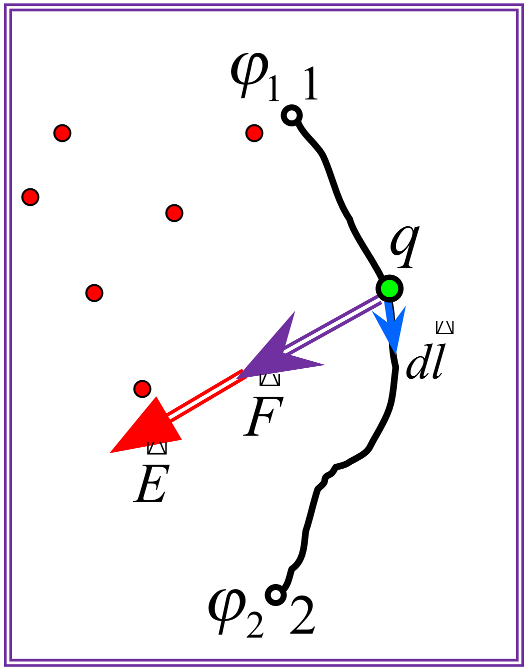
3. Связь между напряженностью электростатического поля и потенциалом.

Рассмотрим перемещение заряда q из точки 1 в точку 2 электростатического поля:



$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{1\to 2}}{q} = \frac{1}{q}\int_1^2 \vec{F}d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = \int_1^2 E_l dl$$

$$\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_l dl}$$

Для замкнутого контура:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow \oint_l E_l dl = 0$$

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля равна нулю.

Из раздела «механика»:

$$\vec{F}_{к.с.} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial W_П}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W_П}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W_П}{\partial z}\vec{k}\right) = -gradW_П \qquad F_l = -\frac{dW_П}{dl}$$

$$\frac{\vec{F}}{q} = \vec{E} = -grad\frac{W_П}{q} = -grad\varphi$$

$$\boxed{\vec{E} = -grad\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)}$$

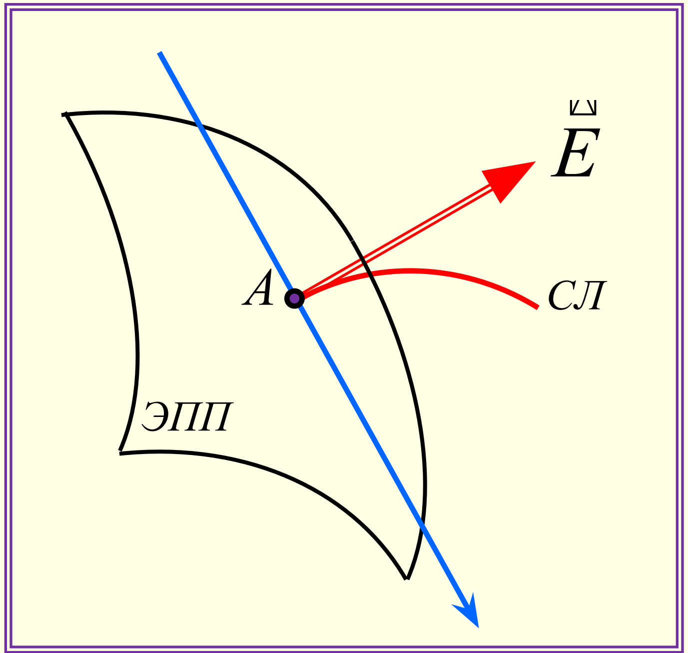
$$\boxed{E_l = -\frac{d\varphi}{dl}}$$

Силовая линия (СЛ) – линия, в каждой точке которой вектор напряженности поля направлен по касательной к этой линии.

Свойства силовых линий:

- начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных;
- не пересекаются.

Эквипотенциальная поверхность (ЭПП) – геометрическое место точек равного потенциала.



