Вычислительная геометрия

Лекция 6

Геометрический поиск

Локализация точки

Продолжение

Метод трапеций (Зайделя) позже

Геометрический поиск

- Планарные графы. Планарное прямолинейное подразбиение плоскости
- Представление ППЛГ. Реберный список с двойными связями
- Метод цепей (продолжение)
- Метод детализации триангуляции

Геометрический поиск

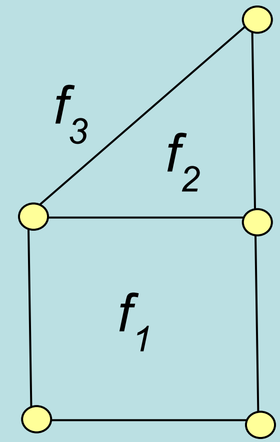
Планарные графы

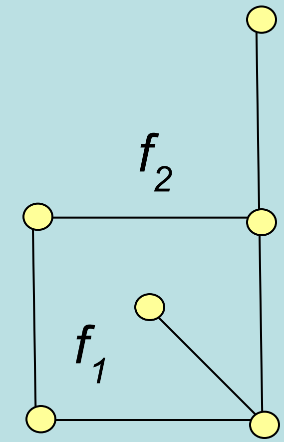
Планарное прямолинейное подразбиение плоскости

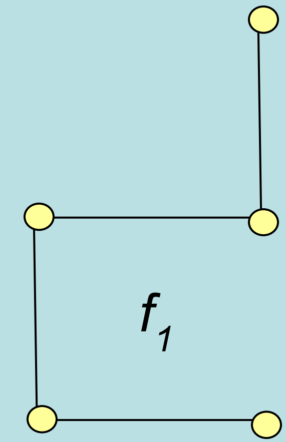
Граф $G = (V, E)$ называется *планарным*, если его можно уложить на плоскости без самопересечений.

Планарное подразбиение или *карта* порождается прямолинейной укладкой ребер планарного графа на плоскости.

$V = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ – вершины,
$E = \{ e_1, e_2, \ldots, e_m \}$ – ребра,
$\{ f_1, f_2, \ldots, f_l \}$ – грани,
n – число вершин,
m – число ребер,
l – число граней







$n = 5 \quad m = 6$
$l = 3$
$5 + 3 = 6 + 2$

$n = 6 \quad m = 6$
$l = 2$
$6 + 2 = 6 + 2$

$n = 5 \quad m = 4$
$l = 1$
$5 + 1 = 4 + 2$

***Формула Эйлера*:**

$$n + l = m + 2$$

Формула Эйлера:

$$n + l = m + 2$$

G – *связный* плоский граф. T – его остовное дерево.

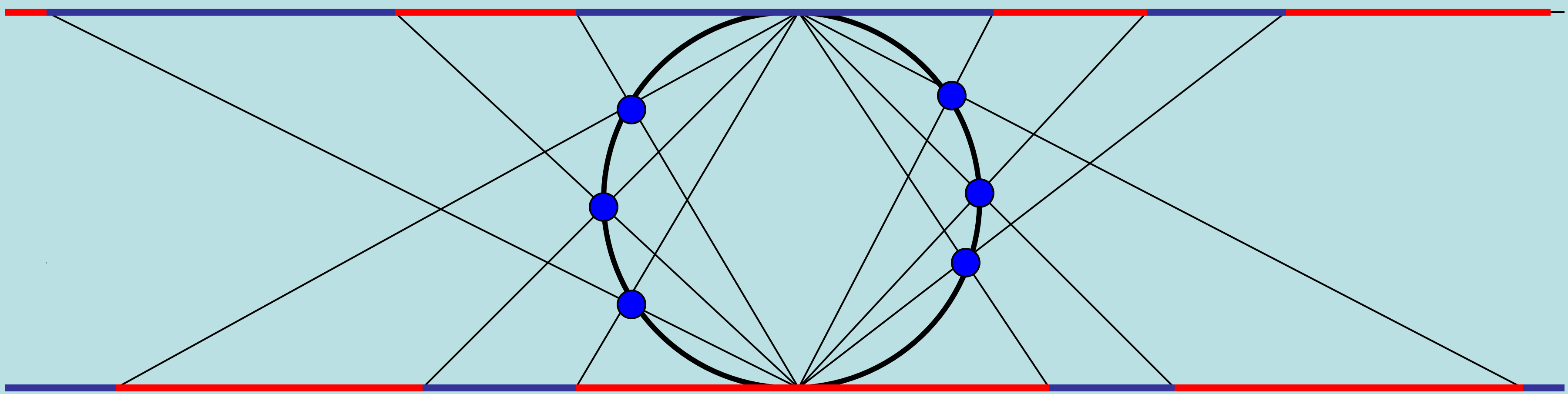
В дереве $m = n - 1$, $l = 1$ и т. о. $n + 1 = (n - 1) + 2$.

