Построение и анализ алгоритмов

Лекция 12

Раздел: Алгоритмы на графах

Тема лекции:

Кратчайшие пути в графе (2)

Расстояния ***между всеми*** парами вершин

Найти расстояния $d(s, t)$: $\forall\ s, t \in V\ \&\ (s \neq t)$.

$$\boxed{d(u,v) = \min_{p \in P(u,v)} d_p[u,v] - \text{"расстояние"}}$$

$$d_p[u,v] = \sum_{i=1}^{k-1} w(v_i, v_{i+1}) = \sum_{(v' \to v'') \in p} w(v', v'')$$

Часть 1 лекции. Вспомогательная тема:

Транзитивное замыкание графа. Алгоритм Уоршалла (Warshall)

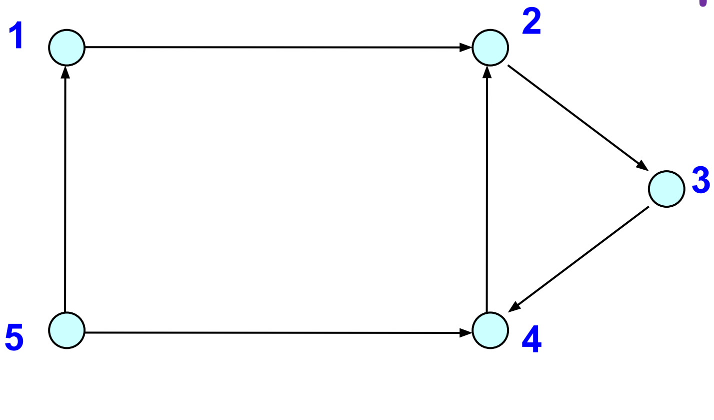
Задан ориентированный граф $G = (V, E)$.

Транзитивное замыкание графа G есть граф G^*, состоящий из тех же вершин, т.е. $G^* = (V, E^*)$, а множество рёбер E^* есть

$$E^* = \{(u, v): (u \in V) \;\&\; (u \in V) \;\&$$

$$\& \text{ (существует путь из } u \text{ в } v \text{ в графе } G) \}.$$

Пример



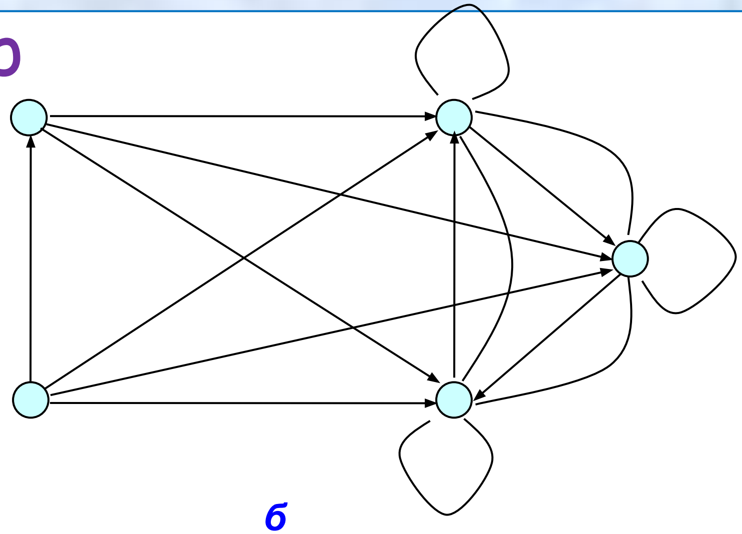


Рис. *а* – граф *G* и *б* – его транзитивное замыкание *G**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрица путей

Матрица путей (или матрица достижимости) P графа G :

