

Лекция 1

Исчерпывающий поиск в комбинаторных алгоритмах

1. Поиск с возвратением. Общая схема (алгоритм).
2. Задача о ферзях.
3. Оценка сложности. Метод Монте-Карло.
4. Другие способы программирования.

Темы лекций

1. Поиск с возвратением. Задача о ферзях. Оценка методом Монте-Карло.
2. Метод ветвей и границ. Общая схема. Задача коммивояжера (ЗК).
3. Метод ветвей и границ. ЗК (продолжение). Приближенные решения.
4. Динамическое программирование. Идея и общая схема. Оптимальное умножение матриц.
5. Динамическое программирование. Оптимальные БДП. Хорошие БДП. Аналогии.

Продолжение

6. Графы и структуры данных. Задачи связности.
7. Остовные деревья графа. Алгоритм Краскала. Алгоритм ЯПД.
8. Непересекающиеся подмножества.
9. Обходы графа. Алгоритм Борувки для МОД.
10. МОД как приближение в ЗК. Двусвязные компоненты (применение обхода в глубину).
11. ПВГ в орграфах. Топологическая сортировка. Сильно связные компоненты.
12. Кратчайшие пути в графе (1).
13. Кратчайшие пути в графе (2).

Лабораторные работы и курсовая работа

Задание 1.

Алгоритмы сортировки, частичного упорядочения, хеширования.

Задание 2.

Перебор с возвратом (Backtracking).

Задание 3.

Метод ветвей и границ

Задание 4.

Динамическое программирование.

Курсовая работа (КР): Алгоритмы на графах.

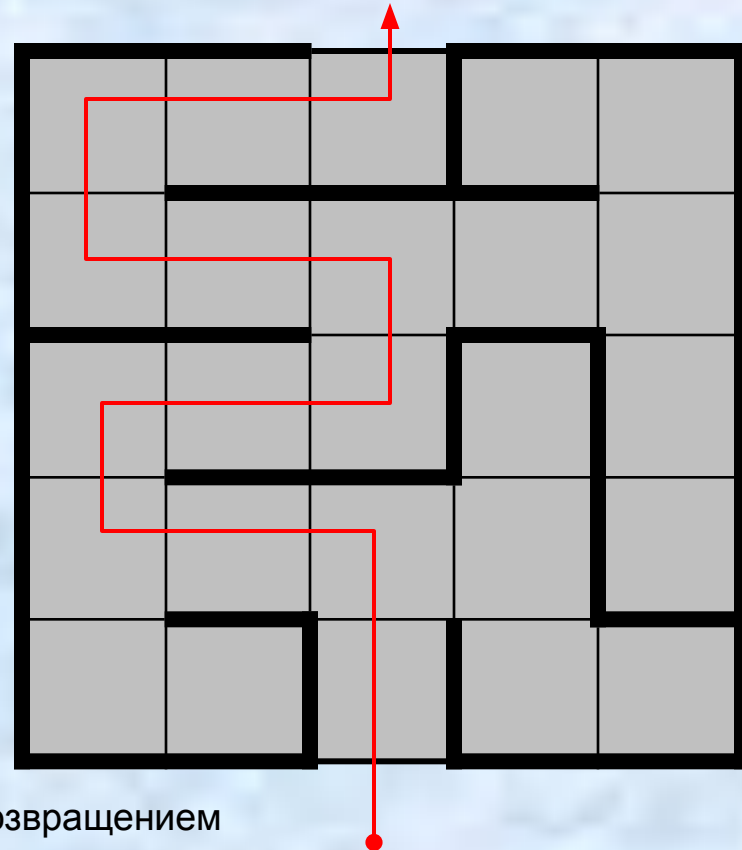
...

- Замечание 1. Об алгоритмах (например, сортировки)
- Замечание 2. О языке программирования и псевдокоде.

Исчерпывающий поиск в комбинаторных алгоритмах

Поиск с возвратением =
= Перебор с возвратом =
= Backtracking

Пример.
Поиск пути в
лабиринте



Общий алгоритм

Решение вида $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$

n - конечно, но, вообще говоря, заранее не известно

$\forall a_i \in A_i;$

A_i - конечное линейно упорядоченное множество

Исчерпываем все элементы множества $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_i$

$i = 0 \rightarrow ()$

$i = 1; S_1 \subset A_1; a_1 \in S_1; () \rightarrow (a_1)$

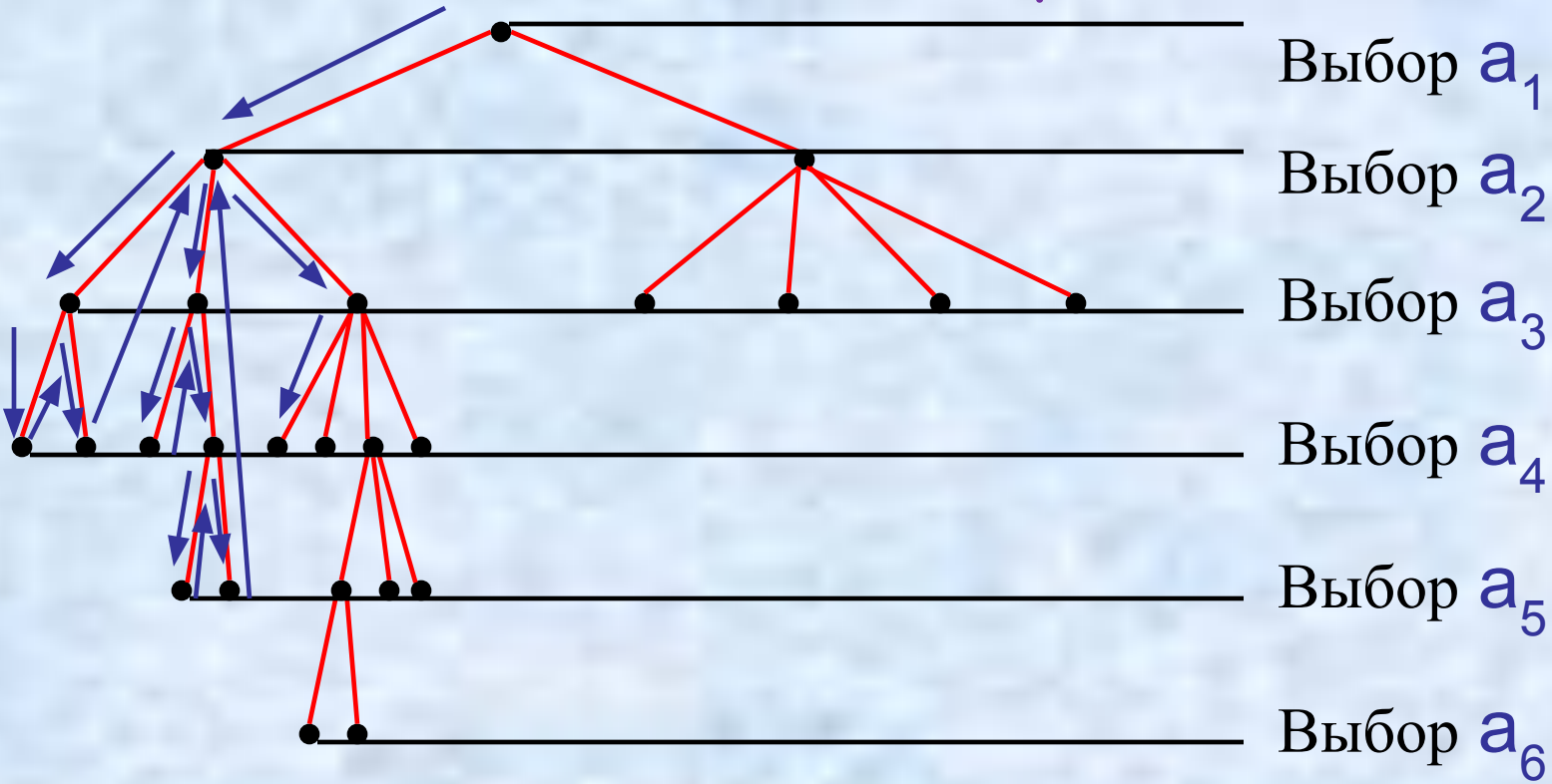
$i = 2; S_2 \subset A_2; a_2 \in S_2; (a_1) \rightarrow (a_1, a_2)$

...

$i = k; S_k \subset A_k; a_k \in S_k; (a_1, \dots, a_{k-1}) \rightarrow (a_1, \dots, a_{k-1}, a_k)$

При $S_k = \emptyset$ **backtrack** и новый выбор $a_{k-1} \in S_{k-1}$;

Обход дерева



Прямой порядок обхода дерева. Тупики.