Не изменяя n, добавляем к остову ребро → образуется грань,

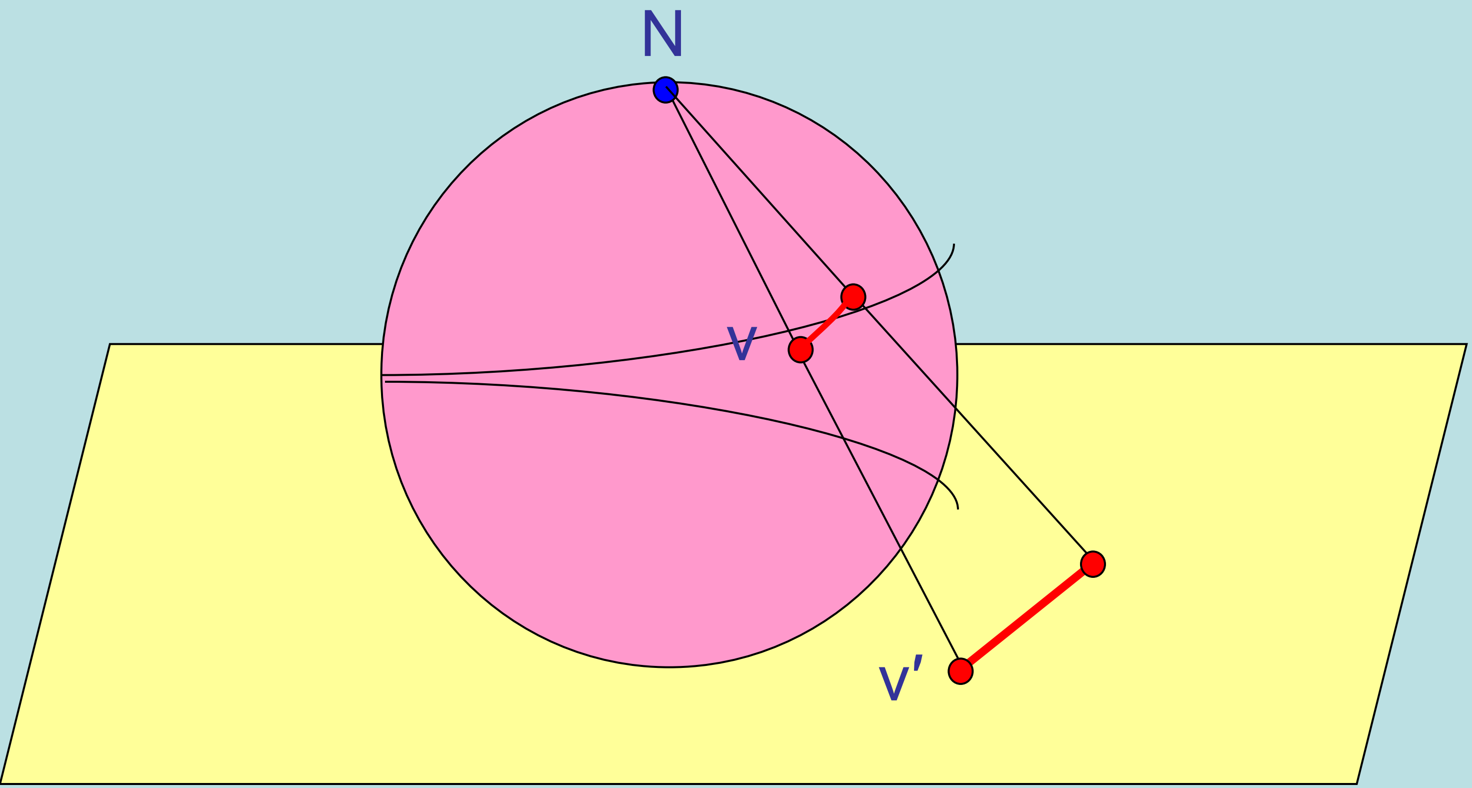
т. е. $m \to m + 1$, $l \to l + 1$ и формула остается верной.