Рассмотрим направление, касательное к ЭПП в точке А…

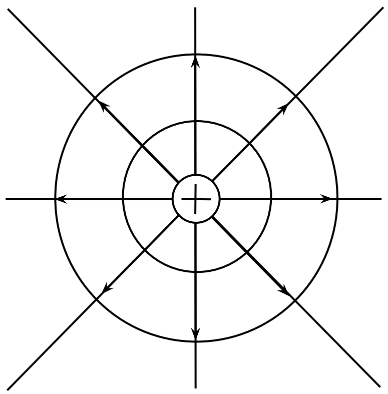
$d\vec{l}$ *– элементарное перемещение вдоль этого направления…*

$$\varphi = const \;\Rightarrow\; \frac{d\varphi}{dl} = 0 \Rightarrow$$

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{l} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ЭПП}$$

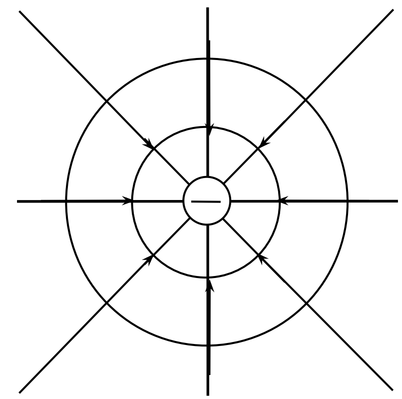
Ортогональность СЛ и ЭПП



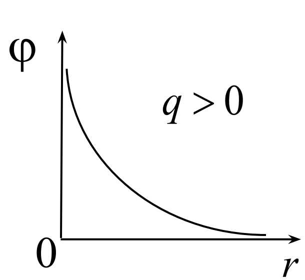
q >0

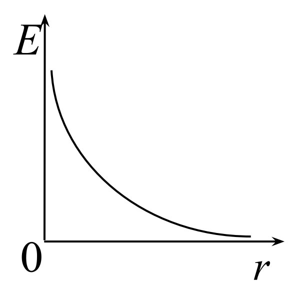
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

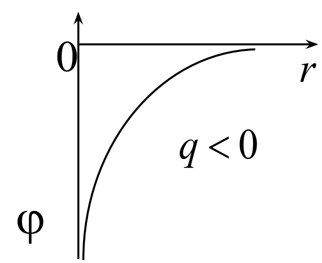
$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



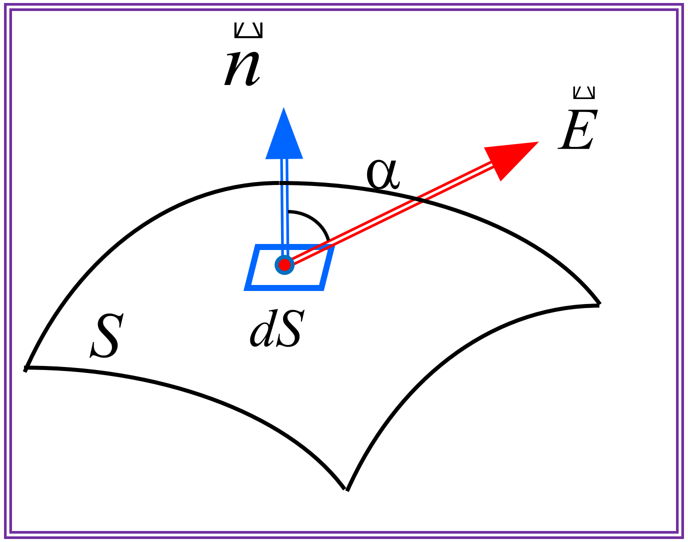
q <0







4. Поток вектора напряженности электрического поля. Теорема Гаусса.



Рассмотрим поверхность (S) произвольной формы в электростатическом поле:

$1.\ S \to dS$

$2.\ dS$ – такая мала, $\vec{E} \to const$.

$3.\ \vec{n} \perp dS, \quad |\vec{n}| = 1$

Элементарный поток вектора $\vec{E}$ через площадку dS

⇩

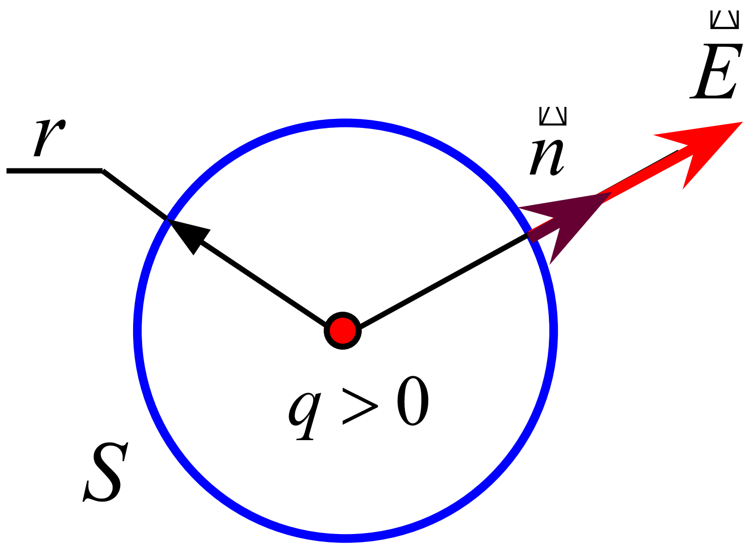
$$\boxed{d\Phi_E = \vec{E}\vec{n}dS = E\cos\alpha dS = E_n dS}$$

