

Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций

- Интегрирование тригонометрических функций
- Интегрирование иррациональных функций

Интегрирование тригонометрических функций

Универсальная тригонометрическая подстановка

Функцию с переменными $\sin x$ и $\cos x$, над которыми выполняются рациональные действия принято обозначать

$$R(\sin x; \cos x)$$

Вычисление неопределенных интегралов типа:

$$\int R(\sin x; \cos x) dx$$

Знак рациональной функции

сводится к вычислению интегралов от рациональной функции с помощью подстановки, которую называют универсальной:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Интегрирование тригонометрических функций

На практике применяют и другие, более простые подстановки, в зависимости от вида подынтегральной функции $R(\sin x; \cos x)$

- Если функция нечетна относительно $\sin x$, то есть:

$$R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$$

то применяется подстановка $\cos x = t$.

- Если функция нечетна относительно $\cos x$, то есть:

$$R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$$

то применяется подстановка $\sin x = t$.

- Если функция четна относительно $\cos x$ и $\sin x$, то есть:

$$R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x) \quad \text{тогда:}$$

$$\operatorname{tg} x = t \Rightarrow \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}; dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = \left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$
$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{\frac{1+t^2 + 2t + 1-t^2}{1+t^2} \cdot (1+t^2)} =$$
$$= \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right| + C$$

Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы типа: $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

Используются следующие подстановки:

- Если n – целое положительное нечетное число: $\sin x = t$
- Если m – целое положительное нечетное число: $\cos x = t$

В этих двух случаях можно также произвести «отщепление» одной из нечетных степеней с последующим внесением под знак дифференциала.

- Если m и n - целые неотрицательные четные числа, то применяются формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x); \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

- Если $m + n$ - отрицательное четное целое число, то применяется подстановка: $\operatorname{tg} x = t$

Интегрирование тригонометрических функций

$$\begin{aligned}\int \sin^7 x \cos^3 x dx &= \int \sin^7 x \cos^2 x \cos x dx = \\ \int \sin^7 x (1 - \sin^2 x) d(\sin x) &= \int (\sin^7 x - \sin^9 x) d(\sin x) = \\ &= \frac{\sin^8 x}{8} - \frac{\sin^{10} x}{10} + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x dx &= \int \left(\frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \right)^2 dx = \\ \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx &= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \\ \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) dx &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 2x + C\end{aligned}$$

Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы типа:

$$\int \sin ax \cdot \cos bx \, dx; \quad \int \cos ax \cdot \cos bx \, dx; \quad \int \sin ax \cdot \sin bx \, dx$$

Вычисляются с помощью формул тригонометрии:

$$\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = 0.5(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta));$$

$$\cos \alpha x \cdot \cos \beta x = 0.5(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta));$$

$$\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = 0.5(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\int \sin 8x \cos 2x \, dx = 0.5 \int (\sin 10x + \sin 6x) \, dx =$$

$$0.5 \left(-\frac{1}{10} \cos 10x - \frac{1}{6} \cos 6x \right) + C =$$

$$-\frac{1}{20} \cos 10x - \frac{1}{12} \cos 6x + C$$

Интегрирование иррациональных функций

Рассмотрим интегралы от некоторых иррациональных функций, которые с помощью подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной.

● Интегралы вида: $\int R(x, \sqrt[m]{x^\alpha}, \sqrt[n]{x^\beta}) dx$

сводятся к интегралу от рациональной функции подстановкой $x = t^N$ где N – наименьшее общее кратное (НОК) значений m и n .

● Интегралы вида: $\int R(x, \sqrt[m]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\alpha}, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\beta}) dx$

где a, b, c, d – постоянные, приводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^N \quad \text{где } N \text{ – наименьшее общее кратное } m \text{ и } n.$$

Интегрирование иррациональных функций

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3 + 4}} &= \left[\begin{array}{l} \text{НОК}(2; 4) = 4 \\ x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array} \right] = \int \frac{t^2 \cdot 4t^3 dt}{t^3 + 4} = \\ &= 4 \int \frac{t^5 dt}{t^3 + 4} = \left(\frac{t^5}{t^3 + 4} \middle| \frac{t^3 + 4}{-4t^2} \right) = 4 \int \left(t^2 - \frac{4t^2}{t^3 + 4} \right) dt \\ &= 4 \int t^2 dt - \frac{16}{3} \int \frac{d(t^3 + 4)}{t^3 + 4} = \frac{4}{3} t^3 - \frac{16}{3} \ln|t^3 + 4| + C = \\ &= \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} - \frac{16}{3} \ln|\sqrt[4]{x^3} + 4| + C \end{aligned}$$

Интегрирование иррациональных функций

- Иррациональные функции вида: $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ выделением полного квадрата сводятся к 3-м видам функций, для каждой, из которой применяется свой вид подстановки:

1) $R(u, \sqrt{a^2 - u^2})$ подстановка: $u = a \cdot \sin t$

2) $R(u, \sqrt{a^2 + u^2})$ подстановка: $u = a \cdot \operatorname{tg} t$

3) $R(u, \sqrt{u^2 - a^2})$ подстановка: $u = \frac{a}{\cos t}$

Интегрирование иррациональных функций

$$\begin{aligned} \int \sqrt{3 - 2x - x^2} dx &= \int \sqrt{3 - (x^2 + 2x)} dx = \int \sqrt{4 - (x + 1)^2} dx \\ &= \left[\begin{array}{l} u = x + 1 \\ du = dx \end{array} \right] = \int \sqrt{4 - u^2} du = \left[\begin{array}{l} u = 2 \sin t \\ du = 2 \cos t dt \end{array} \right] = \\ &= \int \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = \int 2 \sqrt{\cos^2 t} \cdot 2 \cos t dt = \\ &= 4 \int \cos^2 t dt = 4 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 2t + \sin 2t + C = \\ &\left[\sin t = \frac{u}{2} \Rightarrow \sin 2t = 2 \sin t \cos t = u \sqrt{1 - \frac{u^2}{4}} = \frac{x + 1}{2} \sqrt{3 - 2x - x^2} \right. \\ &\left. t = \arcsin \frac{x + 1}{2} \right] = 2 \arcsin \frac{x + 1}{2} + \frac{x + 2}{2} \sqrt{3 - 2x - x^2} + C \end{aligned}$$

Интегрирование иррациональных функций

● Интегралы вида: $\int x^m (ax^n + b)^p dx$ $m, n, p \in R$

Сводятся к интегралам от рациональных функций в трех случаях;:

1) $p \in Z$ получается интеграл, рассмотренный в первом пункте.

2) $\frac{m+1}{n} \in Z$ подстановка: $ax^n + b = t^s$

3) $\frac{m+1}{n} + p \in Z$ подстановка: $a + bx^{-n} = t^s$

Знаменатель
дроби p

Знаменатель
дроби p

Интегрирование иррациональных функций

$$\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{-\frac{2}{3}} (1 + x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} m = -\frac{2}{3}; n = \frac{1}{3}; p = \frac{1}{2}; \quad \frac{m+1}{n} = 1 \in \mathbb{Z} \\ 1 + x^{\frac{1}{3}} = t^2; \quad x = (t^2 - 1)^3; \quad dx = 3(t^2 - 1)^2 \cdot 2t dt \end{array} \right] =$$

$$\int \left((t^2 - 1)^3 \right)^{-\frac{2}{3}} (t^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 3(t^2 - 1)^2 \cdot 2t dt = 6 \int t^2 dt =$$

$$= 2t^3 + C = 2 \left(\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}} \right)^3 + C$$