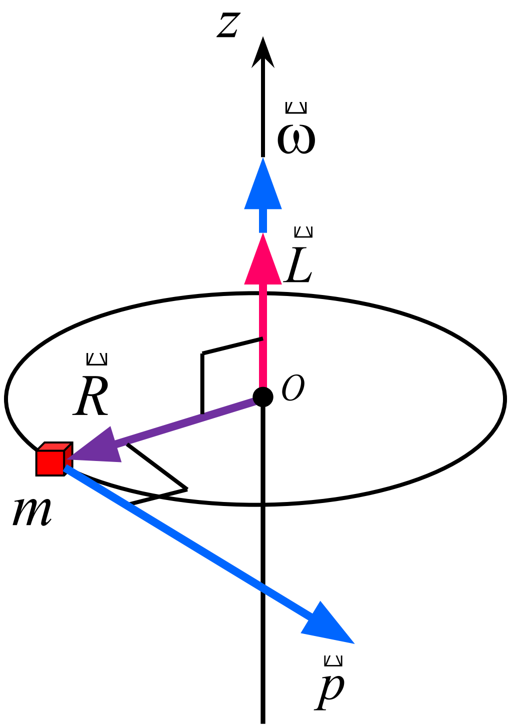
9. Момент инерции материальной точки, абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси. Теорема Штейнера.



Вычислим момент импульса ***материальной точки*** относительно неподвижной оси *Z*, при движении по окружности радиуса *R* в плоскости, перпендикулярной оси *Z*. Пусть точка О лежит на оси *Z*.

$m - \ldots$

$\vec{p} - \ldots$

$\vec{\omega} - \ldots$

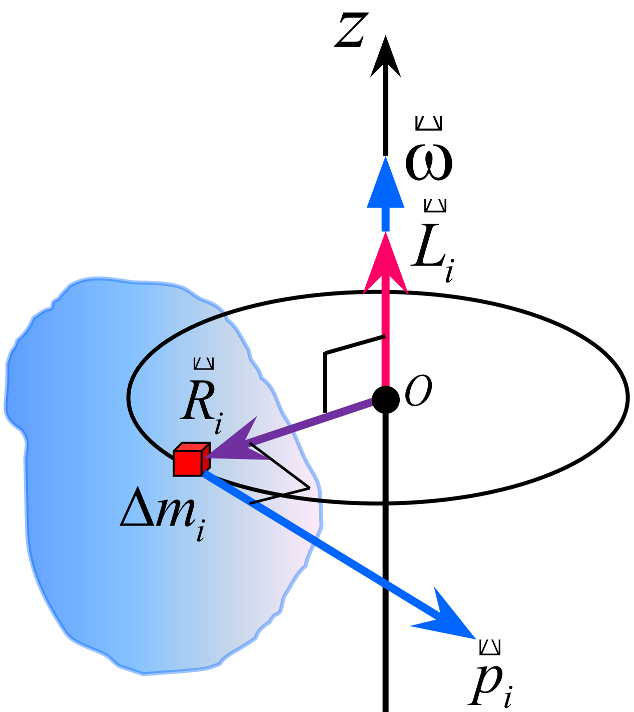
$$\vec{L} = [\vec{R} \times \vec{p}] \Rightarrow L = L_z = Rp\sin\frac{\pi}{2} = Rm\upsilon = Rm\omega R = mR^2\omega = I_z\omega$$

Момент инерции материальной точки относительно оси Z $I_z = mR^2$

$$L_z = I_z\omega$$

Вычислим момент импульса ***<u>абсолютно твердого тела,</u>*** вращающегося относительно неподвижной оси *Z*.

А. тв. тело – система материальных точек.



Δm_i – …

$\vec{p}_i$ – …

R_i – …

$L_{zi} = \Delta m_i R_i^2$

$\vec{\omega}$ – …

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} L_{zi} = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i R_i^2 \omega = \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i R_i^2\right)\omega = I_z \omega$$

<u>Момент инерции абсолютно твердого тела относительно оси Z</u>

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i R_i^2$$

$$\vec{L}_z = I_z \vec{\omega}$$

Момент инерции абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси вращения.