Повторяем эту операцию. При этом формула Эйлера есть инвариант и останется верной после завершения таких шагов и получения графа G. ♦

Стереографическая проекция



Стереографическая проекция



Формула Эйлера:

$n + l = m + 2$

Следствие 1:

Во всяком выпуклом многограннике $n + l = m + 2$

Следствие 2а:

Для связного планарного графа $m \le 3n - 6$ *при* $n \ge 3$.

$d(f_i)$ – степень грани (число ребер границы, мосты – дважды)

$$\sum_{i=1}^{l} d(f_i) = 2m, \quad d(f_i) \ge 3$$

(т.к. граф без петель и параллельных ребер)

Т.о. $2m \ge 3l$.

$l = m + 2 - n \rightarrow 2m \ge 3(m + 2 - n) \rightarrow m \le 3n - 6$ ♦

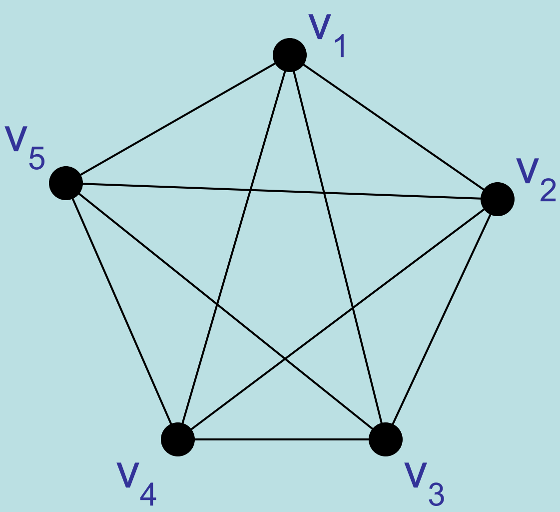
Формула Эйлера:

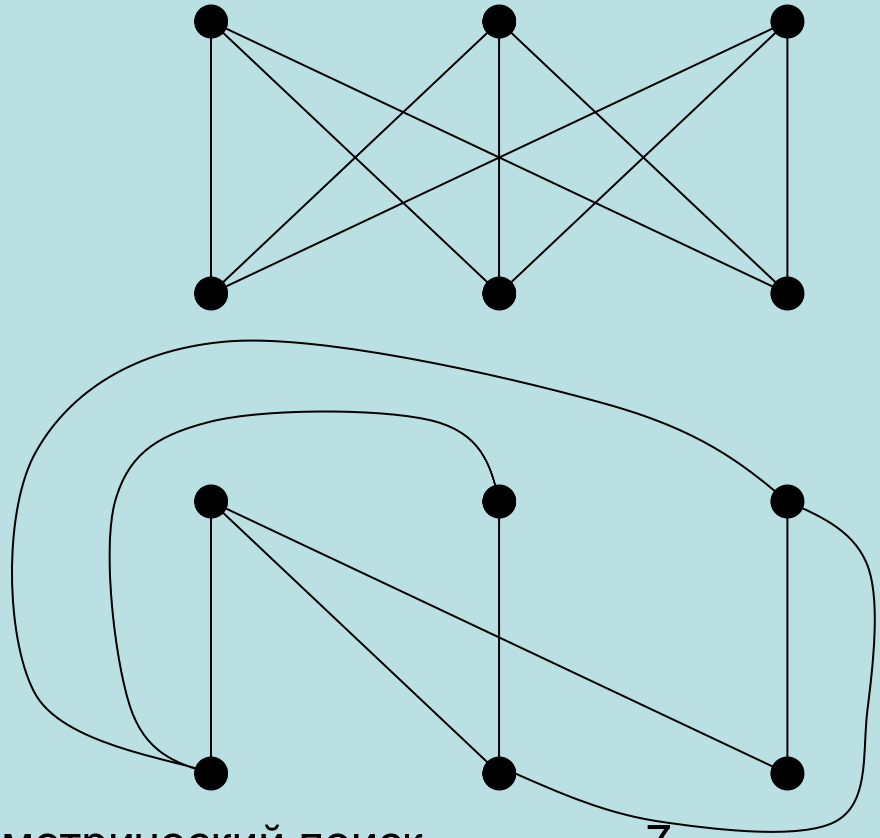
$$n + l = m + 2$$

Следствие 2б:

Для связного планарного графа $l \leq 2n - 4$ *при* $n \geq 3$.

