

# Распределительный метод

---

# Рассмотрим пример

---

- Пусть задана некоторая транспортная задача и соответствующая ей транспортная таблица

2	3	4	15
11	6	10	1
8	9	3	3
4	1	2	21
10	20	10	

---

# Получим опорный план

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	2 10	3 5	4	15
$A_2$	11	6 1	10	1
$A_3$	8	9 3	3	3
$A_4$	4	1 11	2 10	21
	10	20	10	

# Улучшение плана перевозок

---

- Стоимость этого плана равна:
  - $L = 10 \times 2 + 5 \times 3 + 1 \times 6 + 3 \times 9 + 11 \times 1 + 10 \times 2 = 99$ .
  - Попробуем улучшить полученный план, перенеся, как показано в приведенной выше таблице, 3 единицы из клетки (3,2) в клетку (3,3) и, чтобы не нарушать баланса, перенесем те же 3 единицы из клетки (4,3) в клетку (4,2). В результате переноса мы получили новый план перевозок, который тоже будет допустимым, так как переброску груза с одного маршрута на другой мы осуществляли циклически, заботясь о сохранении баланса заявок и запасов.
-

# Цикл переноса

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	10	5		15
$A_2$		1		1
$A_3$		3		3
$A_4$		11		21
	10	20	10	

  

The diagram illustrates a carry cycle between columns  $B_2$  and  $B_3$ . In row  $A_3$ , column  $B_2$  contains a minus sign (-) and column  $B_3$  contains a plus sign (+). In row  $A_4$ , column  $B_2$  contains a plus sign (+) and column  $B_3$  contains a minus sign (-). Lines connect the signs horizontally and vertically, forming a cycle.

# Новый план перевозок

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	2 10	3 5	4 15	
$A_2$	11 1	6 1	10 3	1
$A_3$	8 3	9 3	3 3	3
$A_4$	4 14	1 7	2 21	
	10	20	10	

# Цикл пересчета

---

- Стоимость этого плана равна:
  - $L = 10 \times 2 + 5 \times 3 + 1 \times 6 + 3 \times 3 + 14 \times 1 + 7 \times 2 = 78$ .
  - Очевидно, что полученный план перевозок по стоимости предпочтительнее первоначального опорного плана.
  - Из приведенной таблицы видно, что за счет циклической перестановки грузоперевозок объемом 3 единицы по маршрутам  $(3,2)^-$ ,  $(3,3)^+$ ,  $(4,3)^-$ ,  $(4,2)^+$  удалось понизить стоимость плана перевозок на 126 условных единиц стоимости.
  - Здесь следует обратить внимание на следующее равенство:
  - $78 - 99 = -21 = 3 \times (-9 + 3 - 2 + 1) = 3 \times (-7)$ .
  - Рассмотрев на практическом примере принципы, лежащие в основе методов улучшения планов перевозок, формально определим некоторые из использованных нами при этом понятий.
-

# Цикл пересчета. Определение

---

- Итак, циклом в транспортной таблице назовем несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией, которая в каждой клетке совершает поворот на угол, равный  $90^\circ$ . Условимся помечать символами (+) те вершины ломаной линии, образующей цикл, в которых объемы перевозок увеличивается, а символом (-) те вершины цикла, в которых они уменьшаются.
  - Очевидно, что прямоугольник представляет собой наиболее простой случай такой замкнутой ломаной линии.
  - Цикл с отмеченными вершинами будем называть «означенным». Перенести какое-то количество единиц груза по означенному
  - циклу – это означает увеличить объемы перевозок в положительных вершинах (вершинах, помеченных символом «+») на это количество единиц и одновременно с этим уменьшить перевозки на то же количество в отрицательных вершинах (вершинах, помеченных символом «-»).
  - Очевидно что, при переносе любого числа единиц по циклу равновесие между запасами и заявками не меняется.
  - Назовем ценой (стоимостью) цикла ( $g$ ) – алгебраическую сумму стоимостей, стоящих в вершинах цикла, с учетом знака этих вершин, например:
    - $g_1 = c_{21} - c_{23} + c_{43} - c_{41}$ ,
    - $g_2 = c_{34} - c_{35} + c_{55} - c_{54} + c_{14} - c_{16}$ .
-

