25. Система уравнений Максвелла в интегральной форме.

1. $$\oint_l E_l dl = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_n dS$$

2. $$\oint_l B_l dl = \mu\mu_0 \int_S j_n dS + \mu\mu_0 \int_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)_n dS$$

3. $$\oint_S D_n dS = \int_V \rho dV$$

4. $$\oint_S B_n dS = 0$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\longrightarrow \quad \vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H} \Rightarrow \vec{E}, \vec{H}$$

Перепишем систему уравнений Максвелла:

$$\oint_l E_l dl = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_n dS$$

$$\oint_l B_l dl = \mu\mu_0 \int_S j_n dS + \mu\mu_0 \int_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)_n dS$$

$$\oint_S D_n dS = \int_V \rho dV$$

$$\oint_S B_n dS = 0$$

1. $$\oint_l E_l dl = -\mu\mu_0 \int_S \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right)_n dS$$

2. $$\oint_l H_l dl = \int_S j_n dS + \varepsilon\varepsilon_0 \int_S \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)_n dS$$

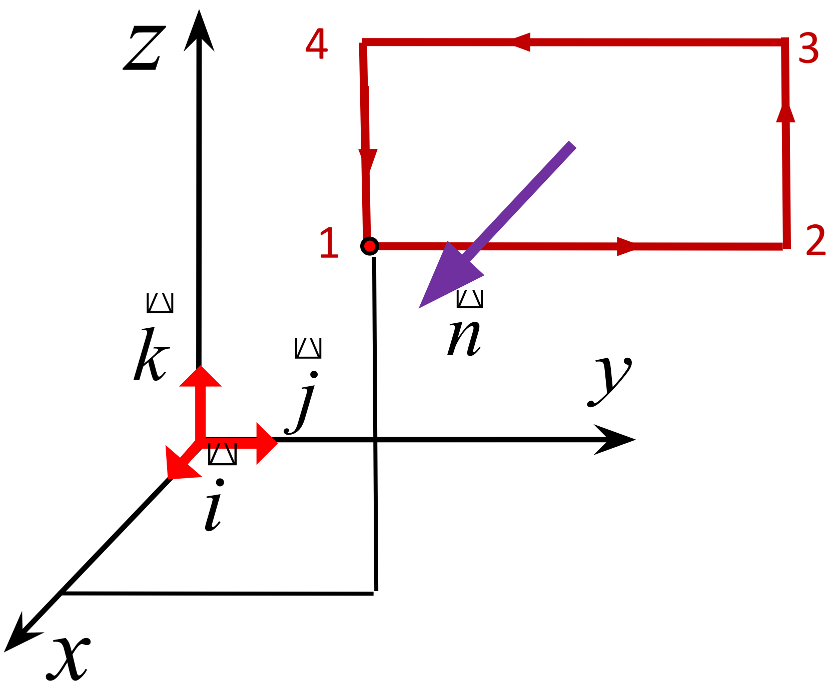
3. $$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

4. $$\oint_S H_n dS = 0$$

26. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

1. $$\oint_l E_l\,dl = -\mu\mu_0 \int_S \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right)_n dS$$

Преобразуем 1-е ур-ие М. так, чтобы ***E*** *и* ***H*** *относились к одной и той же точке пр-ва. Для этого применим его к дифф-но малой площадке* ***dS****, ограниченной прямоугольным контуром* (ℓ)*, ориентированным (см.рис.)…*



$$(\ell): 1 \to 2 \to 3 \to 4$$

$$dS = dy \cdot dz$$

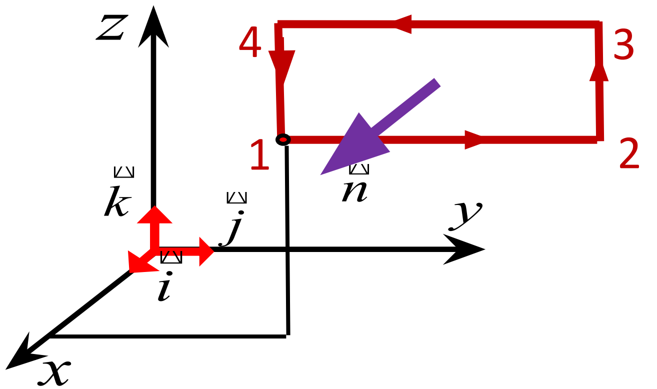
$\vec{n} \longrightarrow$ *(п.п.в.)*

$$\mathbf{1.}\quad \oint_l E_l\,dl = -\mu\mu_0 \int_S \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right)_n dS$$

Преобразование правой части ур-я М.

$$-\mu\mu_0 \int_S \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right)_n dS = -\mu\mu_0 \int_S \frac{\partial (\vec{H}\vec{n})}{\partial t} dS = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S H_n dS = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} dydz$$

H_x - усредненное значение по поверхности dS



$$\textbf{1.}\quad \oint_l E_l dl = -\mu\mu_0 \int_S \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right)_n dS$$

Преобразование левой части ур-я М.