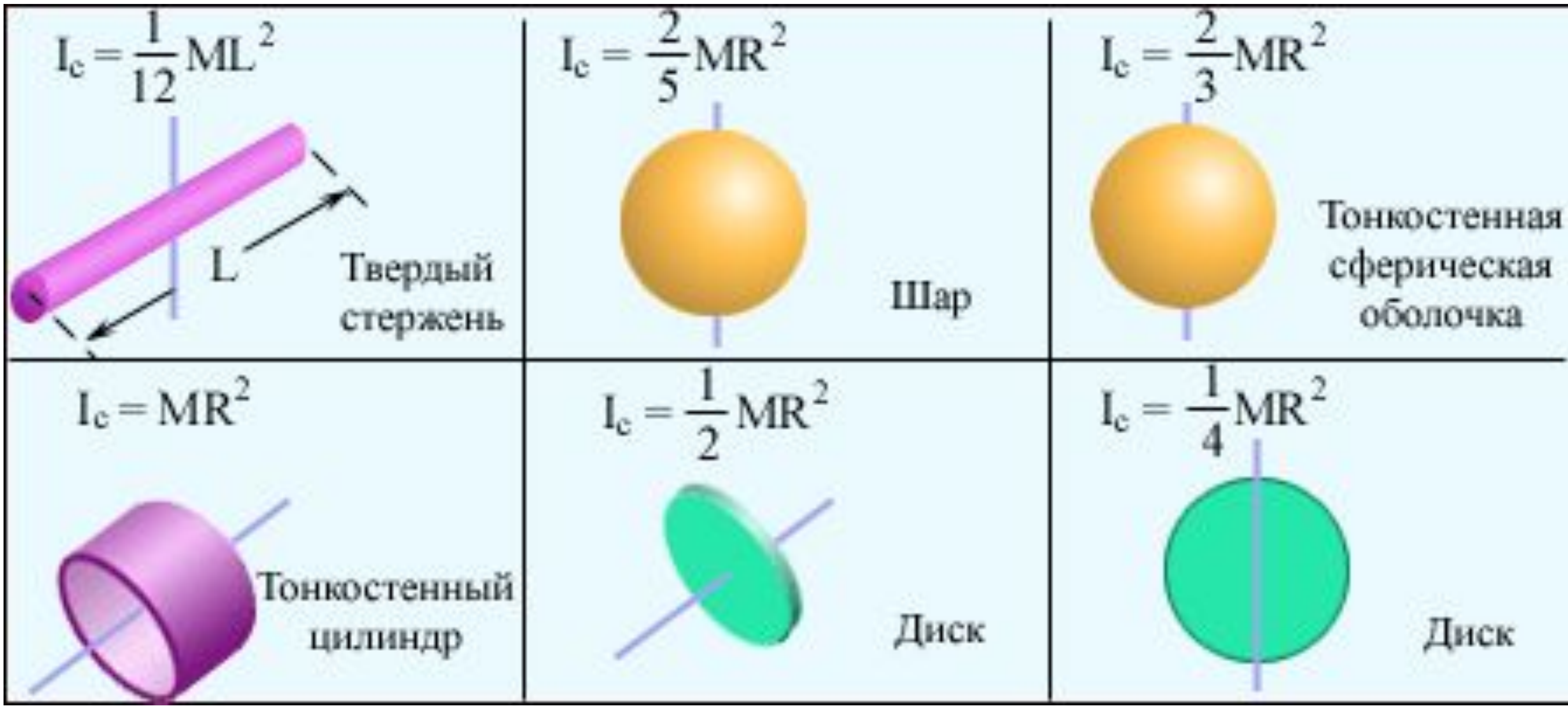
$$I_z = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i R_i^2$$

Зависит от:

1.величины Δm_i ;

2.Положения Δm_i;

3.выбора оси вращения.