Следствие 3: Графы K_5 и $K_{3,3}$ не планарны.





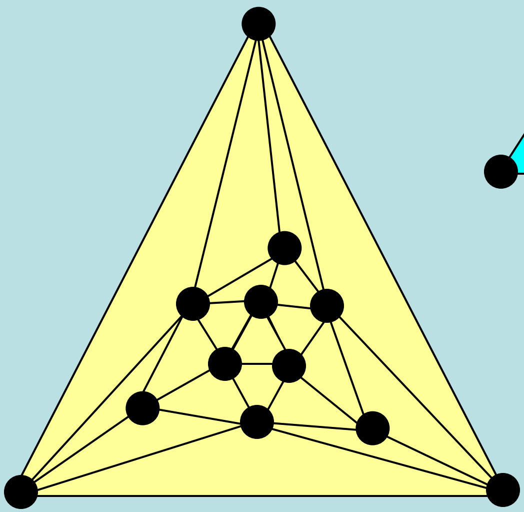
Плоские триангуляции

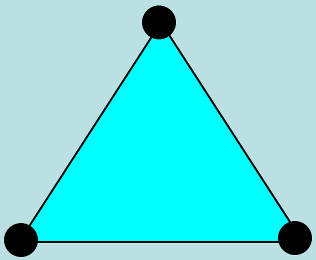
Триангуляция: все конечные грани – треугольники.

Триангуляция множества точек – триангуляция выпуклой оболочки.

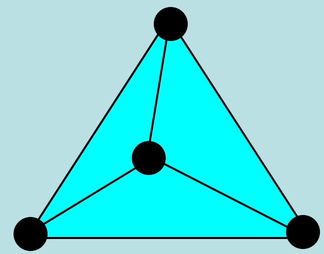
Плоская триангуляция: связный плоский граф, каждая грань которого (в том числе и внешняя) – треугольник.