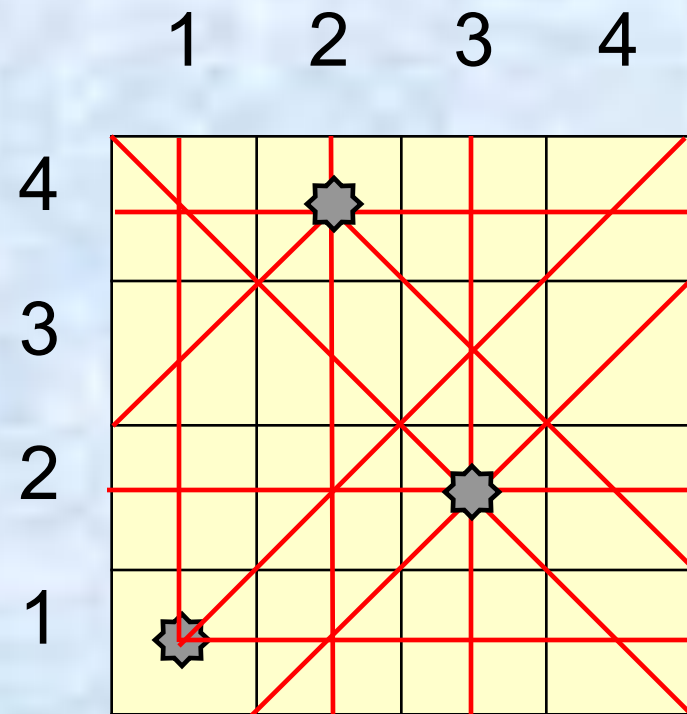
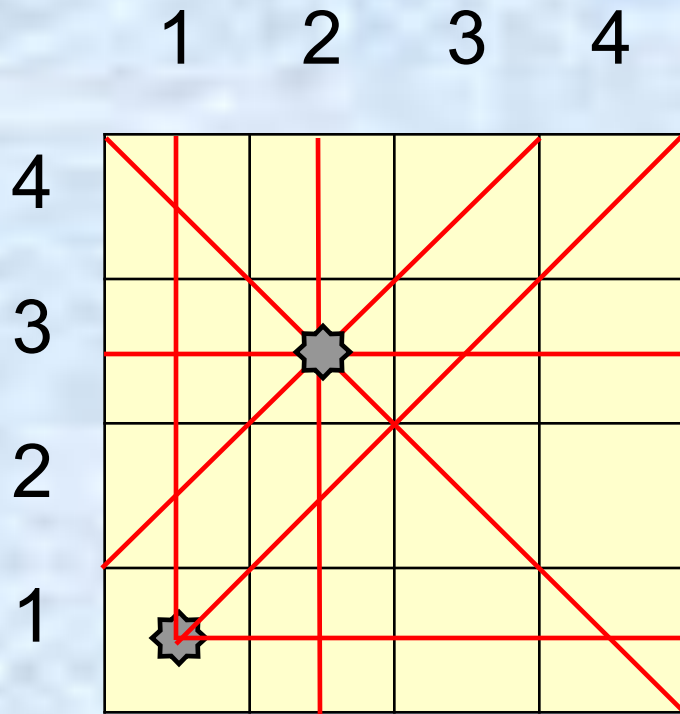
Общий алгоритм

```
S1 = A1; k = 1; count = 0;
while (k > 0) { // пока не все решения найдены
  while (Sk != ∅) {
    // продвижение вперед
    a
    S
    c
    i
    e
  }
  // end while продвижения вперед
  k --; // backtrack
} // все решения найдены; count - число обследованных узлов
```

Пример задачи,
решаемой алгоритмом по этой схеме

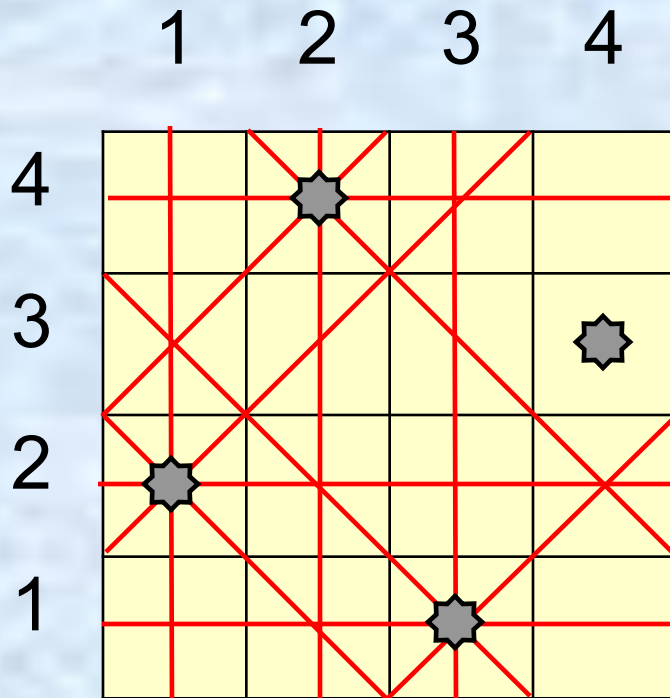
Задача о ферзях

На шахматной доске размера $n \times n$ расставить максимальное число не атакующих друг друга ферзей.



$$n = 4$$

Продолжение



Решение = (a_1, a_2, a_3, a_4)

a_i - номер горизонтали
на i -ой вертикали

Решение = $(2, 4, 1, 3)$

Решение (a_1, a_2, \dots, a_n)

Ферзи i и k атакуют друг друга:

- $i = k$ - ферзи на одной вертикали
- $a_i = a_k$ - ферзи на одной горизонтали
- $|a_i - a_k| = |i - k|$ - ферзи на одной диагонали

Наращивание (продолжение) решения

$$(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}) \cdot a_k = (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k)$$

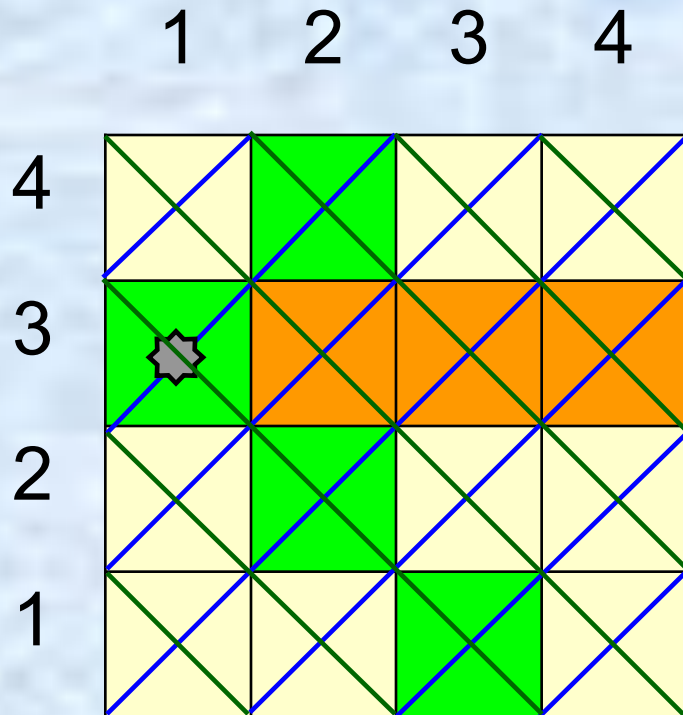
$A_k = (1, 2, \dots, n)$ - номера клеток вертикалей.

Множество S_k явно не формируется,
но, выбирая очередного кандидата $a_k \in A_k$,
проверяем $a_k \in S_k$

Используется s_k - нижняя граница в A_k ,
т.о. кандидаты в S_k выбираются из множества
 (s_k, s_k+1, \dots, n) , т.е. $S_k \subset (s_k, s_k+1, \dots, n)$.

Обсудить альтернативу.

Альтернативное представление S_k



Горизонталей = n
Диагоналей = $2(2n - 1)$

Проверка s[k]

```
bool noQueen (uns s, uns k)
// ферзь не может быть поставлен в строку s столбца k
{ bool Flag = true;
  uns i = 1;
  while ((i<k) && Flag) {
    // Flag= 'ферзи [1..i) не атакуют поле <k,s>'
    // атакует ли ферзь из i-го столбца поле <k,s>?}
    Flag = !( (a[i]==s) || (abs(a[i]-s)== k-i) );
    i++;
  } //end - while
  return (!Flag);
} // end noQueen
```

Нахождение очередного свободного поля $s[k]$

```
/* найти следующее наименьшее значение  $s[k]$ ,  
начиная с текущего  $s[k]$ ;  
если такового нет, то  $s[k]=n+1$   
*/  
while (( $s[k] \leq n$ ) && noQueen ( $s[k], k$ ))  $s[k]++$ ;
```

Реализация

```
void queen1(const uns n)
{ pos s;
/*s[k] - наименьший элемент множества Sk
неопробованных (допустимых) значений
*/
uns count = 0; // счетчик обследованных
// узлов дерева поиска
uns countS = 0; // счетчик найденных решений
a[1] = 1; s[1] = 1;
uns k = 1;
```

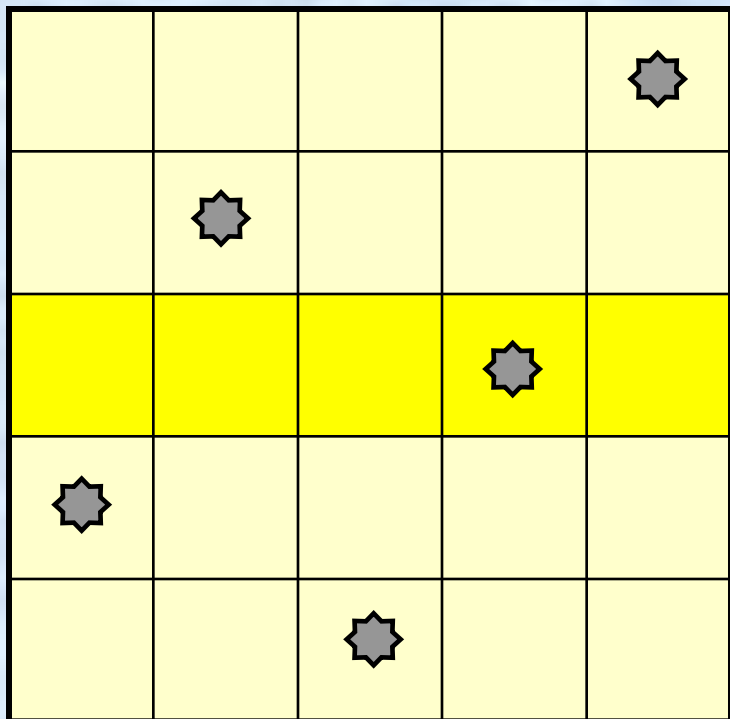
```

while (k>0) {
  while ((k>=1) && (s[k]<=n)) {
    a[k]= s[k]; s[k]++;
    // найти следующее наименьшее значение s[k]
    while ((s[k]<=n) && noQueen (s[k],k)) s[k]++;
    count++;
    if (k==n) {countS++; ...} //решение найдено - фиксировать !
    else {// переход к следующей вертикали
      k++;
      s[k]= 1;
      //найти следующее наименьшее значение s[k],
      while ((s[k]<=n) && noQueen (s[k],k)) s[k]++;
    }
  }
  k--; // backtrack
}

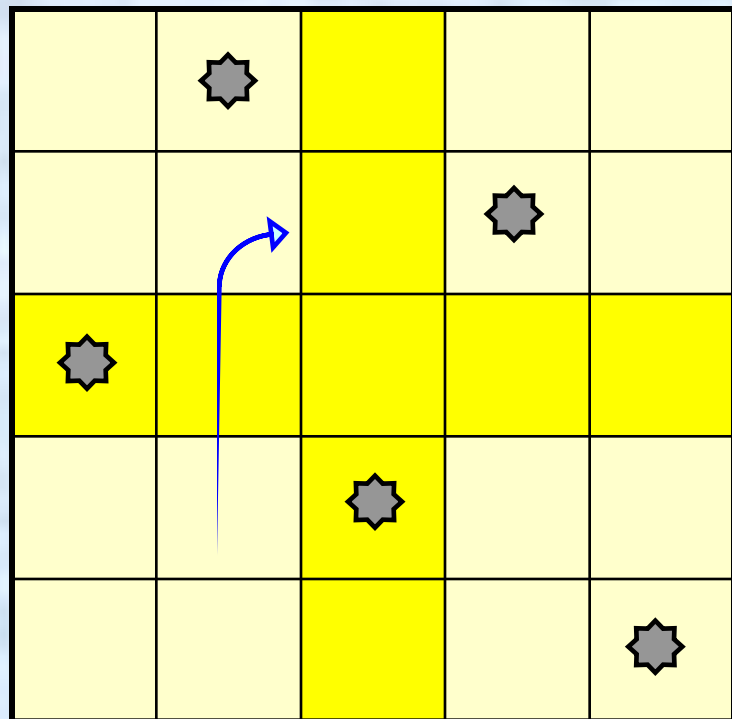
```