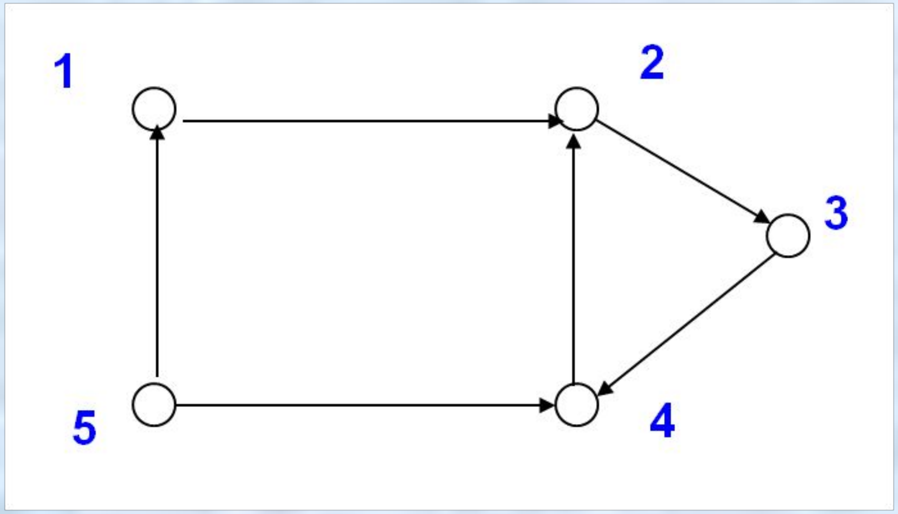
$p_{ij} = 1$, если существует путь из вершины в вершину в графе G, и

$p_{ij} = 0$ в противном случае.

Матрица путей P графа G совпадает с матрицей смежности A^* его транзитивного замыкания G^*.

Степени матрицы смежности

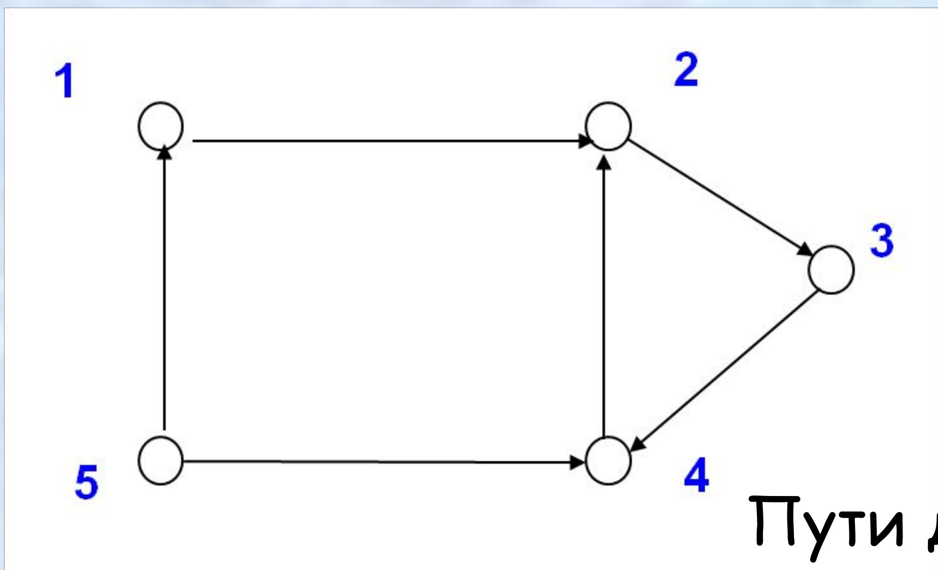
$$A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