$I_c = \frac{1}{12} ML^2$
L
Твердый стержень
$I_c = \frac{2}{5} MR^2$
Шар
$I_c = \frac{2}{3} MR^2$
Тонкостенная сферическая оболочка
$I_c = MR^2$
Тонкостенный цилиндр
$I_c = \frac{1}{2} MR^2$
Диск
$I_c = \frac{1}{4} MR^2$
Диск

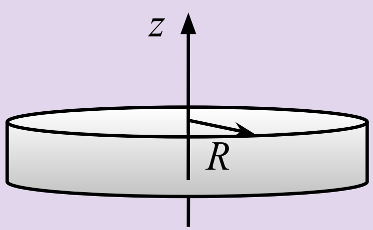
$$\Delta m_i \to dm$$
$$R_i \to r$$

$$dm = \rho \cdot dV$$

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i R_i^2 \Rightarrow I_z = \int_m r^2 dm \Rightarrow I_z = \rho \int_V r^2 dV$$

Момент инерции кольца, полого тонкостенного цилиндра

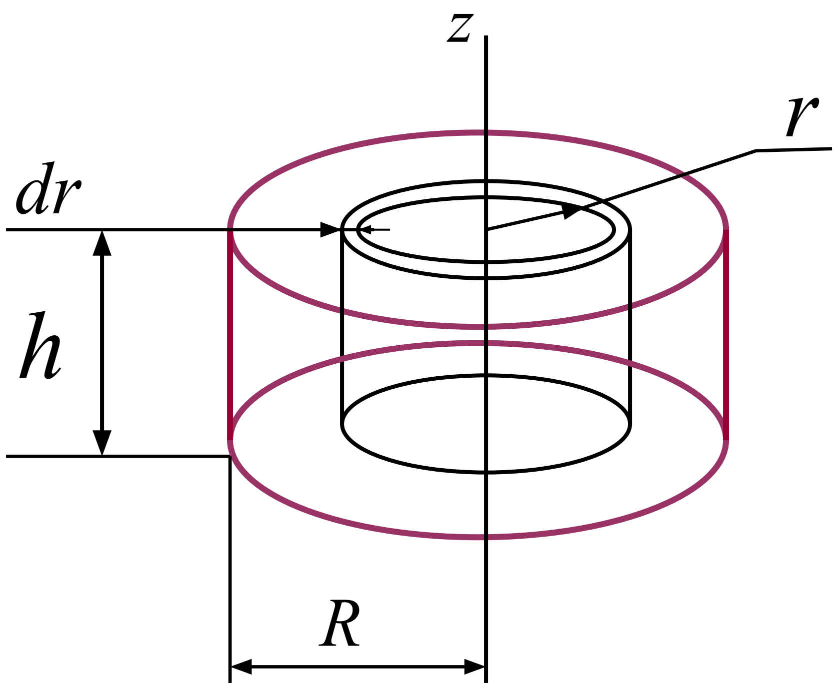
$\rho = const$



$$I_z = R^2 \sum \Delta m_i = R^2 m$$

$$\boxed{I_z = mR^2}$$

Момент инерции диска, сплошного цилиндра.