Демонстрация

Усовершенствования: пояснения к инициализации Вращения и отражения

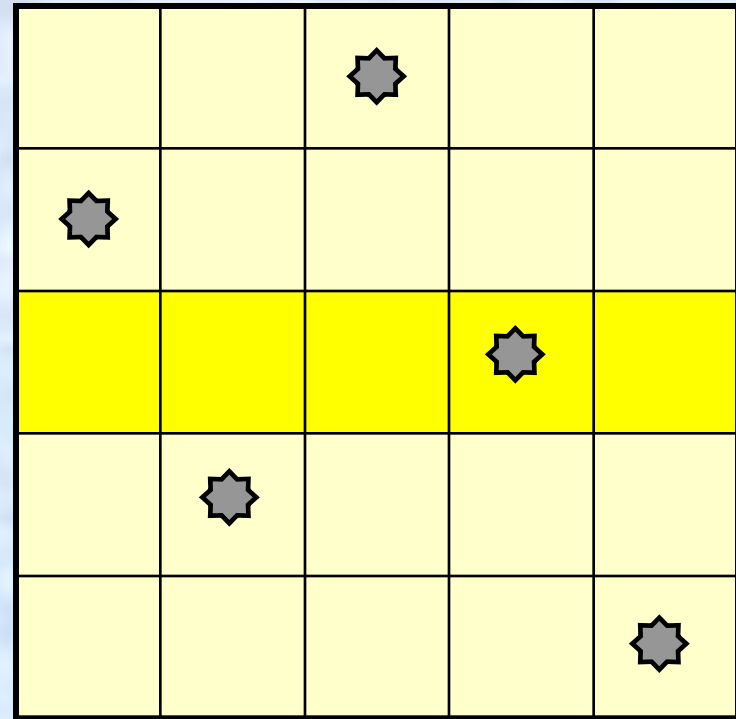
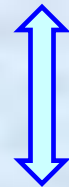
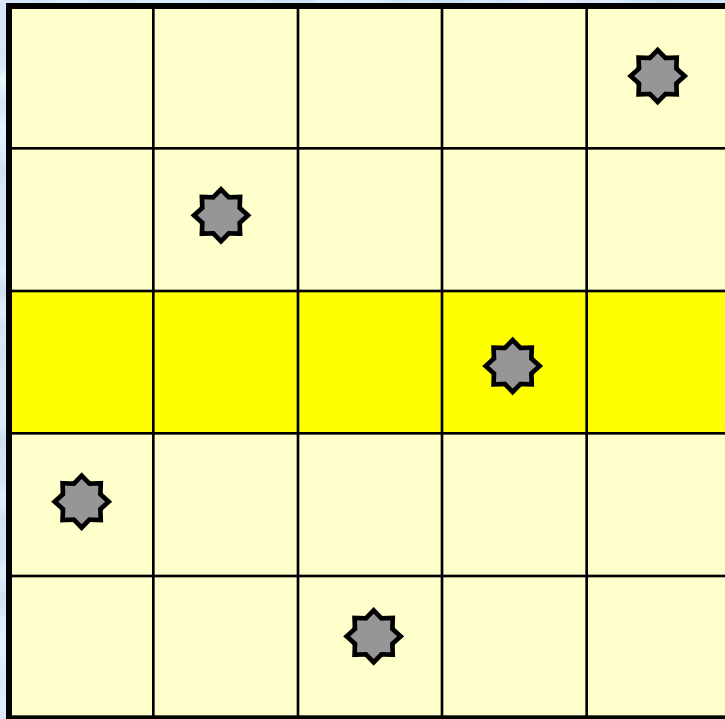


2 4 1 3 5



3 5 2 4 1

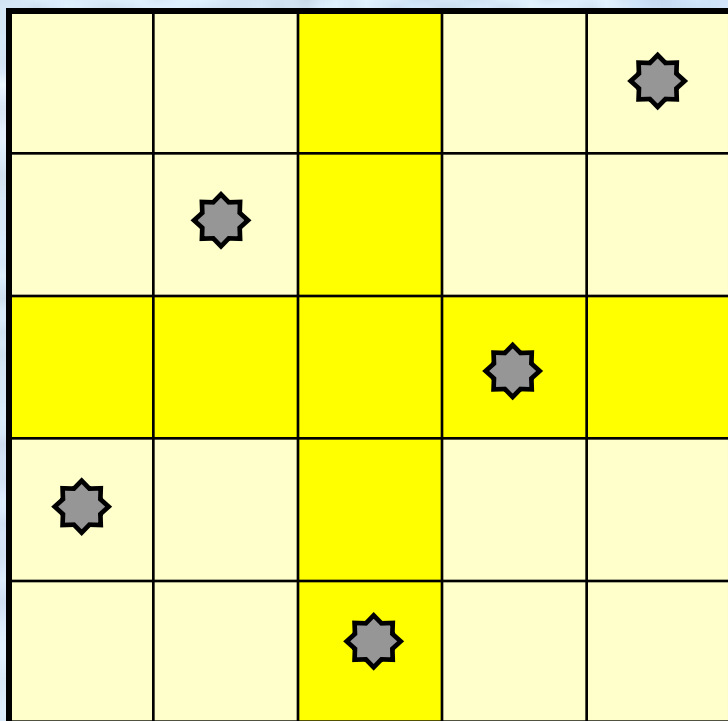
Усовершенствования: пояснения к инициализации Вращения и отражения



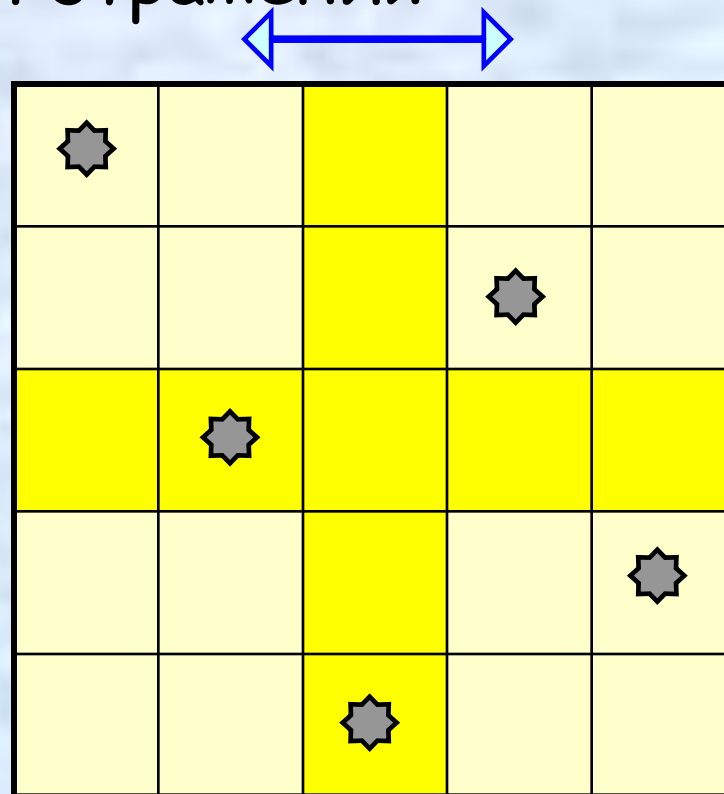
2 4 1 3 5

4 2 5 3 1

Усовершенствования: пояснения к инициализации Вращения и отражения



2 4 1 3 5



5 3 1 4 2

Отсечение и склеивание ветвей

Усовершенствования

```
void queen1(const uns n)
{pos s; //s[k] - наименьший элемент множества Sk
//неопробованных (допустимых) значений
uns count = 1; // счетчик обследованных узлов
uns countS = 0; // счетчик найденных решений
uns n_div_2 = n/2;
a[1] = 2; s[1] = 3;
uns k = 2; s[2] = 4;
while (k>0){
    while ( ((k>1) && (s[k]<=n)) || ((k==1) && (s[1]<=(n_div_2))) )
    { a[k]= s[k];
        ...
    }
}
```