Поток $\vec{E}$ через поверхность S

⇩

$$\boxed{\Phi_E = \int_S E_n dS}$$

Рассмотрим поток вектора напряженности электростатического поля через замкнутую сферическую поверхность в случае одного положительного точечного заряда, помещенного в центр сферы.



$$\Phi_E = \oint_S E_n dS$$

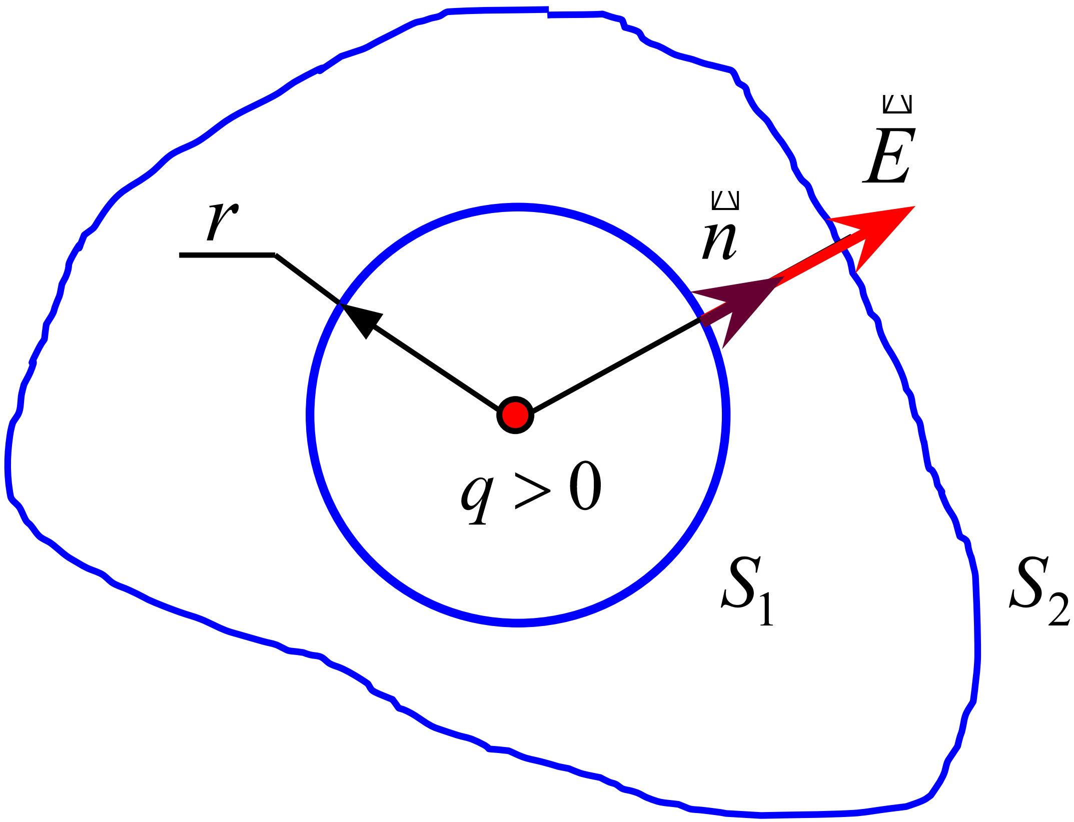
$E_n = E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}$ – одинакова ...

$$\Phi_E = E\oint_S dS = E4\pi r^2$$

$$\Phi_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

Обобщение: независимость величины потока от формы замкнутой поверхности.



