Транспортная задача линейного программирования

Постановка транспортной задачи

- Однородный груз, имеющийся в m пунктах отправления (производства) A_1, A_2, ..., A_m соответственно в количествах a_1, a_2, ..., a_m единиц, требуется доставить в каждый из n пунктов назначения (потребления) B_1, B_2, ..., B_n соответственно в количествах b_1, b_2, ..., b_n единиц. Стоимость перевозки (тариф) единицы продукции из A_i в B_j известна для всех маршрутов A_iB_j и c_{ij} (i=1..m; j=1..n). Требуется составить такой план перевозок, при котором весь груз из пунктов отправления вывозится и запросы всех пунктов потребления удовлетворяются (закрытая модель), т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} ai = \sum_{j=1}^{n} bj$$

- а суммарные транспортные расходы минимальны.

Математическая модель транспортной задачи

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} Cij\ Xij \to \min$$

$$\begin{cases} X11+X11+\ldots+X1n=a1 \\ X21+X22+\ldots+X2n=a2 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ Xm1+Xm2+\ldots+Xmn=am \\ X11+X21+\ldots+Xm1=b1 \\ X12+X22+\ldots+Xm2=b2 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ X1n+X2n+\ldots+Xmn=bn \\ Xij>=0,\ i=1,m;\ j=1,n \end{cases}$$

- Будем называть любой план перевозок допустимым, если он удовлетворяет системам ограничений и требованием неотрицательности.
- Допустимый план, будем называть **опорным** , если в нем отличны от нуля не более m+n-1 базисных перевозок, а остальные перевозки равны 0.
- План будет называться **оптимальным** , если он, среди всех допустимых планов, приводит к максимальной суммарной стоимости перевозок.

Методы решения транспортных задач

- Так как транспортная задача является задачей линейного программирования, то её можно решать симплекс-методом, но в силу своей особенности её можно решить гораздо проще.
- Условия задачи удобно располагать в таблице, вписывая в ячейки количество перевозимого груза из Ai в Bj груза Xij>=0, а в маленькие клетки - соответствующие тарифы Cij.

Потребители / Поставщики	B1	B2	...	Bn	Запасы
A1	X11 C11	X12 C12	...	X1n C1n	a1
A2	X21 C21	X22 C22	...	X2n C2n	A2
...	...	...	...	...	...
Am	Xm1 Cm1	Xm2 Cm2	...	Xmn Cmn	am
Потреб-ности	b1	b2	...	bn	

Методы решения транспортных задач

- **Затем решение задачи разбивается на два этапа:**
  1. Определение опорного плана
  2. Нахождение оптимального решения, путем последовательных операций
- Найдем в начале допустимое (опорное) решение транспортной задачи. Это решение можно находить, используя **метод "северо-западного угла"** или метод **"минимального элемента"**.
- **Метод северо-западного угла (диагональный).** Сущность способа заключается в том, что на каждом шаге заполняется левая верхняя клетка (северо-западная) оставшейся части таблицы, причем максимально возможным числом: либо полностью выносится груз из Ai, либо полностью удовлетворяется потребность Bj. Процедура продолжается до тех пор, пока на каком-то шаге не исчерпаются запасы ai и не удовлетворятся все потребности bj. В заключении проверяют, что найденные компоненты плана Xij удовлетворяют горизонтальным и вертикальным уравнениям.
- **Метод наименьшего элемента.** Сущность способа в том, что на каждом шаге заполняется та клетка оставшейся части таблицы, которая имеет наименьший тариф; в случае наличия нескольких таких равных тарифов заполняется любая из них. В остальном действуют аналогично предыдущему способу.

Метод северо-западного угла

- Начнем заполнение с клетки, расположенной вверху слева, то есть с "северо-западного угла". Вместо x_{11} впишем число $x_{11}=\min(a_1, b_1)$. Возможны два варианта.

