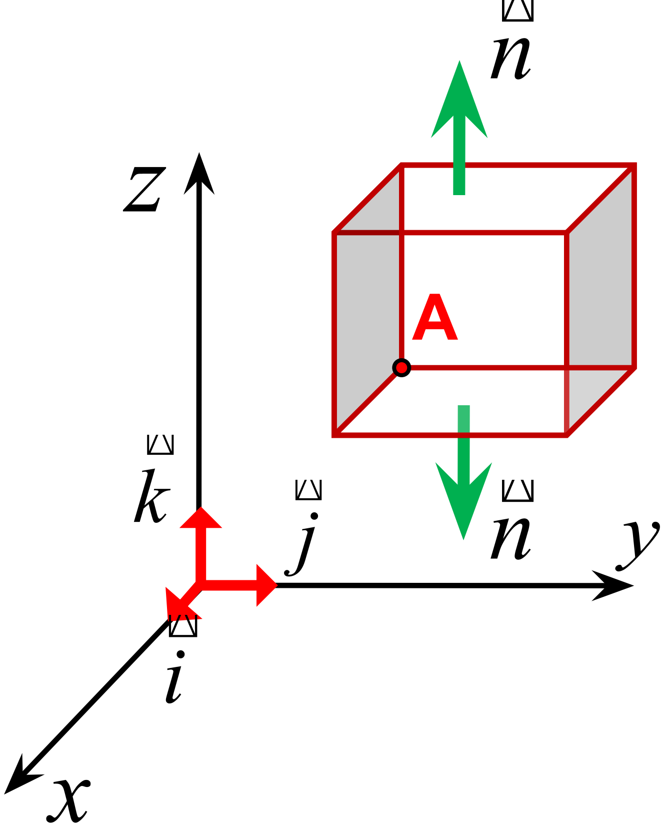
$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$$

$$d\Phi = (d\Phi_{upper} + d\Phi_{lower}) + $$
$$+ (d\Phi_{back} + d\Phi_{front}) + $$
$$+ (d\Phi_{left} + d\Phi_{right})$$

Верх-яя и нижн-яя грани

Задн-яя и перед-яя грани

Левая и правая грани



Вычисление потока через верхнюю и нижнюю грани

$$d\Phi_{lower} = (\vec{E}\,\vec{n})dS = (E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k})\vec{n}dS = 0 + 0 + E_z\vec{k}\vec{n}dS = -E_z dxdy$$

$$d\Phi_{upper} = (E_z + \frac{\partial E_z}{\partial z}dz)dxdy$$

$$\boxed{d\Phi_{upper} + d\Phi_{lower} = \frac{\partial E_z}{\partial z}dxdydz}$$

$$d\Phi_{upper} + d\Phi_{lower} = \frac{\partial E_z}{\partial z} dxdydz$$

$$d\Phi_{back} + d\Phi_{front} = \frac{\partial E_x}{\partial x} dxdydz$$

$$d\Phi_{left} + d\Phi_{right} = \frac{\partial E_y}{\partial y} dxdydz$$

Полный поток: $d\Phi = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) dxdydz$

3. $\Phi = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_V \rho dV$ $\quad$ $\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_V \rho dV \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho dxdydz$

Таким образом,…

3. $\Longrightarrow$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho$$

$$div\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

<u>Аналогично:</u>

4. $\Longrightarrow$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0$$

$$div\vec{H}=0$$

Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме

1 $$rot\ \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

2 $$rot\ \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

3 $$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

4 $$div\vec{H} = 0$$

5 $$\vec{j} = \sigma\vec{E}$$

Нейтральная, непроводящая среда

$$j = 0, \quad \rho = 0.$$

$$rot\ \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$rot\ \vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$div\vec{E} = 0$$

$$div\vec{H} = 0$$