В точке 1 ⟶ $\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$

$1 \to 2\ E_l = E_y \qquad dl = dy$

$2 \to 3\ E_l = E_z + \dfrac{\partial E_z}{\partial y}dy \qquad dl = dz$

$3 \to 4\ E_l = E_y + \dfrac{\partial E_y}{\partial z}dz \qquad dl = -dy$

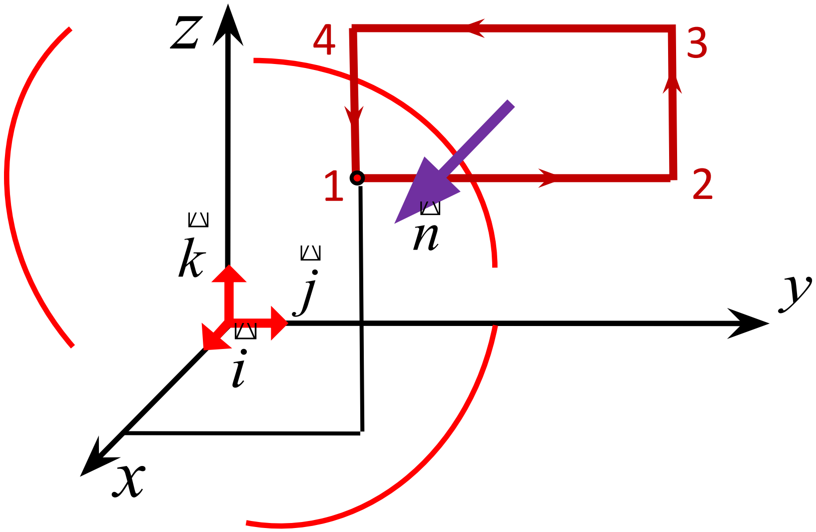
$4 \to 1\ E_l = E_z \qquad dl = -dz$

$$\oint_l E_l dl = E_y dy + \left(E_z + \frac{\partial E_z}{\partial y}dy\right)dz - \left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial z}dz\right)dy - E_z dz = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)dydz$$

Соединим левую и правую части, сократив на dydz:

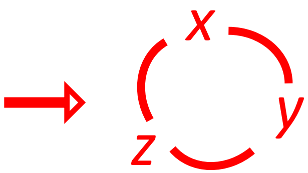
$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) dydz = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} dydz \Rightarrow \boxed{\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}$$



Свойства среды не зависят от выбора направления осей…

Циклическая перестановка: (поворот осей)



$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}}$$

$$\boxed{\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}}$$

Все три равенства объединим в одно векторное

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{i} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}\vec{i}$$

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{j} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}\vec{j}$$

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{k} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}\vec{k}$$

$$\boxed{rot\ \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}}$$

Аналогично получается 2-ое ур-ие М. в дифференциальной форме:

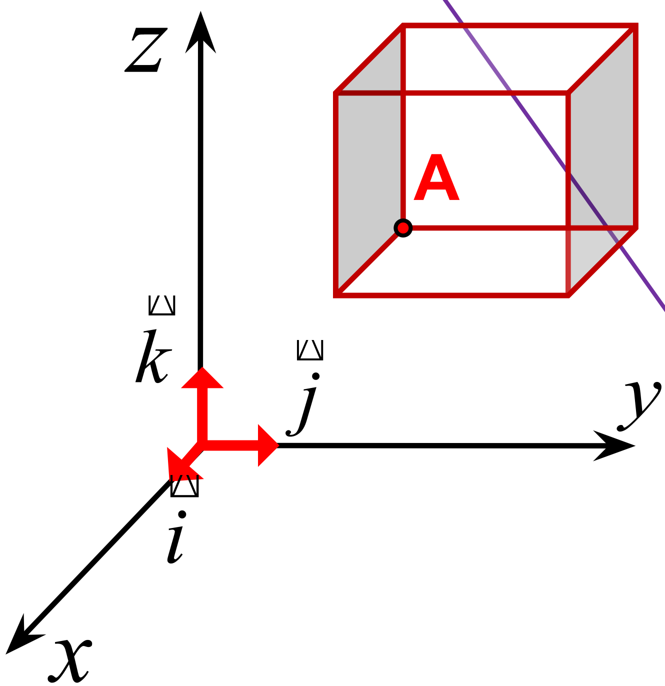
2. $$\oint_l H_l dl = \int_S j_n dS + \varepsilon\varepsilon_0 \int_S \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)_n dS$$