Подсчет вариантов

$n=8$

Все возможные способы $C(n^2|n) \approx 4,4*10^9$

В каждом столбце один $n^n \approx 1,7*10^7$

+ В каждой строке один $n! \approx 4,0*10^4$

На каждой диагонали не более одного **2056**

Усовершенствования (вращения и отражения)

801

Результаты

количество ферзей = 4

р е ш е н и я :

1 :: 2 4 1 3

всего вершин = 4

количество ферзей = 5

р е ш е н и я :

1 :: 2 4 1 3 5

2 :: 2 5 3 1 4

всего вершин = 11

количество ферзей = 6

р е ш е н и я :

1 :: 2 4 6 1 3 5

2 :: 3 6 2 5 1 4

всего вершин = 54

количество ферзей = 7

р е ш е н и я :

1 :: 2 4 1 7 5 3 6

2 :: 2 4 6 1 3 5 7

3 :: 2 5 1 4 7 3 6

4 :: 2 5 3 1 7 4 6

5 :: 2 5 7 4 1 3 6

6 :: 2 6 3 7 4 1 5

7 :: 2 7 5 3 1 6 4

8 :: 3 1 6 2 5 7 4

9 :: 3 1 6 4 2 7 5

10 :: 3 5 7 2 4 6 1

11 :: 3 6 2 5 1 4 7

12 :: 3 7 2 4 6 1 5

13 :: 3 7 4 1 5 2 6

всего вершин = 164

количество ферзей = 8

решения :

1 :: 2 4 6 8 3 1 7 5
2 :: 2 5 7 1 3 8 6 4
3 :: 2 5 7 4 1 8 6 3
4 :: 2 6 1 7 4 8 3 5
5 :: 2 6 8 3 1 4 7 5
6 :: 2 7 3 6 8 5 1 4
7 :: 2 7 5 8 1 4 6 3
8 :: 2 8 6 1 3 5 7 4
9 :: 3 1 7 5 8 2 4 6
10 :: 3 5 2 8 1 7 4 6
11 :: 3 5 2 8 6 4 7 1
12 :: 3 5 7 1 4 2 8 6
13 :: 3 5 8 4 1 7 2 6
14 :: 3 6 2 5 8 1 7 4
15 :: 3 6 2 7 1 4 8 5
16 :: 3 6 2 7 5 1 8 4
17 :: 3 6 4 1 8 5 7 2
18 :: 3 6 4 2 8 5 7 1
19 :: 3 6 8 1 4 7 5 2
20 :: 3 6 8 1 5 7 2 4
21 :: 3 6 8 2 4 1 7 5

22 :: 3 7 2 8 5 1 4 6
23 :: 3 7 2 8 6 4 1 5
24 :: 3 8 4 7 1 6 2 5
25 :: 4 1 5 8 2 7 3 6
26 :: 4 1 5 8 6 3 7 2
27 :: 4 2 5 8 6 1 3 7
28 :: 4 2 7 3 6 8 1 5
29 :: 4 2 7 3 6 8 5 1
30 :: 4 2 7 5 1 8 6 3
31 :: 4 2 8 5 7 1 3 6
32 :: 4 2 8 6 1 3 5 7
33 :: 4 6 1 5 2 8 3 7
34 :: 4 6 8 2 7 1 3 5
35 :: 4 6 8 3 1 7 5 2
36 :: 4 7 1 8 5 2 6 3
37 :: 4 7 3 8 2 5 1 6
38 :: 4 7 5 2 6 1 3 8
39 :: 4 7 5 3 1 6 8 2
40 :: 4 8 1 3 6 2 7 5
41 :: 4 8 1 5 7 2 6 3
42 :: 4 8 5 3 1 7 2 6

всего вершин = 801

количество ферзей = 9

решения:

1 :: 2 4 1 7 9 6 3 5 8
2 :: 2 4 7 1 3 9 6 8 5
3 :: 2 4 8 3 9 6 1 5 7
4 :: 2 4 9 7 3 1 6 8 5
5 :: 2 4 9 7 5 3 1 6 8
6 :: 2 5 7 1 3 8 6 4 9
7 :: 2 5 7 4 1 3 9 6 8
8 :: 2 5 7 9 3 6 4 1 8
9 :: 2 5 7 9 4 8 1 3 6
10 :: 2 5 8 1 3 6 9 7 4
11 :: 2 5 8 1 9 6 3 7 4
12 :: 2 5 8 6 9 3 1 4 7
13 :: 2 5 8 6 9 3 1 7 4
14 :: 2 5 9 4 1 8 6 3 7
15 :: 2 6 1 3 7 9 4 8 5
16 :: 2 6 1 7 4 8 3 5 9
17 :: 2 6 1 7 5 3 9 4 8
18 :: 2 6 1 9 5 8 4 7 3
19 :: 2 6 3 1 8 4 9 7 5
20 :: 2 6 9 3 5 8 4 1 7
21 :: 2 7 5 1 9 4 6 8 3
22 :: 2 7 5 8 1 4 6 3 9
23 :: 2 7 9 6 3 1 4 8 5
24 :: 2 8 1 4 7 9 6 3 5
25 :: 2 8 5 3 9 6 4 1 7
26 :: 2 8 6 9 3 1 4 7 5
27 :: 2 9 5 3 8 4 7 1 6
28 :: 2 9 6 3 5 8 1 4 7
29 :: 2 9 6 3 7 4 1 8 5
30 :: 2 9 6 4 7 1 3 5 8
31 :: 3 1 4 7 9 2 5 8 6
32 :: 3 1 6 8 5 2 4 9 7
33 :: 3 1 7 2 8 6 4 9 5

34 :: 3 1 7 5 8 2 4 6 9
35 :: 3 1 8 4 9 7 5 2 6
36 :: 3 1 9 7 5 2 8 6 4
37 :: 3 5 2 8 1 4 7 9 6
38 :: 3 5 2 8 1 7 4 6 9
39 :: 3 5 7 1 4 2 8 6 9
40 :: 3 5 8 2 9 6 1 7 4
41 :: 3 5 8 2 9 7 1 4 6
42 :: 3 5 9 2 4 7 1 8 6
43 :: 3 5 9 4 1 7 2 6 8
44 :: 3 6 2 7 1 4 8 5 9
45 :: 3 6 2 9 5 1 8 4 7
46 :: 3 6 8 1 4 7 5 2 9
47 :: 3 6 8 1 5 9 2 4 7
48 :: 3 6 8 2 4 9 7 5 1
49 :: 3 6 8 5 1 9 7 2 4
50 :: 3 6 8 5 2 9 7 4 1
51 :: 3 6 9 1 8 4 2 7 5
52 :: 3 6 9 2 5 7 4 1 8
53 :: 3 6 9 2 8 1 4 7 5
54 :: 3 6 9 5 8 1 4 2 7
55 :: 3 6 9 7 1 4 2 5 8
56 :: 3 6 9 7 2 4 8 1 5
57 :: 3 6 9 7 4 1 8 2 5
58 :: 3 7 2 4 8 1 5 9 6
59 :: 3 7 2 8 5 9 1 6 4
60 :: 3 7 2 8 6 4 1 5 9
61 :: 3 7 4 2 9 5 1 8 6
62 :: 3 7 4 2 9 6 1 5 8
63 :: 3 7 4 8 5 9 1 6 2
64 :: 3 7 9 1 5 2 8 6 4
65 :: 3 7 9 4 2 5 8 6 1
66 :: 3 8 2 4 9 7 5 1 6
67 :: 3 8 4 7 9 2 5 1 6

.....

...
90 :: 4 2 9 5 1 8 6 3 7
91 :: 4 6 1 5 2 8 3 7 9
92 :: 4 6 1 9 5 8 2 7 3
93 :: 4 6 1 9 7 3 8 2 5
94 :: 4 6 3 9 2 5 8 1 7
95 :: 4 6 3 9 2 8 5 7 1
96 :: 4 6 3 9 7 1 8 2 5
97 :: 4 6 8 2 5 1 9 7 3
98 :: 4 6 8 2 5 7 9 1 3
99 :: 4 6 8 2 7 1 3 5 9
100 :: 4 6 8 3 1 7 5 2 9
101 :: 4 6 9 3 1 8 2 5 7
102 :: 4 7 1 3 9 6 8 5 2
103 :: 4 7 1 6 9 2 8 5 3
104 :: 4 7 1 8 5 2 9 3 6
105 :: 4 7 3 6 9 1 8 5 2
106 :: 4 7 3 8 2 5 9 6 1
107 :: 4 7 3 8 6 1 9 2 5
108 :: 4 7 3 8 6 2 9 5 1
109 :: 4 7 5 2 9 1 3 8 6
110 :: 4 7 5 2 9 1 6 8 3
111 :: 4 7 5 2 9 6 8 3 1
112 :: 4 7 9 2 5 8 1 3 6
113 :: 4 7 9 2 6 1 3 5 8
114 :: 4 7 9 6 3 1 8 5 2
115 :: 4 8 1 5 7 2 6 3 9
116 :: 4 8 5 3 1 6 2 9 7
117 :: 4 8 5 3 1 7 2 6 9
118 :: 4 9 3 6 2 7 5 1 8
119 :: 4 9 5 3 1 6 8 2 7
120 :: 4 9 5 3 1 7 2 8 6
121 :: 4 9 5 8 1 3 6 2 7

