Основная задача линейного программирования

Геометрическая интерпретация

Геометрическая интерпретация

- Для понимания всего дальнейшего полезно знать и представлять себе геометрическую интерпретацию задач линейного программирования, которую можно дать для случаев n=2 и n=3.
- Наиболее наглядна эта интерпретация для случая n=2, т.е. для случая двух переменных x_1 и x_2. Пусть нам задана задача линейного программирования в стандартной форме

$$
\begin{gathered}
c_1x_1+c_2x_2\to\max \\
a_{11}x_1+a_{12}x_2\le b_1, \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2\le b_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2\le b_m, \\
x_1\ge 0;\ x_2\ge 0.
\end{gathered}
$$

Геометрическая интерпретация

- Возьмём на плоскости декартову систему координат и каждой паре чисел (x_1, x_2) поставим в соответствие точку на этой плоскости.
- Обратим прежде всего внимание на ограничения $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$. Они из всей плоскости вырезают лишь её первую четверть (см. рис. 1).

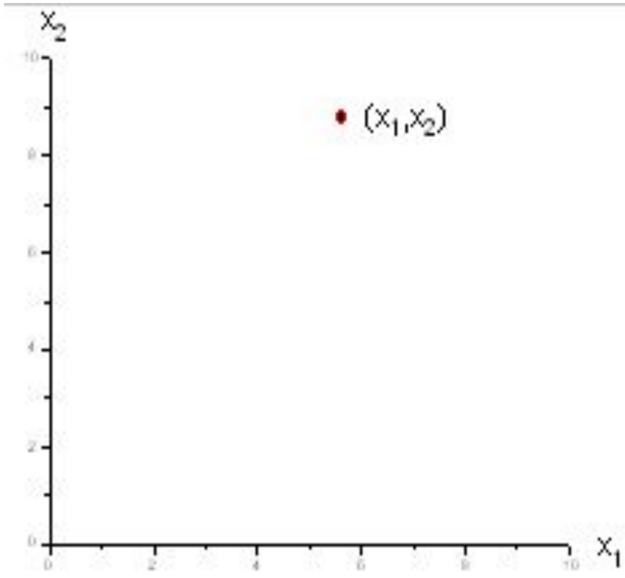

Рис.1

Геометрическая интерпретация

- Рассмотрим теперь, какие области соответствуют неравенствам вида $a_1x_1+a_1x_2 \le b$. Сначала рассмотрим область, соответствующую равенству $a_1x_1+a_1x_2=b$. Это прямая линия. Строить её проще всего по двум точкам.
- Пусть $b \ne 0$. Если взять $x_1=0$, то получится $x_2=b/a_2$. Если взять $x_2=0$, то получится $x_1=b/a_1$. Таким образом, на прямой лежат две точки $(0, b/a_2)$ и $(b/a_1, 0)$.

Геометрическая интерпретация

- Дальше через эти две точки можно по линейке провести прямую линию (смотри рисунок 2).
- Если же b=0, то на прямой лежит точка (0,0). Чтобы найти другую точку, можно взять любое отличное от нуля значение x_1 и вычислить соответствующее ему значение x_2.

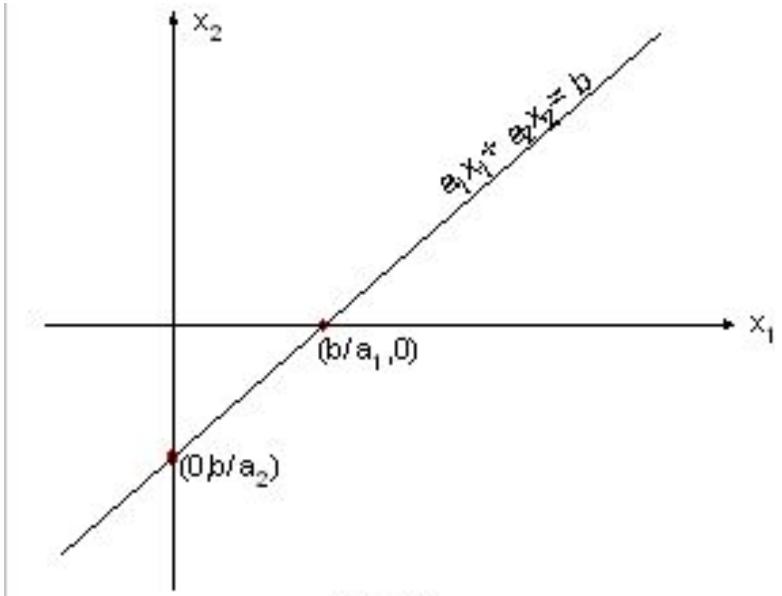

Рис. 2

Геометрическая интерпретация

- Эта построенная прямая разбивает всю плоскость на две полуплоскости. В одной её части $a_1x_1+a_1x_2<b$, а в другой наоборот $a_1x_1+a_1x_2>b$. Узнать, в какой полуплоскости какой знак имеет место проще всего посмотрев, какому неравенству удовлетворяет какая-то точка плоскости, например, начало координат, т.е. точка (0,0).

Пример

- Определить полуплоскость, определяемую неравенством $4x_1-6x_2\leq 3$.