# Распределительный метод решения транспортной задачи

---

- Данный метод состоит в последовательном улучшении опорного плана перевозок путем отыскания на каждом шаге выгодных циклов переноса грузов.
  - Более подробно рассмотрим теперь процесс формирования очередного цикла переноса на каждом новом шаге алгоритма.
  - Очевидно, что при перемещении  $x$  единиц груза по некоторому циклу с ценой  $g$  стоимость перевозок изменяется на величину  $X \times g$ .
  - Тогда, для улучшения текущего плана перевозок имеет смысл перемещать перевозки только по тем циклам, цена которых отрицательна.
  - Если циклов с отрицательной ценой в таблице больше не осталось, это означает, что оптимальный план достигнут.
  - При улучшении плана циклическими переносами пользуются приемом, заимствованным из симплекс-метода: на каждом шаге (цикле) заменяют одну свободную переменную на базисную, т.е. заполняют одну клетку и взамен того освобождают одну из базисных клеток.
  - Можно доказать, что для любой свободной клетки транспортной таблицы всегда существует цикл (и притом единственный), одна из вершин которого лежит в этой клетке, а все остальные в базисных клетках. Если цена такого цикла, с плюсом в свободной клетке, отрицательна, то план можно улучшить. Количество единиц груза ( $x$ ), которые можно переместить, определяется минимальным значением перевозок, стоящих в отрицательных вершинах цикла.
-

# Имеем опорный план

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	2 10	3 5	4	15
$A_2$	11	6 1	10	1
$A_3$	8	9 3	3	3
$A_4$	4	1 11	2 10	21
	10	20	10	

# Улучшим полученный план

---

- Вычислим цену цикла для каждой свободной клетки. Количество свободных клеток в транспортной таблице данного опорного плана равно:  $k = 6$ .
  - $Y_{13} = 4 - 3 + 1 - 2 = 0$
  - $Y_{21} = 11 - 2 + 3 - 6 = 6$
  - $Y_{23} = 10 - 6 + 1 - 2 = 3$
  - $Y_{31} = 8 - 2 + 3 - 9 = 0$
  - $Y_{33} = 3 - 9 + 1 - 2 = -7$
  - $Y_{41} = 4 - 2 + 3 - 1 = 4$
-

# Пересчет перевозок

---

- Для всех свободных переменных (клеток) с отрицательной ценой цикла вычислим максимальное количество груза, которое можно перенести по соответствующему циклу. Очевидно, что максимальное количество груза, которое можно переместить по некоторому выбранному циклу будет равно минимальному значению груза среди отрицательных клеток цикла.
  - $\max x_{33} = \min (3, 10) = 3$ .
  - Теперь для всех свободных переменных с отрицательной ценой циклов вычислим характеристику  $\gamma_{ij} \times \max x_{ij}$ . Полученные значения будем использовать при выборе конкретного цикла пересчета на данной итерации алгоритма.
  - Выберем ту свободную переменную, которой соответствует наименьшее значение величины  $\gamma_{ij} \times \max x_{ij}$  и перенесем единиц груза по циклу, соответствующему выбранной переменной:
  - $(ij) = (3,3); g_{33} = -7; \max x_{33} = 3; \gamma_{33} \times \max x_{33} = -21$ .
  - Таким образом, мы уменьшим значение целевой функции  $L$  – стоимость плана перевозок – на 21 единицу. Новому улучшенному плану перевозок будет соответствовать следующая таблица перевозок
-

# Новый план перевозок

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	2 10	3 5	4 15	
$A_2$	11 1	6 1	10 3	1
$A_3$	8 3	9 3	3 3	3
$A_4$	4 14	1 7	2 21	
	10	20	10	

# Улучшим полученный план

---

- Вычислим цену цикла для каждой свободной клетки. Количество свободных клеток в транспортной таблице данного опорного плана равно:  $k = 6$ .
  - $Y_{13} = 4 - 3 + 1 - 2 = 0$
  - $Y_{21} = 11 - 2 + 3 - 6 = 6$
  - $Y_{23} = 10 - 6 + 1 - 2 = 3$
  - $Y_{31} = 8 - 3 + 2 - 1 + 3 - 2 = 7$
  - $Y_{32} = 9 - 1 + 2 - 3 = 7$
  - $Y_{41} = 4 - 2 + 3 - 1 = 4$
  - Так как не существует циклов свободных переменных с отрицательной ценой, полученный план перевозок является оптимальным. Стоимость оптимального плана перевозок составляет 78 единиц.
-

# Решить задачу

---

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	10	7	6	8	31
$A_2$	5	6	5	4	48
$A_3$	8	7	6	7	38
	22	34	41	20	

---