всего вершин = 2857

Оценка сложности выполнения Метод Монте-Карло

Число исследуемых узлов дерева

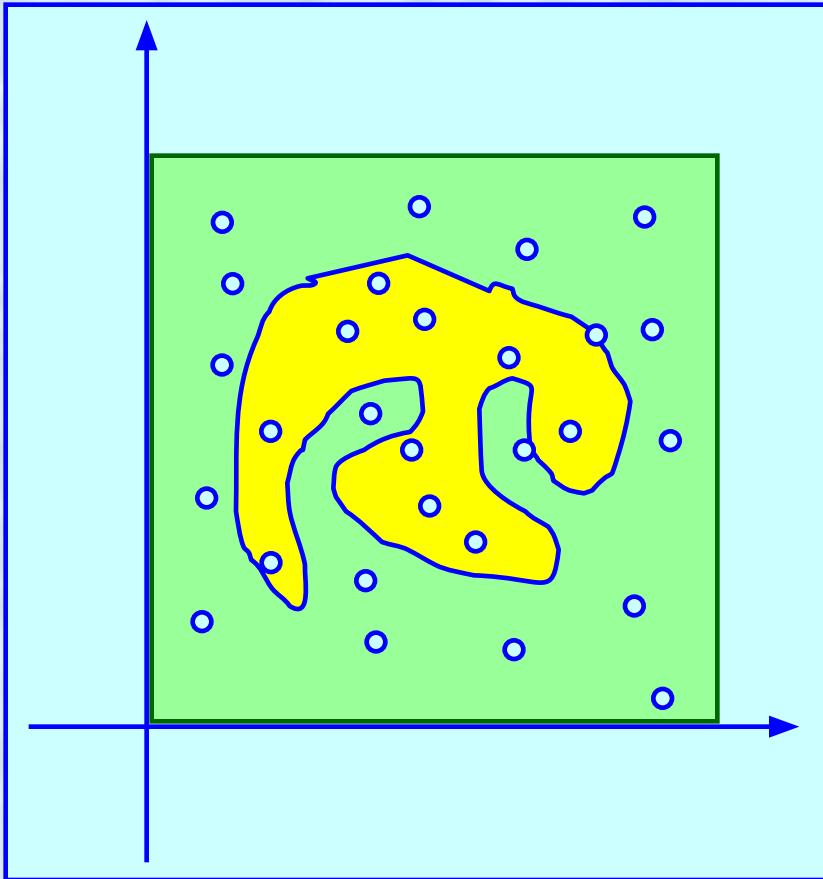
$$\cong \prod_{i=1}^n \mu(A_i)$$

$\mu(A_i)$ - мощность множества A_i

В лучшем случае $\mu(A_i) \approx \text{Const}$

и тогда число узлов дерева $\approx C^n$

Метод Монте-Карло



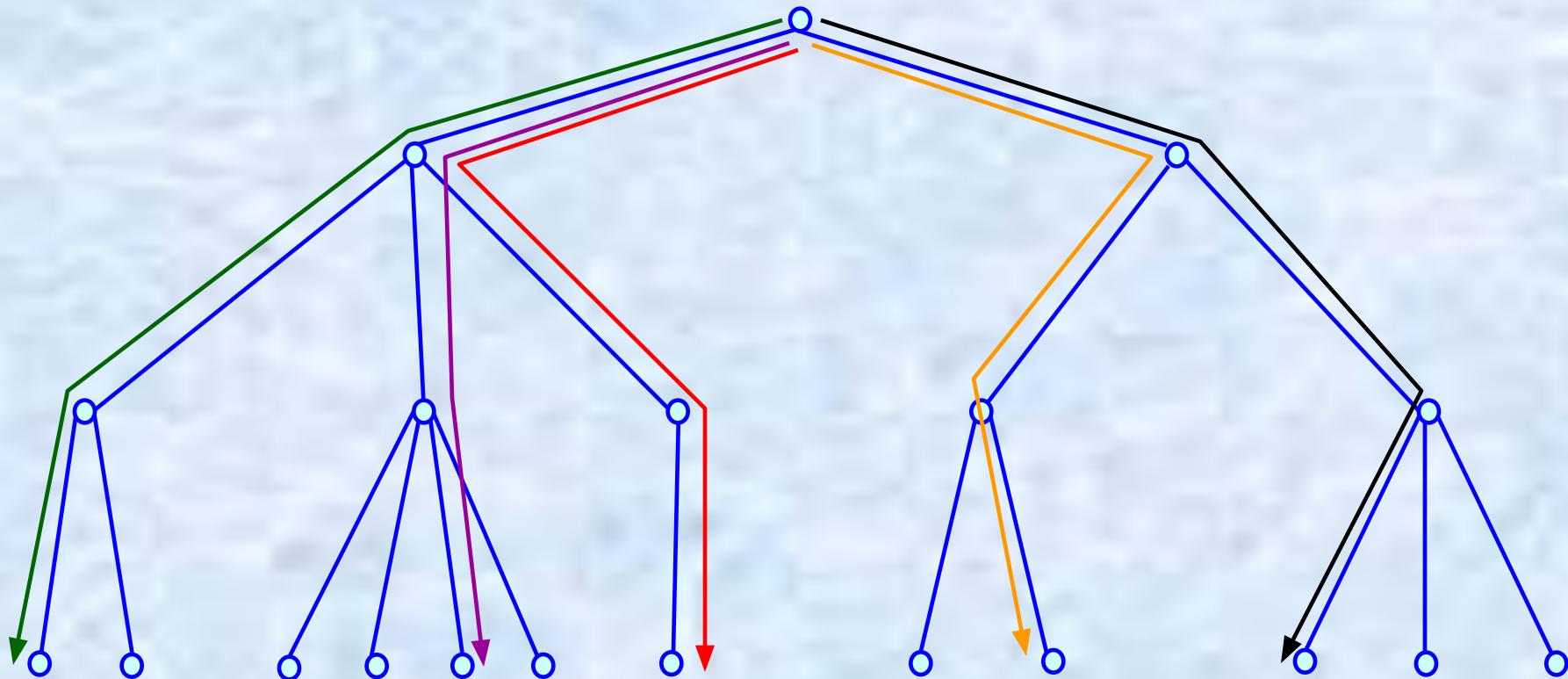
Оценка площади
фигуры (интеграла)

Число точек внутри

Общее число точек

Оценка размеров дерева

Пример: 20 узлов, без корня 19 (количество веток)



(1) $2+2*3+2*3*4=32$ (4)

(2) $2+2*2+2*2*2=14$ (5)

(3) $2+2*2+2*2*3=18$

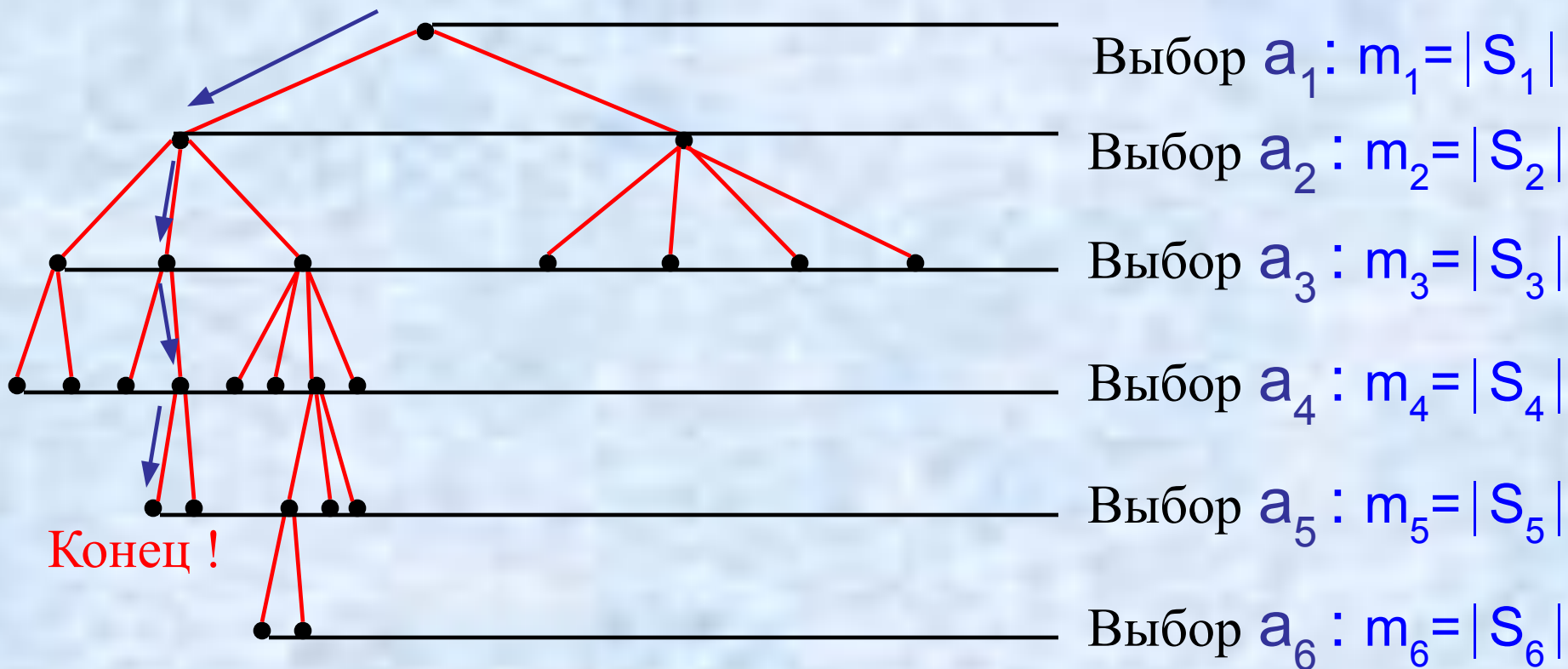
(4) $2+2*3+2*3*2=20$

(5) $2+2*3+2*3*1=14$

$(32+14+18)/3 = 64/3=21.3 \approx 21$

$(32+14+18+20+14)/5 = 98/5=19.6 \approx 20$

Схема испытания



- При $m_k = |S_k| \neq 0$ выбор a_k из S_k случайный с вероятностью $1/m_k$.
- При $m_k = 0$ испытание заканчивается.