$\Rightarrow$

$$rot\,\vec{H} = \vec{j} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

3. $\Phi = \oint\limits_S E_n dS = \dfrac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int\limits_V \rho dV$

Преобразуем 3-е ур-ие М. так, чтобы ***E*** *и* ρ *относились к одной и той же точке пр-ва. Для этого применим его к дифф-но малому объему* *dV* *в виде параллелепипеда (см.рис.)…*



dV = dx dy dz

В точке **A**

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$$

$$d\Phi = (d\Phi_{верхн.} + d\Phi_{нижн.}) +$$

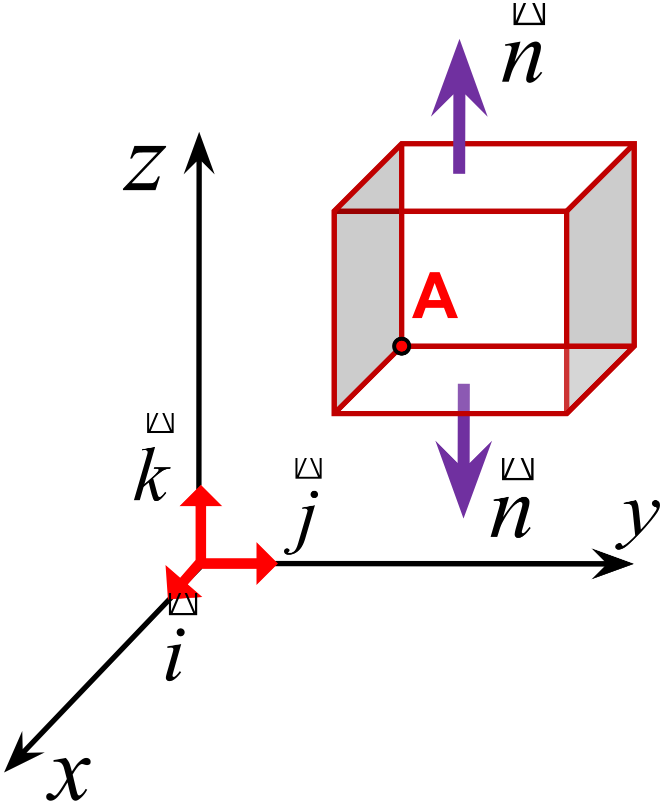
Верхняя и нижняя грани

$$+(d\Phi_{задн.} + d\Phi_{передн.}) +$$

Задняя и передняя грани

$$+(d\Phi_{левая} + d\Phi_{правая})$$

Левая и правая грани



Вычисление потока через верхнюю и нижнюю грани

$$d\Phi_{нижн.} = (\vec{E}\,\vec{n})dS = (E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k})\vec{n}dS = 0 + 0 + E_z\vec{k}\vec{n}dS = -E_z dxdy$$

$$d\Phi_{верхн.} = (E_z + \frac{\partial E_z}{\partial z}dz)dxdy$$

$$\boxed{d\Phi_{верхн.} + d\Phi_{нижн.} = \frac{\partial E_z}{\partial z}dxdydz}$$

$$d\Phi_{верхн.} + d\Phi_{нижн.} = \frac{\partial E_z}{\partial z} dxdydz$$

$$d\Phi_{задн.} + d\Phi_{передн.} = \frac{\partial E_x}{\partial x} dxdydz$$

$$d\Phi_{левая} + d\Phi_{правая} = \frac{\partial E_y}{\partial y} dxdydz$$

<u>Полный поток:</u> ⇨ $$d\Phi = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) dxdydz$$

Преобразование левой части уравнения М. ⇨ $$\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \int_V \rho dV \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \rho dxdydz$$

Таким образом,…

3. ⟹

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho$$

$$div\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

<u>Аналогично:</u>

4. ⟹

$$\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0$$

$$div\vec{H}=0$$

Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме

1 $$rot\,\vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

2 $$rot\,\vec{H} = \vec{j} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

3 $$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

4 $$div\vec{H} = 0$$

5 $$\vec{j} = \sigma\vec{E}$$

Нейтральная, непроводящая среда

$j = 0, \quad \rho = 0.$

$$rot\,\vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$rot\,\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$div\vec{E} = 0$$

$$div\vec{H} = 0$$