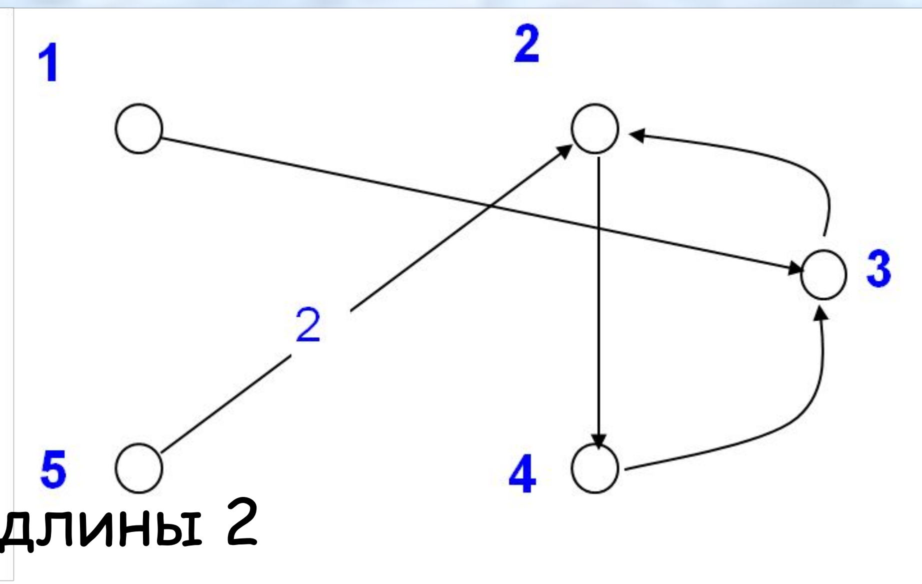


Пути длины 1

Степени матрицы смежности

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





Пути длины 2

Степени матрицы смежности

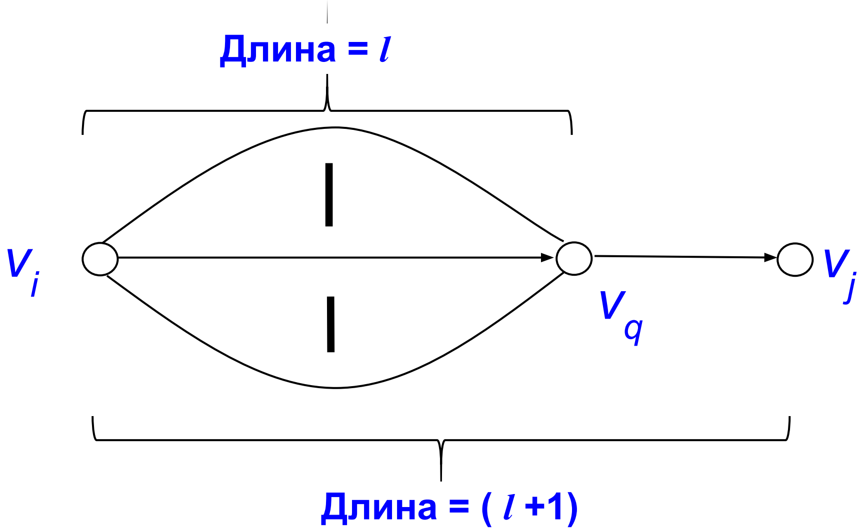
Утверждение.

Пусть A есть матрица смежности графа G.

Элемент $a_{ij}^{(k)}$ матрицы A^k

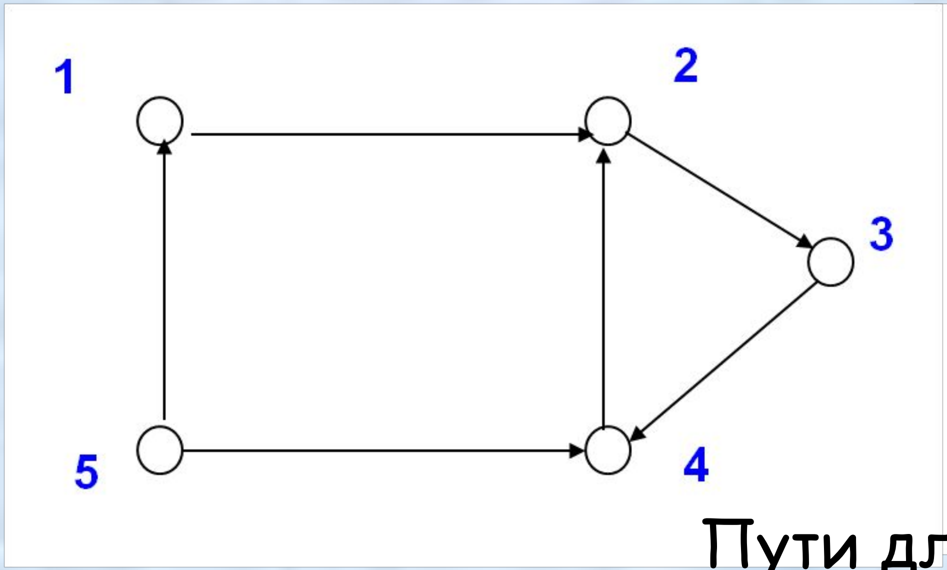
равен числу путей длины k из вершины v_i в вершину v_j ($v_i \in V$, $v_j \in V$).