Схема испытания

Случайная величина

$$V = m_1 + m_1 m_2 + m_1 m_2 m_3 + \dots + m_1 m_2 \dots m_L$$

Математическое ожидание

$E(V)$ = число узлов в дереве (отличных от корня)

Напоминание: для случайной величины x с исходами x_1, x_2, \dots, x_k и вероятностями p_1, p_2, \dots, p_k математическое ожидание есть

$$E(x) = \sum_{i=1}^k x_i p_i$$

$$p_i = \frac{1}{k} \Rightarrow E(x) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$$

Покажем, что

$E(V) =$ число узлов в дереве

1) функция на дереве T (не случайная)

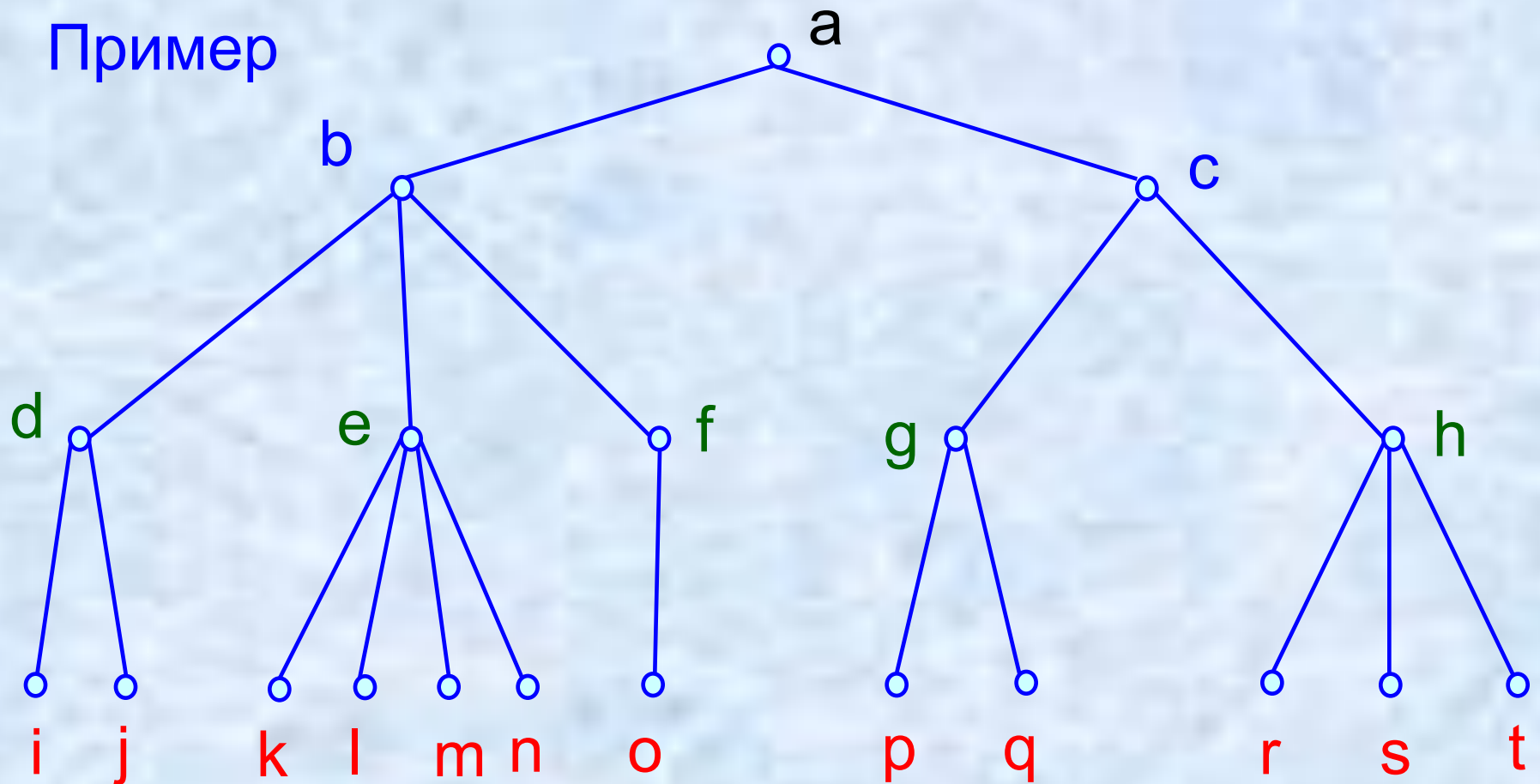
$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = \text{root}(T) \\ v \times \mu(\text{отец}(x)), & \text{если } x \neq \text{root}(T) \end{cases}$$

где v - число братьев x , включая самого x
(т.е. число сыновей узла $\text{отец}(x)$)

Пусть путь от корня к узлу x есть v_1, v_2, \dots, v_j , тогда

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \mu(v_j) = v_j \times \mu(v_{j-1}) = v_j \times v_{j-1} \times \mu(v_{j-2}) = \dots = \\ &= v_j \times v_{j-1} \times \dots \times v_1 \times \mu(v_1) = v_j \times v_{j-1} \times \dots \times v_1 \end{aligned}$$

Пример



$$\mu(a) = 1, \mu(b) = \mu(c) = 2, \mu(d) = \mu(e) = \mu(f) = 2 \cdot 3 = 6,$$

$$\mu(g) = \mu(h) = 4, \mu(i) = \mu(j) = 12, \mu(k) = \mu(l) = \mu(m) = \mu(n) = 24,$$

$$\mu(o) = 6, \mu(p) = \mu(q) = 8, \mu(r) = \mu(s) = \mu(t) = 12$$

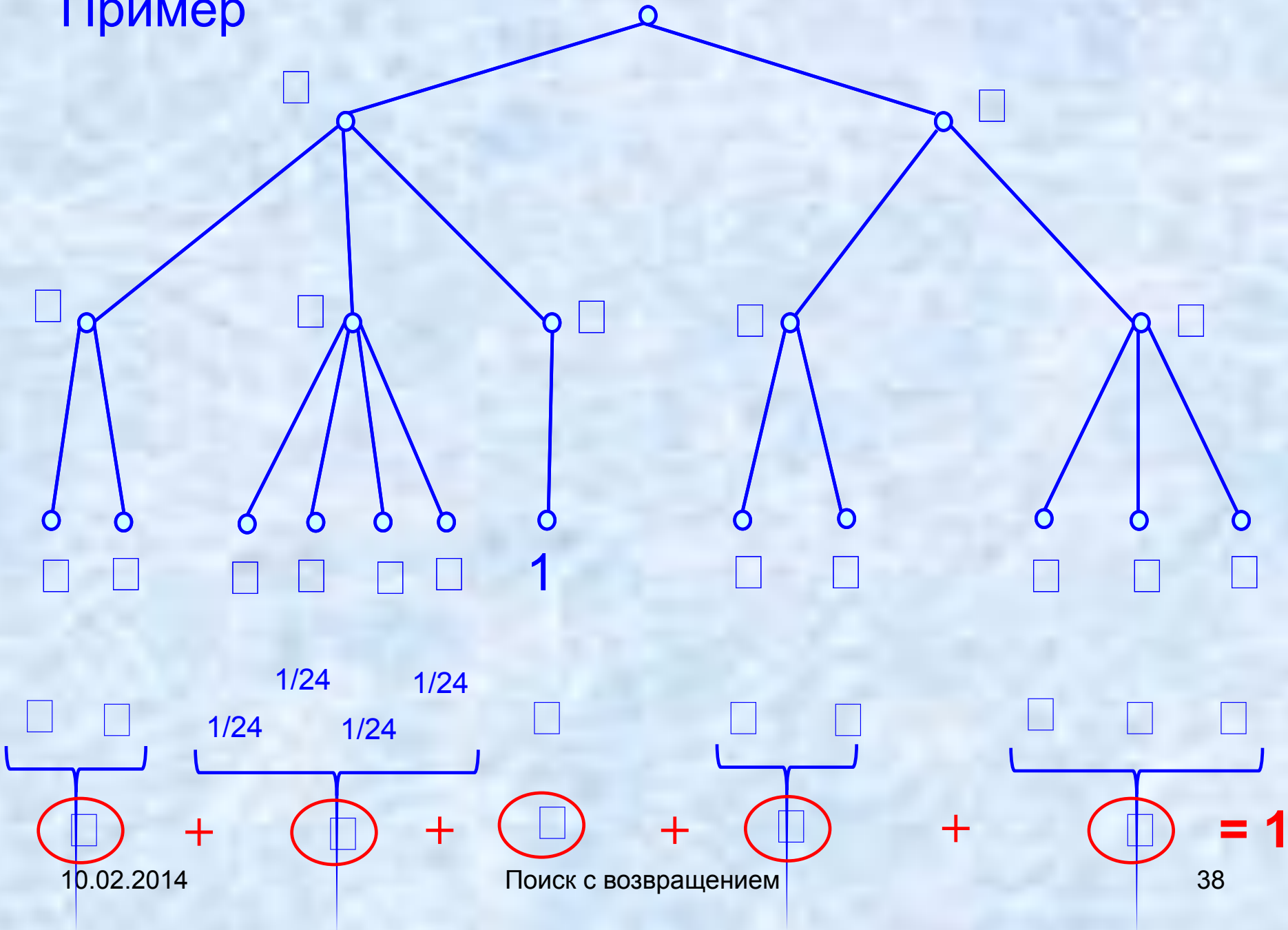
2) Функция «индикатор», описывающая случайность

$I(x) = \begin{cases} 1, & \text{если узел } x \text{ пройден при испытании} \\ 0, & \text{если узел } x \text{ не пройден при испытании} \end{cases}$

Случайное событие = «узел x пройден»,
а $I(x)$ – случайная величина $\in \{0,1\}$

Вероятность дойти до узла $x = v_j$ есть
 $(1/m_1) \times (1/m_2) \times \dots \times (1/m_j)$