$\rho = const$

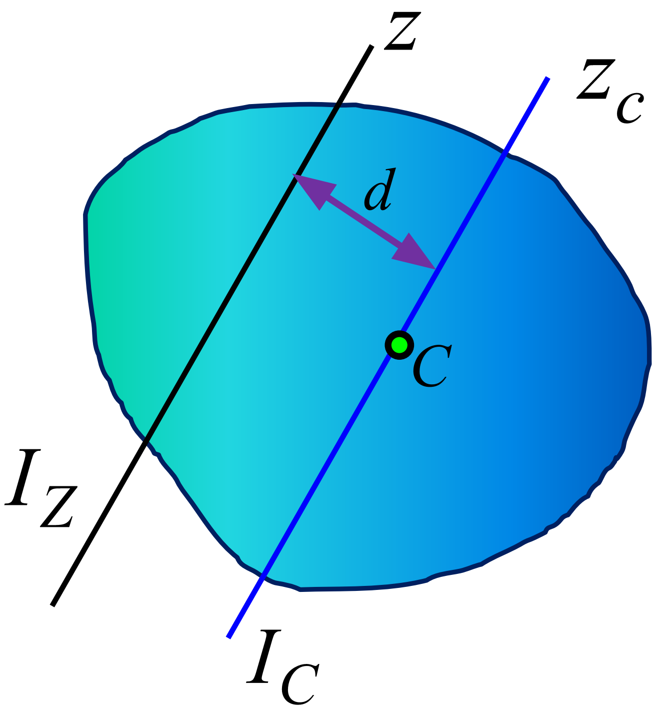
$dV = 2\pi r \cdot h \cdot dr$

$$I_z = \rho\int_0^R r^2(2\pi r \cdot h)dr = \rho \cdot 2\pi \cdot h\int_0^R r^3 dr = 2\pi h\rho \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi h \rho R^4}{2} = \frac{(\pi R^2 \cdot h \cdot \rho) \cdot R^2}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{gathered}\pi R^2 \cdot h = V \\ V \cdot \rho = m\end{gathered}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{I_z = \dfrac{mR^2}{2}}$

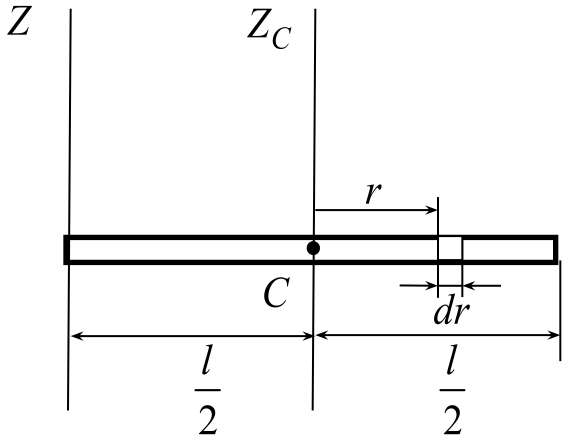
Теорема Штейнера

Момент инерции тела относительно произвольной оси z равен сумме момента инерции этого тела относительно оси z_c, параллельной данной и проходящей через центр масс этого тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.



$$I_Z = I_C + md^2$$

Момент инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через его центр инерции и через его край.



$$dm = \frac{m}{l}dr \qquad dI_C = r^2 dm = \frac{m}{l} r^2 dr$$

$$I_C = 2\int_0^{l/2} dI_C = 2\frac{m}{l}\int_0^{l/2} r^2 dr = 2\frac{m}{l}\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{l/2} = \frac{ml^2}{12}$$

$$\boxed{I_C = \frac{1}{12}ml^2}$$

По теореме Штейнера:

$$I_Z = I_C + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}$$

$$\boxed{I_Z = \frac{1}{3}ml^2}$$

10. Основное уравнение динамики вращательного движения абсолютно твердого тела

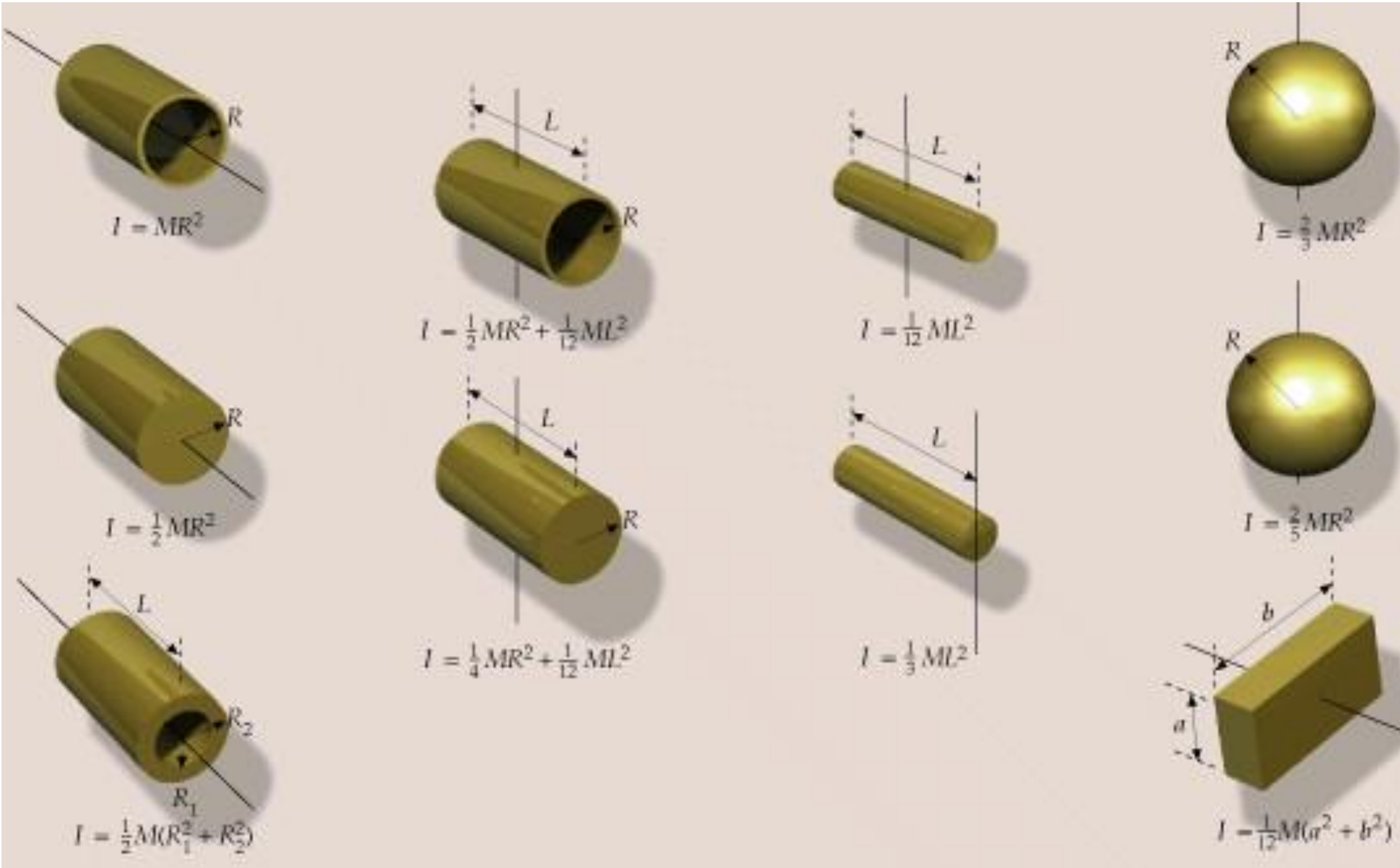
$$\boxed{L_z = I_z\omega} \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = M_z = I_z\frac{d\omega}{dt} = I_z\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon = \frac{M_z}{I_z}}$$

2-ой з-н Ньютона для **вращательного** движения

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}_z}{I_z}}$$

2-ой з-н Ньютона для **поступательного** движения

$$\boxed{\vec{a}_c = \frac{\vec{F}}{m}}$$



R
$I = MR^2$
L
R
$I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$
L
$I = \frac{1}{12}ML^2$
R
$I = \frac{2}{3}MR^2$
R
$I = \frac{1}{2}MR^2$
L
R
$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$
L
$I = \frac{1}{3}ML^2$
R
$I = \frac{2}{5}MR^2$
L
R_2
R_1
$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
b
a
$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$