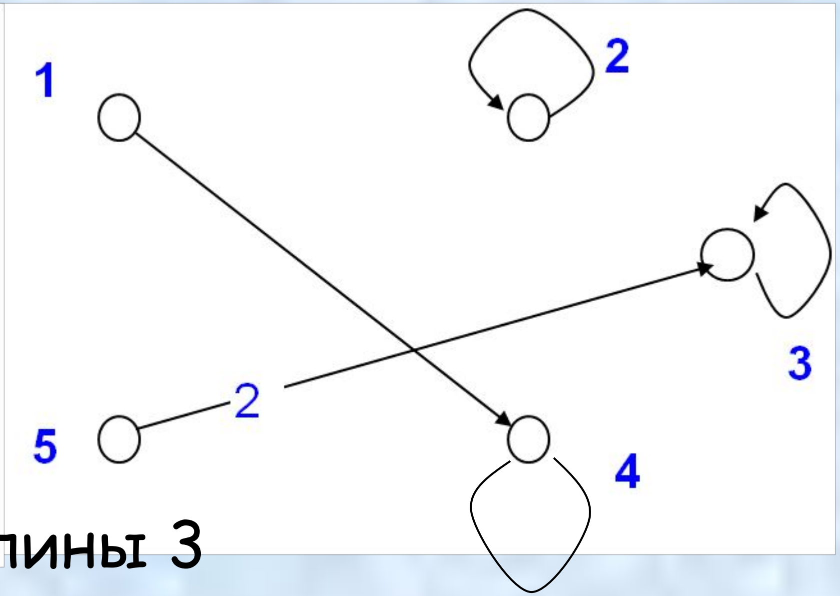
$$a_{ij}^{(l+1)} = \sum_{q=1}^{n} a_{iq}^{(l)} a_{qj}$$