Пример



Итак, покажем, что

$E(V)$ = число узлов в дереве

$$V = m_1 + m_1 m_2 + \dots + \prod_{i=1}^L m_i = \sum_{\substack{x \in T \\ x \neq \text{root}(T)}} \mu(x) I(x)$$

$$E(V) = \sum_{\substack{x \in T \\ x \neq \text{root}(T)}} \mu(x) E(I(x)) = \sum_{\substack{x \in T \\ x \neq \text{root}(T)}} \mu(x) \frac{1}{\mu(x)} =$$

= число узлов в дереве

$$E(I(x)) = \Pr(I(x) = 1) \cdot 1 + \Pr(I(x) = 0) \cdot 0 =$$

$$= \Pr(I(x) = 1) = \frac{1}{\mu(x)}$$

Общий алгоритм

```
// Монте-Карло
SV = 0; // M - число испытаний
for (i = 1; i <= M; i++) {
    k = 1; S1 = A1; m1 = |S1|;
    Sum = 0; Prod = 1;
    while (mk ≠ 0) {
        // продвижение вперед
        Prod* = mk;
        Sum+ = Prod;
        ak = случайный выбор очередного элемента из Sk;
        k ++;
        вычислить Sk и mk;
    }
    SV := SV + Sum;
} // end - for
V = SV / M;
```



```

begin { MonteCarlo }
  Randomize; n_div_2 := n div 2;  all := 0;
for iExp:=1 to nExp do
  begin { очередное испытание }
    m_k := n_div_2 - 1;  num := Random ( m_k ) + 1;
    a[1] := 1+num;  k := 2;  prod := m_k;  sum := prod;
    FormSk ( k, m_k, S_k );
    while m_k<>0 do
      begin
        prod := prod*m_k;  sum := sum + prod;
        num := Random ( m_k ) + 1;  a[k] := S_k[num];
        k := k + 1;  FormSk ( k, m_k, S_k );
      end {while};
      all := all + sum
    end {for};
    v := all/nExp
  end { MonteCarlo };

```

```
procedure FormSk ( k: Nat; var m_k: Nat0; var S_k: pos );  
{ формирует "множество" (вектор) S_k возможных ходов и  
его мощность m_k; если S_k пусто, то m_k=0 }  
var s: Nat;  
begin  
  m_k := 0;  
  for s:=1 to n do  
    if not NoQueen( k, s) then  
      begin { можно ставить }  
        m_k := m_k + 1;  
        S_k[m_k] := s  
      end;  
  end {FormSk};
```

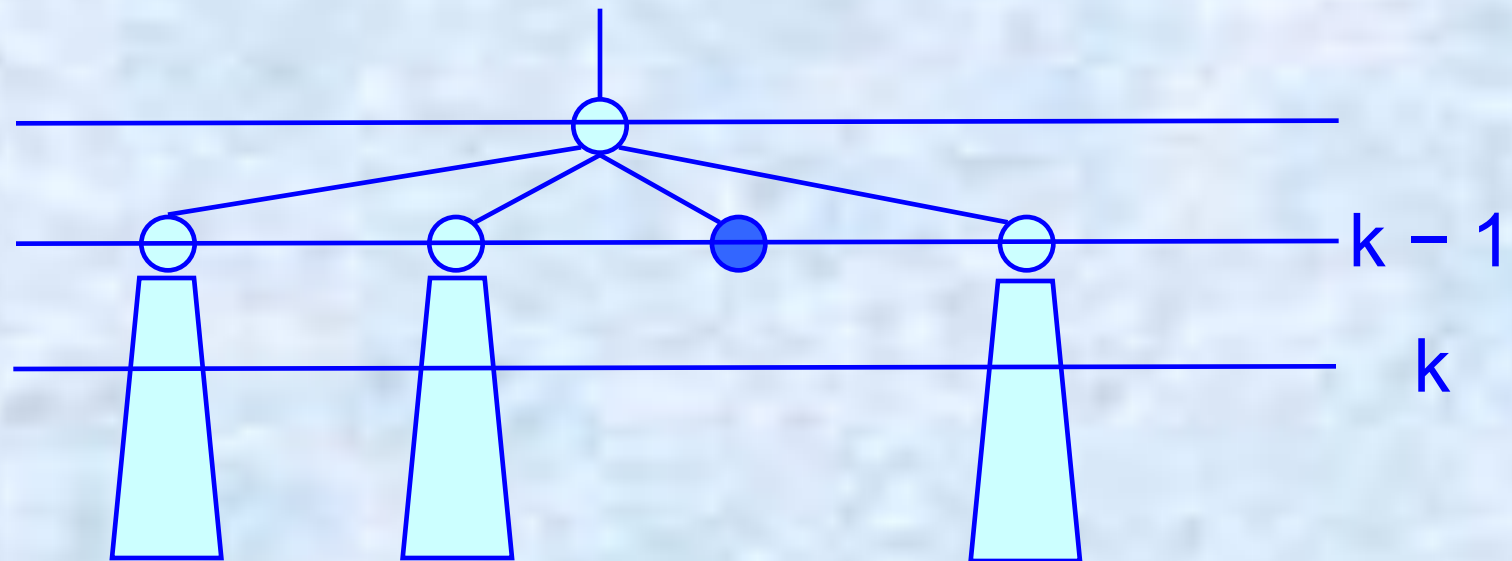
См. файлы с результатами

- Queen
- Queen_re

Backtracking.

Другие способы программирования

1. Рекурсивный подход



```
void backtrack (sequence a, int k);
```

```
// a = (a1, a2, ..., ak-1) - частичное решение
```

```

void backtrack (sequence a, int k)
// a = (a1, a2, ..., ak-1) - частичное решение
{
  if (a - решение) {φ фиксировать a;}
  else {
    ВЫЧИСЛИТЬ Sk;
    for (∀ b ∈ Sk) backtrack ( postfix (a, b), k+1 );
  }
} // end - backtrack

```

```

/*Старт:*/ k = 1; a = Create; backtrack (a, k);

```

2. Макрокоманды

Уменьшение «накладных расходов»
(все решения одной длины n)

Макрокоманда

$CODE_k$: вычислить S_k ;

L_k : **if** $S_k = \emptyset$ **then goto** L_{k-1} ;

a_k = очередной элемент из S_k ;

$S_k := S_k - \{a_k\}$;

Цикл периода макрогенерации:

for (k = 1; k<=n; k++) CODE_k;

CODE₁;

CODE₂;

...

...

CODE_k;

...

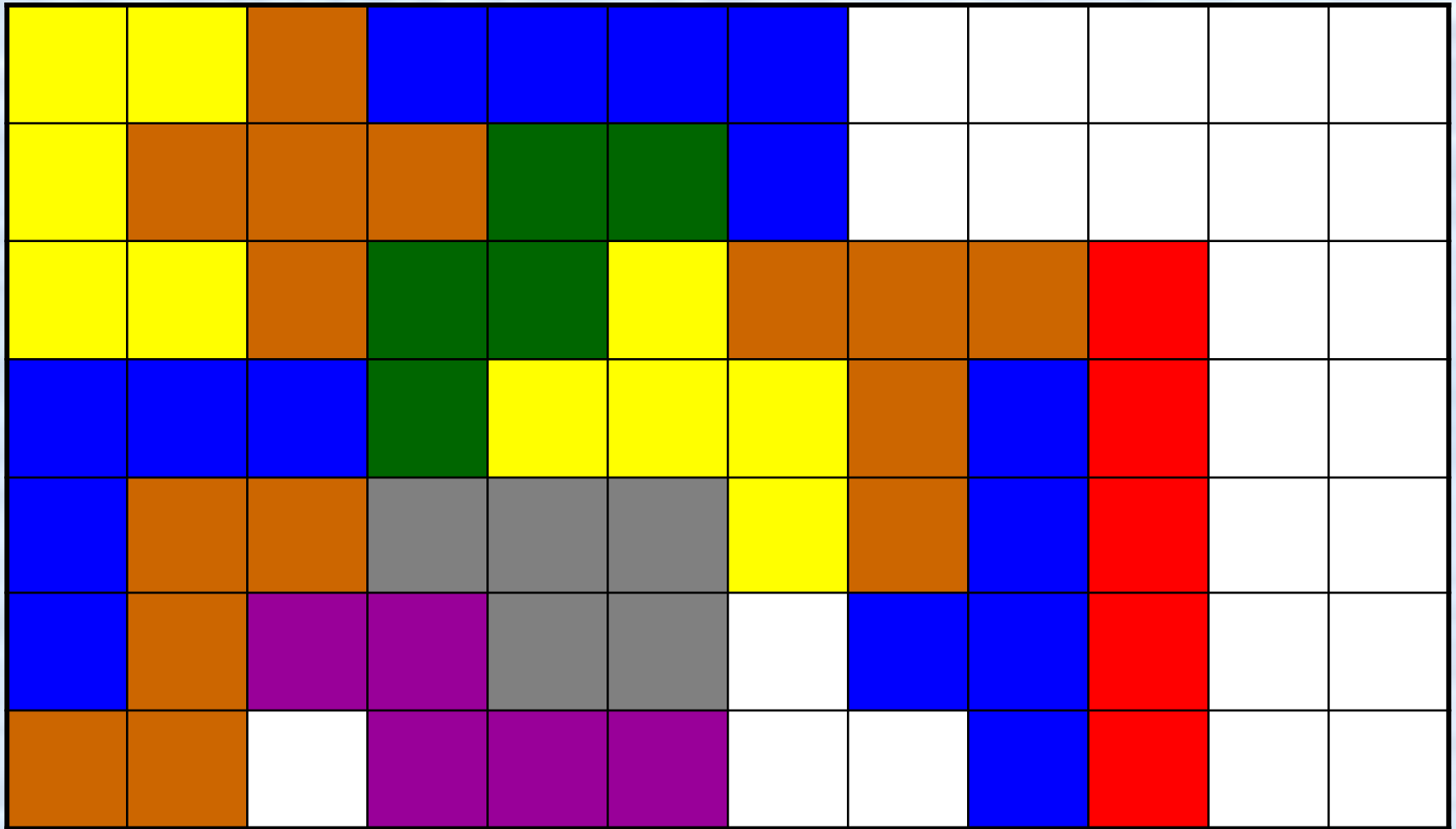
CODE_n;