В этом случае $m = 3n - 6$ и $l = 2n - 4$

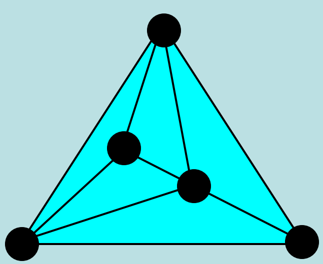




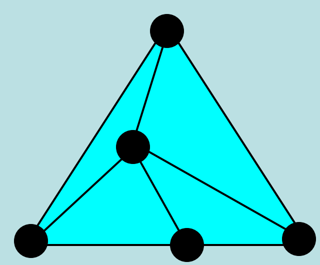
$n = 3$
$m = 3$
$l = 2$



$n := n + 1$
$m := m + 3$
$l := l + 2$



$n := n + 1$
$m := m + 3$
$l := l + 2$

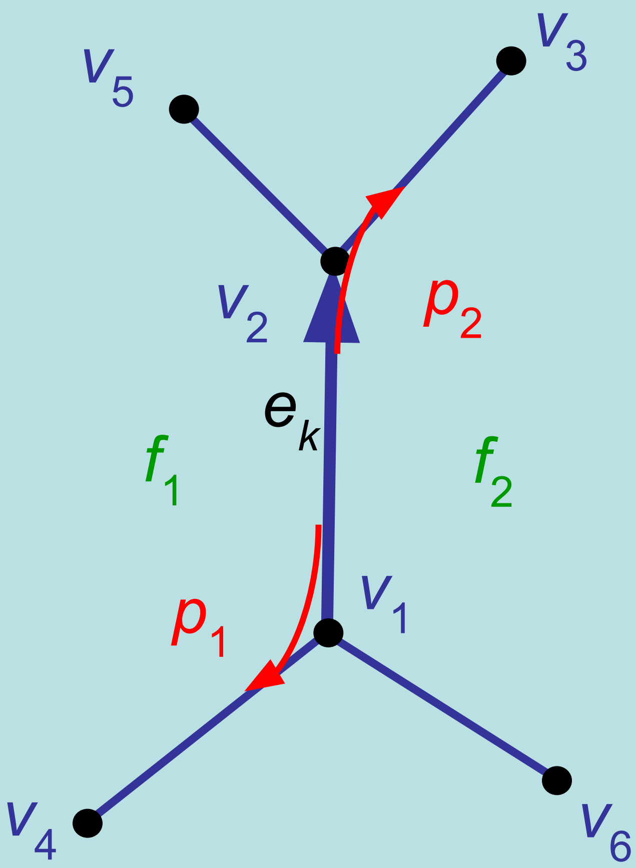


$n := n + 1$
$m := m + 2$
$l := l + 1$

Представление ППЛГ

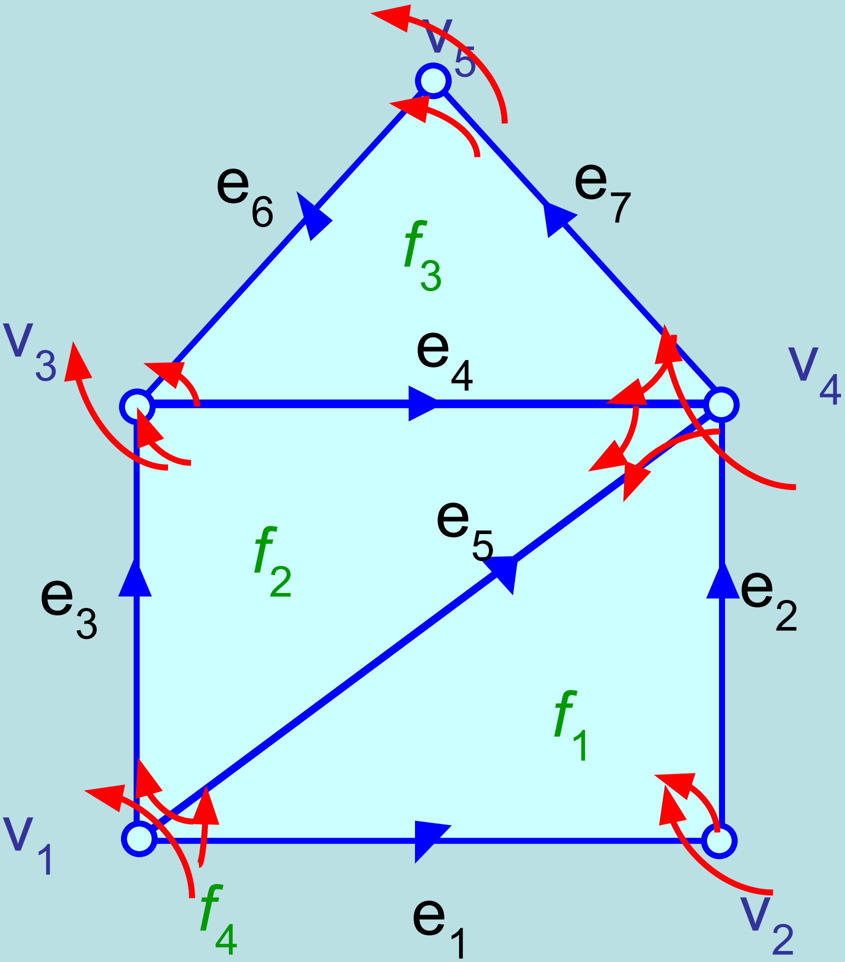
Реберный список с двойными связями (РСДС)

Основная компонента (элемент списка) РСДС – *реберный узел*



	$V1$	$V2$	$F1$	$F2$	$P1$	$P2$
e_k	v_1	v_2	f_1	f_2	p_1	p_2

Представление ППЛГ
Реберный список с двойными связями (РСДС)



	$V1$	$V2$	$F1$	$F2$	$P1$	$P2$
e_1	1	2	1	4	5	2
e_2	2	4	1	4	1	7
e_3	1	3	4	2	1	4
e_4	3	4	3	2	6	5
e_5	1	4	2	1	3	2
e_6	5	3	3	4	7	3
e_7	4	5	3	4	4	6

Представление ППЛГ
Реберный список с двойными связями (РСДС)

массивы входов:

- по вершинам *head_V* [1..*n*]
- по граням *head_F* [1..*l*]

V	*head_V*
v_1	1
v_2	2
v_3	4
v_4	7
v_5	6

F	*head_F*
f_1	1
f_2	2
f_3	4
f_4	7

Представление ППЛГ
Реберный список с двойными связями (РСДС)

Процедура «Инцидентные ребра»