Степени матрицы смежности

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

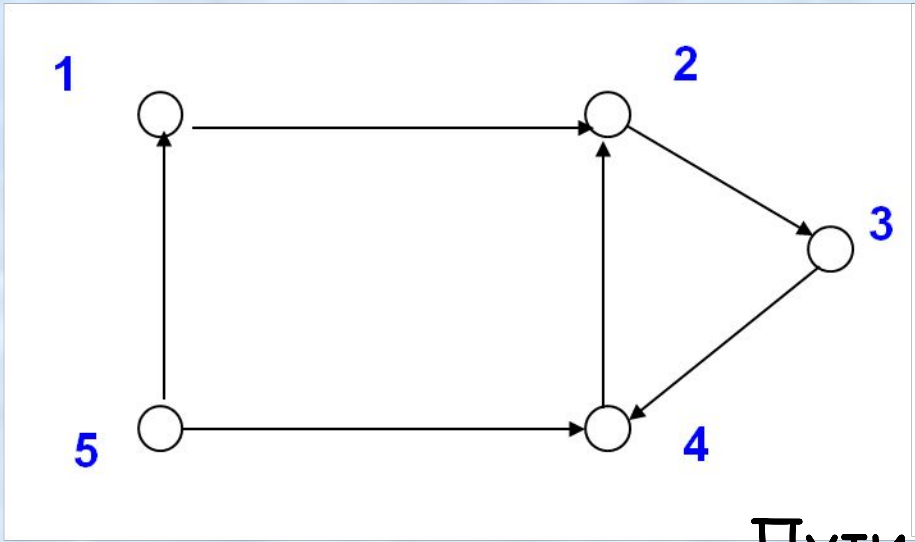


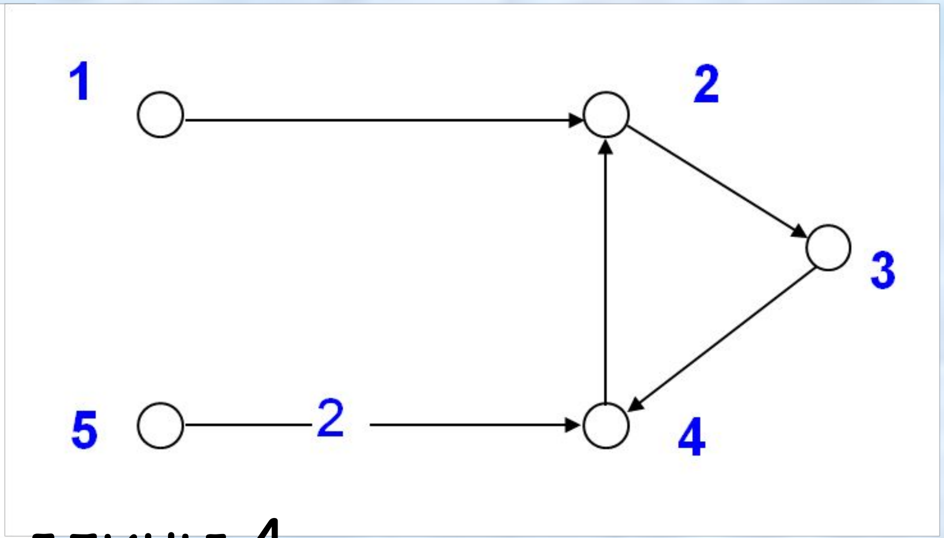


Пути длины 3

Степени матрицы смежности

$$A^4 = A^3 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

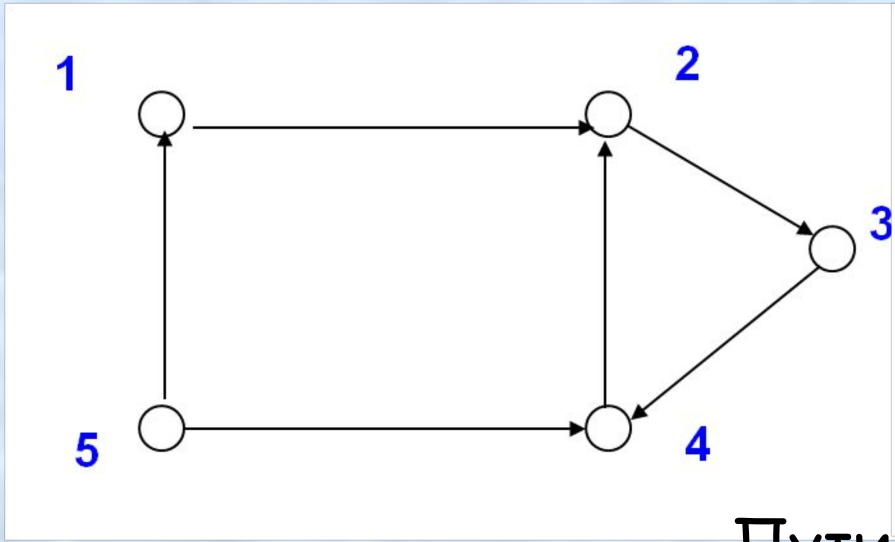


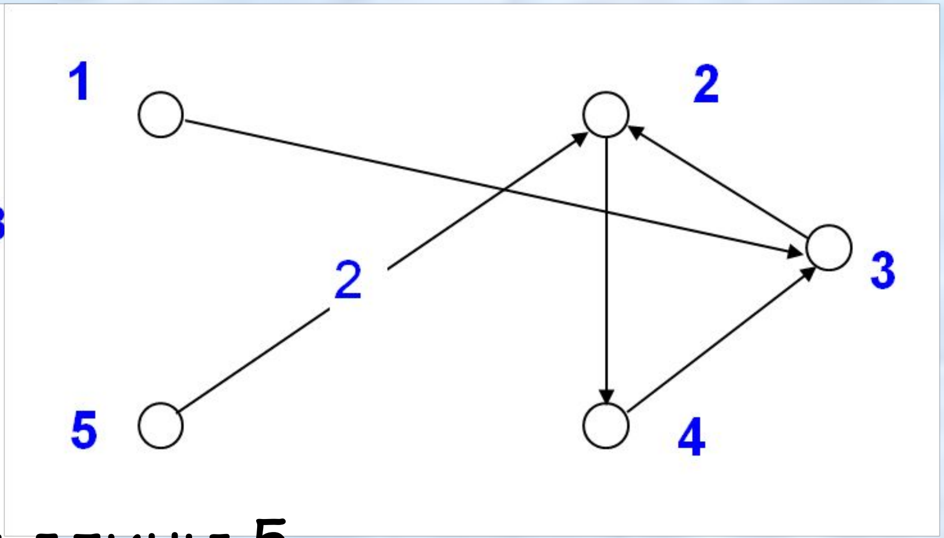


Пути длины 4

Степени матрицы смежности

$$A^5 = A^4 A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A^2$$





Пути длины 5

Степени матрицы смежности

$$A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{n-1}$$

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } q_{ij} \neq 0; \\ 0, & \text{если } q_{ij} = 0. \end{cases}$$

Т.к. перемножение матриц осуществляется за время $O(n^3)$, то вычислить матрицу P можно за $O(n \cdot n^3) = O(n^4)$ операций.

Определение операции умножения и сложения **булевских** матриц

$$C = A \cdot B \leftrightarrow c_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} a_{ik} \,\&\, b_{kj}, \qquad \forall i, j \in 1..n$$

$$C = A + B \leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij}, \qquad \forall i, j \in 1..n$$

$$P = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{n-1}$$

$$\textit{Если положить } a_{ii} = 1 \textit{ для } \forall i \in 1..n, \textit{ то}$$

$$P = A^{n-1}$$

$\boxed{O(n^3 \log n),}$

Далее
Алгоритм Уоршалла (Warshall)

См. далее текстовый файл

«Лекция 12 Кратч пути (2) 05-05-2014.doc»