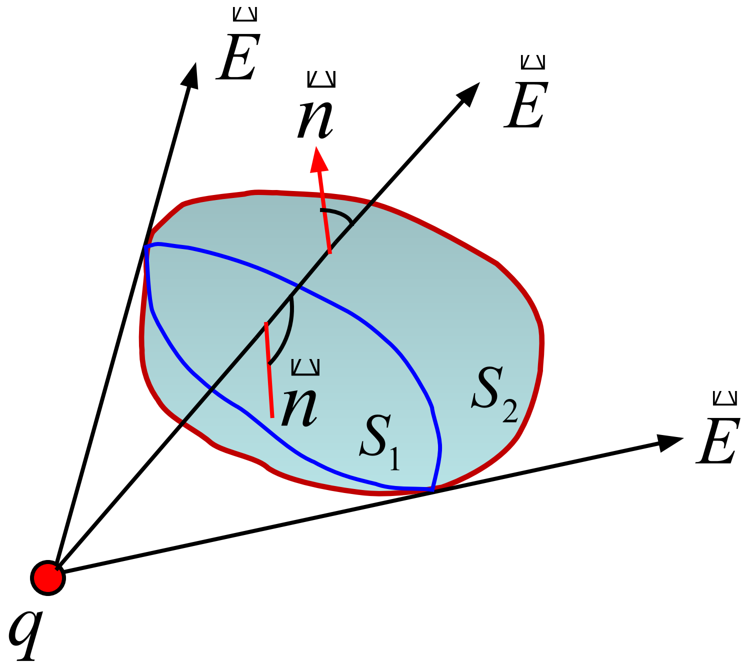
$$\Phi_{E1} - \textit{поток через } S_1$$

$$\Phi_{E2} - \textit{поток через } S_2$$

$$\Phi_{E1} = \Phi_{E2} = \Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

Заряд вне замкнутой поверхности



Φ_{E1} – *поток через* S_1

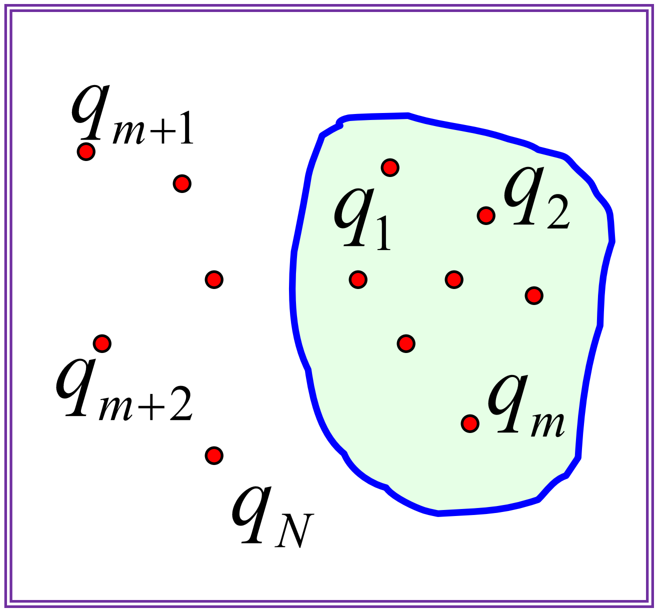
Φ_{E2} – *поток через* S_2

Φ_E – *суммарный поток*

$$\Phi_{E2} = -\Phi_{E1}$$

$$\boxed{\Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} = 0}$$

Теорема Гаусса: Поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на электрическую постоянную (в вакууме).



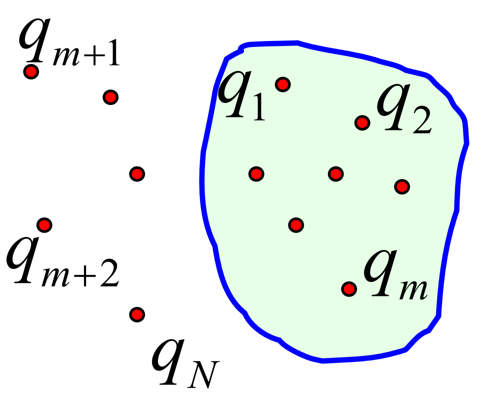
Обозначения:

внутри S – $q_1, q_2 \ldots q_m$

вне S – $q_{m+1}, q_{m+2} \ldots q_N$

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{m} q_i$$

Доказательство теоремы Гаусса:



$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \vec{E}\vec{n}dS$$

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$$

$$\Phi_E = \oint_S \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i\right)\vec{n}dS = \sum_{i=1}^{m} \oint_S \vec{E}_i\vec{n}dS + \sum_{i=m+1}^{N} \oint_S \vec{E}_i\vec{n}dS = \sum_{i=1}^{m} \frac{q_i}{\varepsilon_0} + 0 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{m} q_i$$

$$\boxed{\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{m} q_i}$$