(см. файл MS Word «РеберныйСписокДС»)

Представление ППЛГ
Реберный список с двойными связями (РСДС)

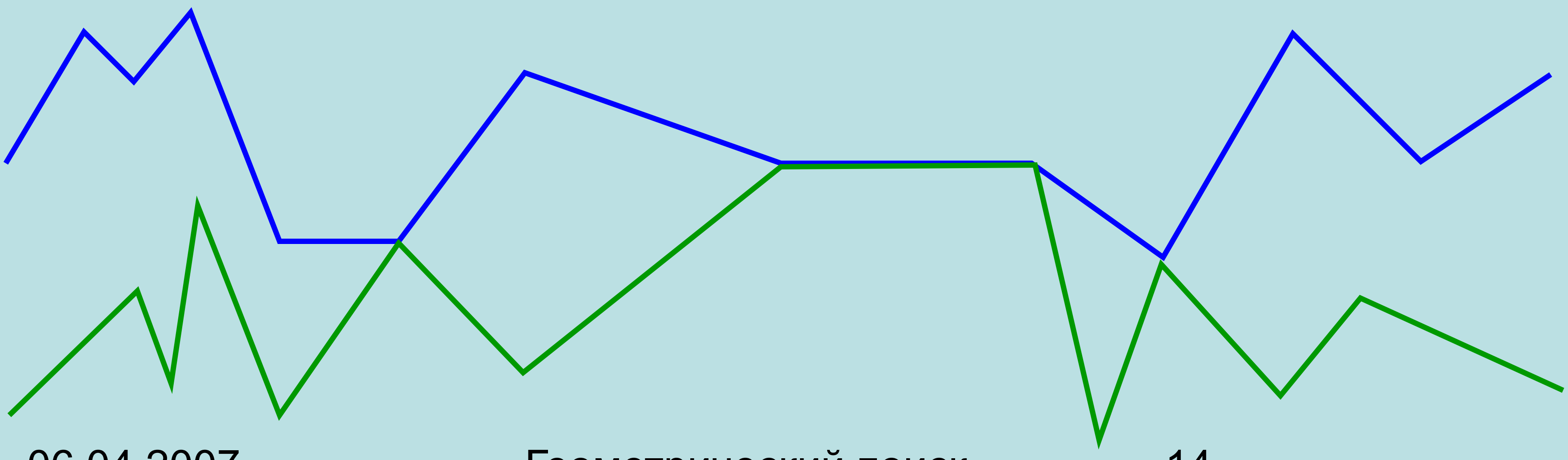
Процедура «Граница грани» (см. файл MS Word «РеберныйСписокДС»)

Метод цепей (продолжение)

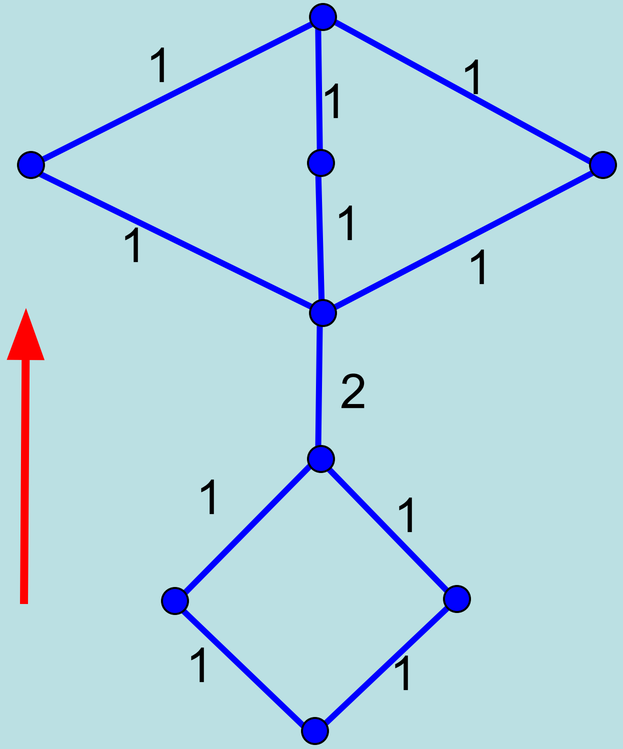
Множество $\boldsymbol{C} = \{C_1, \ldots, C_r\}$ называется *полным множеством монотонных цепей* графа, если:

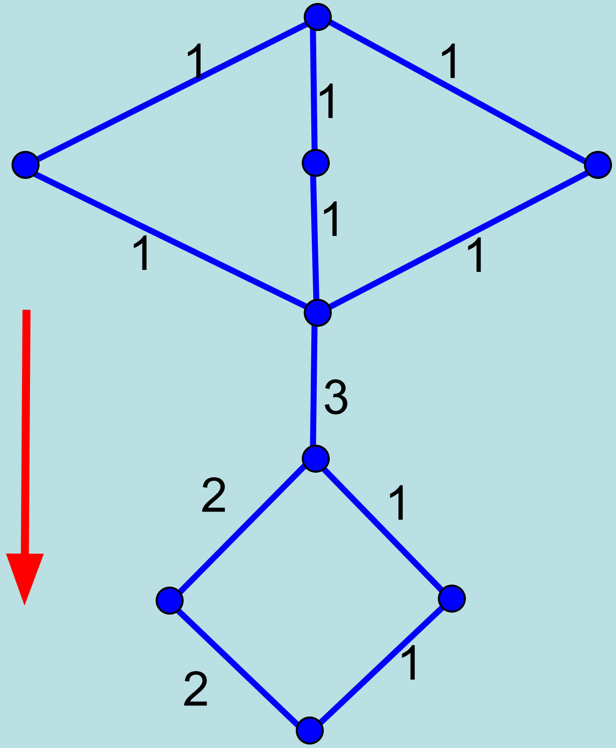
1. $$\bigcup_{j=1}^{r} C_j \supseteq G$$

2. Для ∀ i, j ∈1..r (I ≠ j): те узлы из C_i, которые не являются узлами C_j, лежат по одну сторону от C_j.

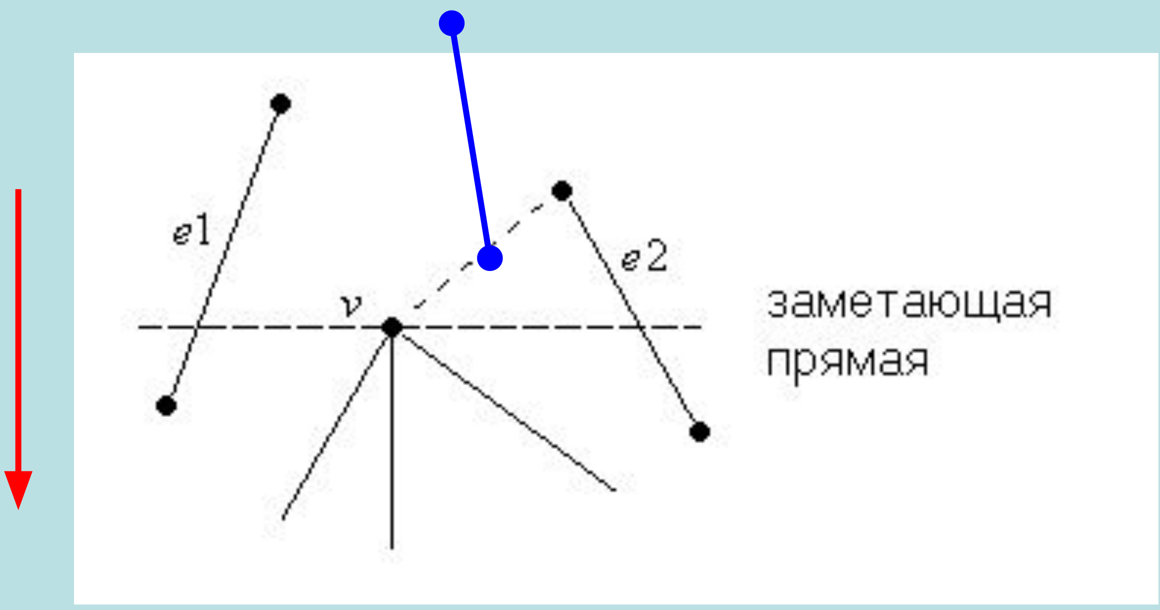


Построение ПММЦ
Балансировка весов ребер





Регуляризация графа
Метод заметания



Метод детализации триангуляции

См. Документ MWord «Локализация точки» (п.1.3) в папке «Лекция 5»

Локализация точки

Метод трапеций (Зайделя) будет позже

Конец лекции