1. $\min(a_1, b_1)=a_1$, то есть $a_1<b_1$. Тогда, запланировав перевозку из первого склада в первый пункт потребления в объеме a_1 мы полностью опустошим первый склад и там ничего не останется. Поэтому все остальные перевозки из первого склада могут быть только нулевые. Ну, а потребность в первом пункте потребления останется в объеме b_1-a_1.

- Обратите внимание на то, что оставшаяся незаполненной часть таблицы вновь по структуре та же, что и исходная таблица, только в ней **на одну строку меньше**.

Метод северо-западного угла

- Наша таблица примет вид:

a_1	0	0	…	0	0
					a_2
					a_3
					…
					a_m
b_1-a_1	b_2	b_3	…	b_n	

Метод северо-западного угла

2. $\min(a_1, b_1)=b_1$, то есть $b_1<a_1$. Тогда, запланировав перевозку из первого склада в первый пункт потребления в объеме b_1, мы полностью удовлетворим его потребности. Перевозить туда больше будет ничего не надо, поэтому остальные перевозки туда будут равны нулю.

- Ну, а в первом складе еще останется a_1-b_1 запасов продукта. Обратите внимание на то, что оставшаяся незаполненной часть таблицы вновь по структуре та же, что и исходная таблица, только в ней **на один столбец меньше**.
- Ну, а дальше все можно повторить, продолжая заполнять оставшуюся часть таблицы перевозок начиная с левого верхнего, "северо-западного" угла, пока не будут исчерпаны запасы всех складов и не удовлетворены потребности всех пунктов потребления.

Метод северо-западного угла

- Наша таблица примет вид:

b_1	0	0	…	0	a_1-b_1
					a_2
					a_3
					…
					a_m
0	b_2	b_3	…	b_n	

Метод северо-западного угла

- У нас всего в таблице m строк и n столбцов. Каждый раз исчезает, как минимум, либо строка, либо столбец (могут исчезнуть сразу и строка, и столбец, если запасы какого-то подмножества складов полностью удовлетворят потребности какого-то подмножества пунктов потребления). Однако при последней перевозке исчезает сразу и последняя строка, и последний столбец. Поэтому получающийся план перевозок содержит **не более** $m+n-1$ компонент.
- Мы не будем доказывать, что план, полученный методом северо-западного угла, является опорным. Заметим лишь, что если получающийся план содержит **ровно** $m+n-1$ компоненту, то он называется **невырожденным**. Если число положительных компонент плана перевозок **меньше**, то он называется **вырожденным.**

Метод северо-западного угла

- Рассмотрим задачу.
- Фирма должна отправить некоторое количество кроватей с трёх складов в пять магазинов. На складах имеется соответственно 15, 25 и 20 кроватей, а для пяти магазинов требуется соответственно 20, 12, 5, 8 и 15 кроватей. Стоимость перевозки одной кровати со склада в магазин приведены в таблице.

Склады	Магазины				
	B1	B2	B3	B4	B5
A1	1	0	3	4	2
A2	5	1	2	3	3
A3	4	8	1	4	3

Решение

- Построим опорный план для рассмотренной выше задачи. В начале построим его с помощью метода **"северно-западного угла"**
- **Исходная транспортная таблица:**

	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	1	0	3	4	2	15
A2	5	1	2	3	3	25
A3	4	8	1	4	3	20
	20	12	5	8	15	

Метод минимального (максимального) элемента

- Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую и в клетку, которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел a_i и b_j. Затем из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо и строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя. Из оставшейся части таблицы стоимостей снова выбирают наименьшую стоимость, и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Задание

- Составить первоначальный опорный план методом минимального элемента для транспортной задачи вида:

2	3	4	15
11	6	10	1
8	9	3	3
4	1	2	21
10	20	10	

Задание

- Найти опорный план для задачи

	Поставщики	Потребители				Запасы груза
		B_1	B_2	B_3	B_4	
	A_1	2	6	3	1	11
X=	A_2	3	7	8	5	11
	A_3	9	2	4	5	8
	Потребность в грузе	5	9	9	7	**30**