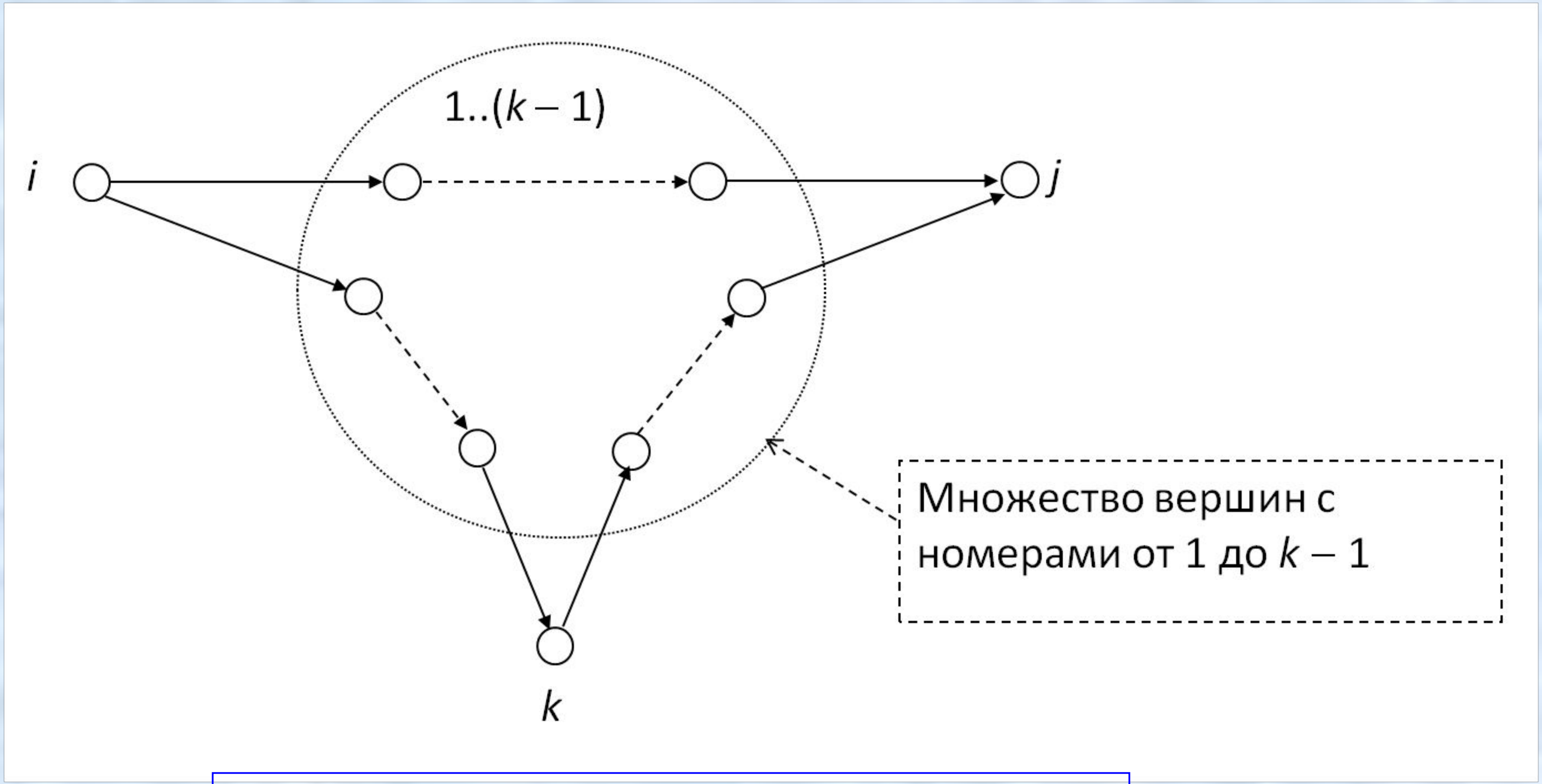
Алгоритм Уоршалла (Warshall)

- Пусть вершины графа пронумерованы числами от 1 до n.
- Нас будут интересовать пути, проходящие через промежуточные вершины из некоторого определенного множества.

Определим булевские величины $b_{ij}^{(k)}$

$b_{ij}^{(k)} = (\exists$ путь из вершины i в вершину j , проходящий через промежуточные вершины только из множества вершин с номерами от 1 до $k)$

Алгоритм Уоршалла



$$b_{ij}^{(k)} = b_{ij}^{(k-1)} \vee (b_{ik}^{(k-1)} \,\&\, b_{kj}^{(k-1)})$$

$$B^{(0)} = A,\ B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(n)}$$

{Инициализация: }

{1} **for** *i* := 1 **to** *n* **do**

{2} **for** *j* := 1 **to** *n* **do**

{3} **if** *i* = *j* **then** $b_{ij}^{(0)} := 1$ **else** $b_{ij}^{(0)} := a_{ij}$

{4} **for** *k* := 1 **to** *n* **do**

{5} **for** *i* := 1 **to** *n* **do**

{6} **for** *j* := 1 **to** *n* **do**

{7} $b_{ij}^{(k)} := b_{ij}^{(k-1)} \vee (b_{ik}^{(k-1)} \,\&\, b_{kj}^{(k-1)})$

Далее см. файл«Лекция 12 Кратч пути (2) 05-05-2014.doc»

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