фиксировать решение (a₁, a₂, ..., a_n);

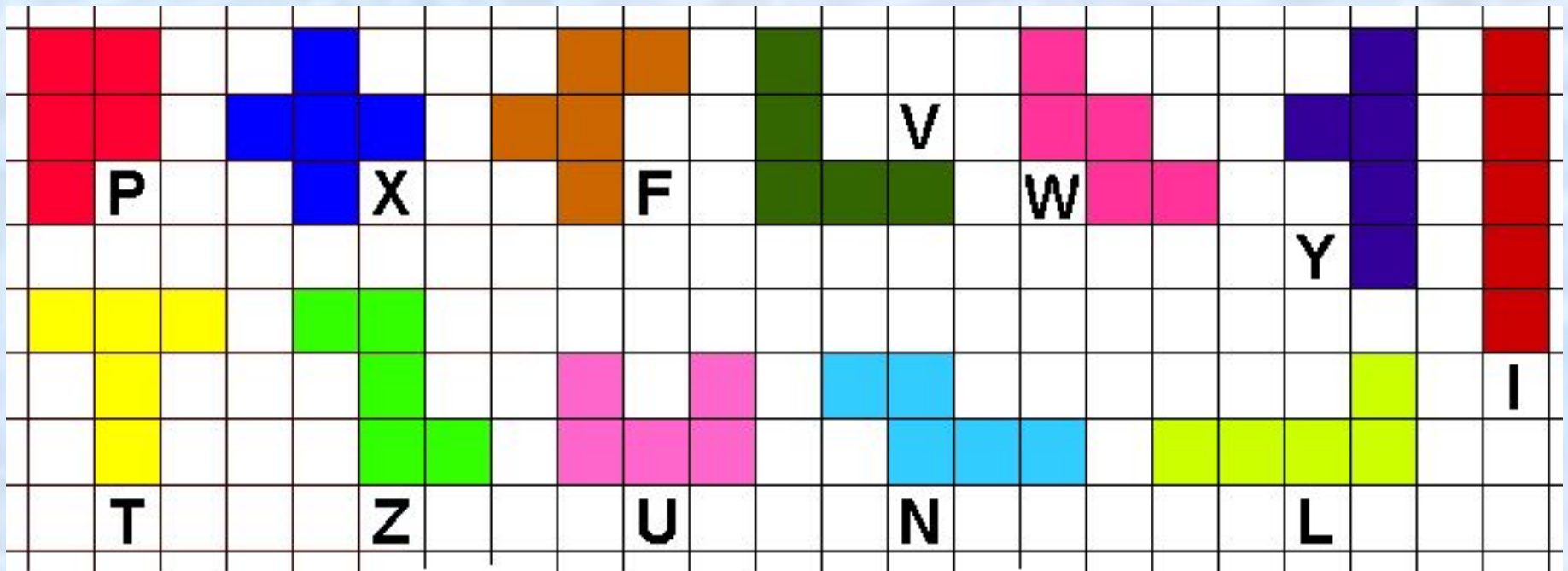
goto L_n;

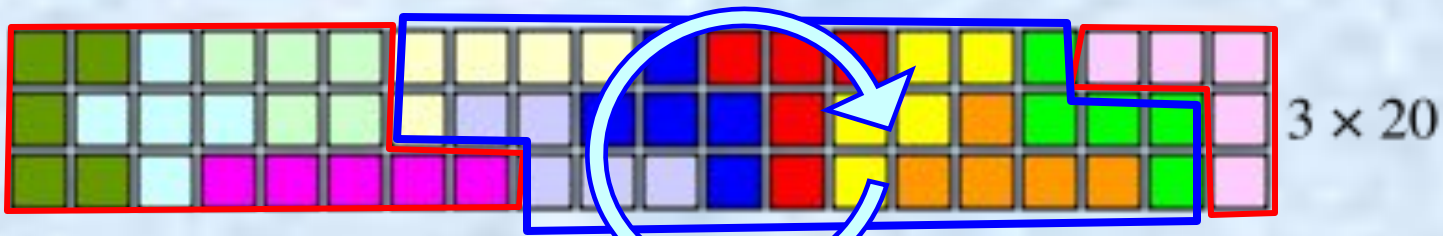
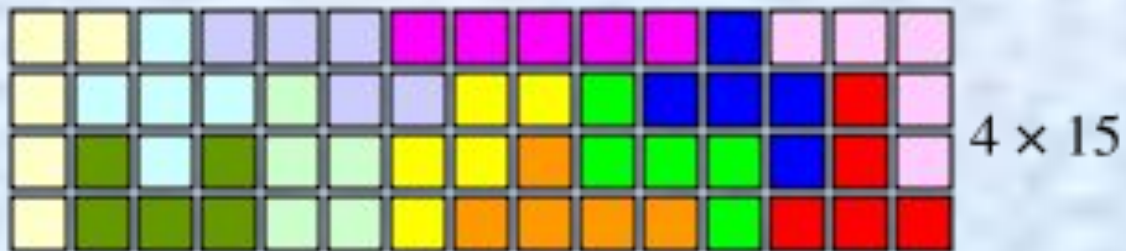
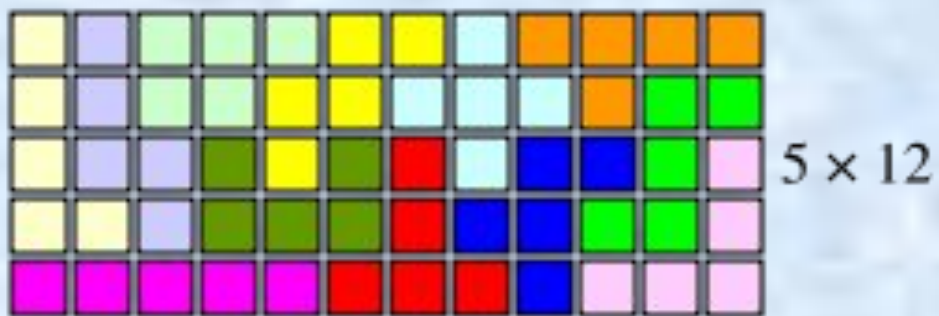
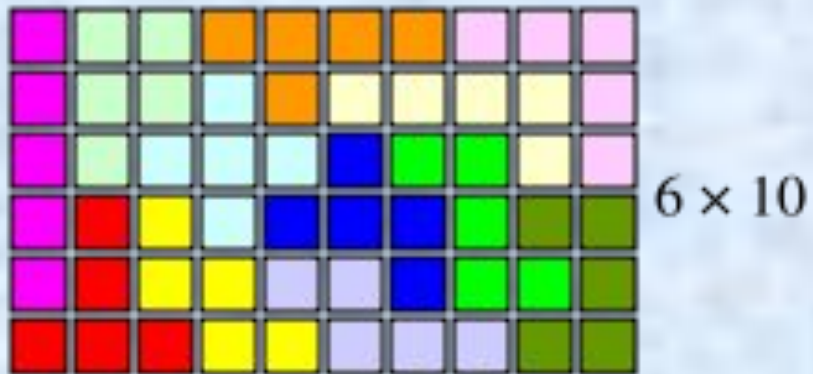
L₀: // конец - все решения найдены

Пентамино



Пентамино





Для случая 6×10 эту задачу впервые решил в 1965 году Джон Флетчер [1].

Существует ровно 2339 различных укладок пентамино в прямоугольник 6×10 , не считая поворотов и отражений целого прямоугольника, но считая повороты и отражения его частей

(иногда внутри прямоугольника образуется симметричная комбинация фигур, поворачивая которую, можно получить дополнительные решения; для прямоугольника 3×20 , приведённого на рисунке, второе решение можно получить поворотом блока из 7 фигур, или, иначе говоря, если поменять местами четыре фигуры, крайние слева, и одну крайнюю справа, см. предыдущий слайд).

Продолжение

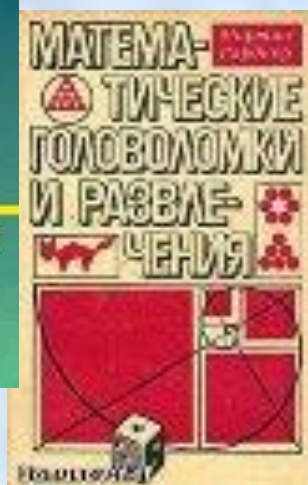
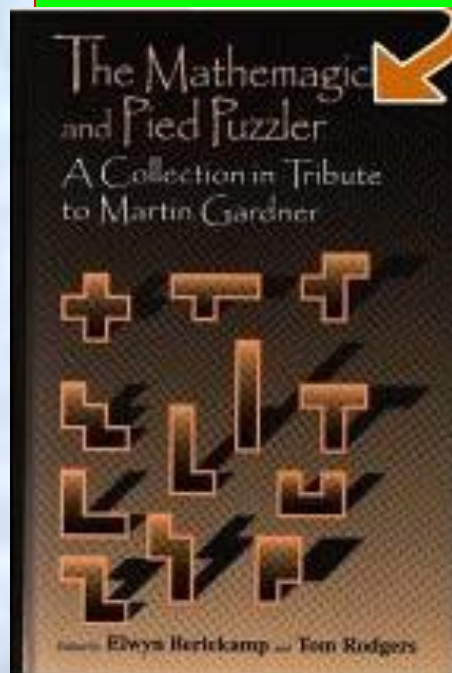
Для прямоугольника 5×12 существует **1010** решений,

4×15 — **368** решений,

3×20 — всего **2** решения.

John G. Fletcher (1965). "A program to solve the pentomino problem by the recursive use of macros". *Communications of the ACM* 8, 621-623.

Мартин Гарднер



10.02.2014

Поиск с возвратением

53

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