Геометрическая интерпретация

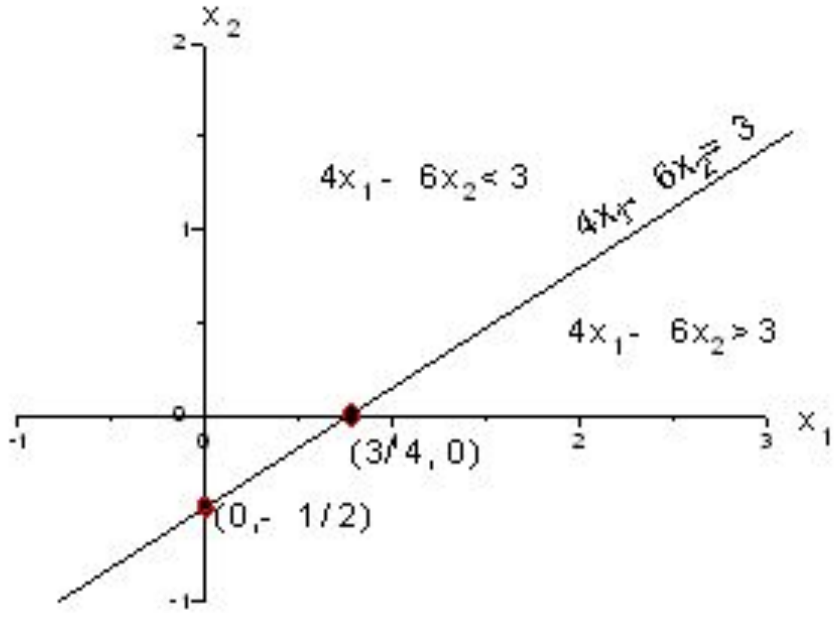

Рис. 3

Геометрическая интерпретация

- Вернёмся теперь к задаче линейного программирования. Там имеют место m неравенств

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1+a_{12}x_2\le b_1,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2\le b_2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2\le b_m.
\end{gathered}
$$

- Каждое из них задает на плоскости некоторую полуплоскость. Нас интересуют те точки, которые удовлетворяют всем этим m неравенствам, т.е. точки, которые принадлежат всем этим полуплоскостям одновременно. Следовательно, область, определяемая неравенствами, геометрически изображается общей частью (пересечением) всех полуплоскостей, определяемых отдельными ограничениями (к ним, естественно, надо добавить ограничения $x_1\ge 0$ и $x_2\ge 0$).
- Как уже говорилось выше, эта область называется допустимой областью задачи линейного программирования.

Пример

- Найти допустимую область задачи линейного программирования, определяемую ограничениями

$$-x_1+x_2\le 1,$$
$$x_1-2x_2\le 1,$$
$$x_1+x_2\le 3,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

Пример

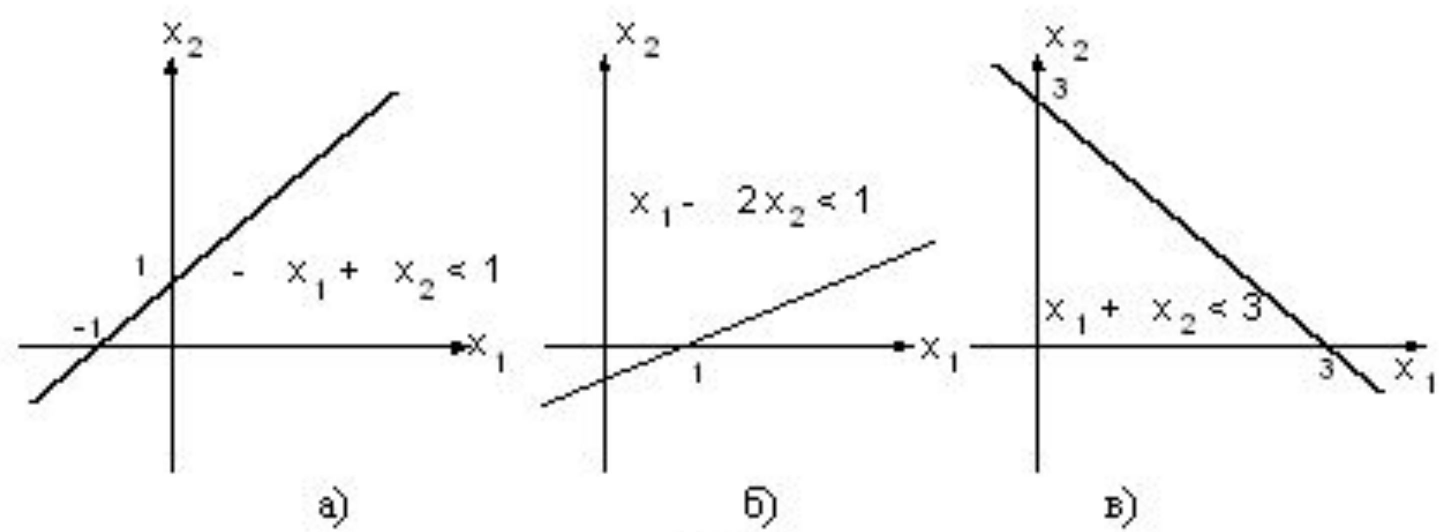

Рис. 4

Пример

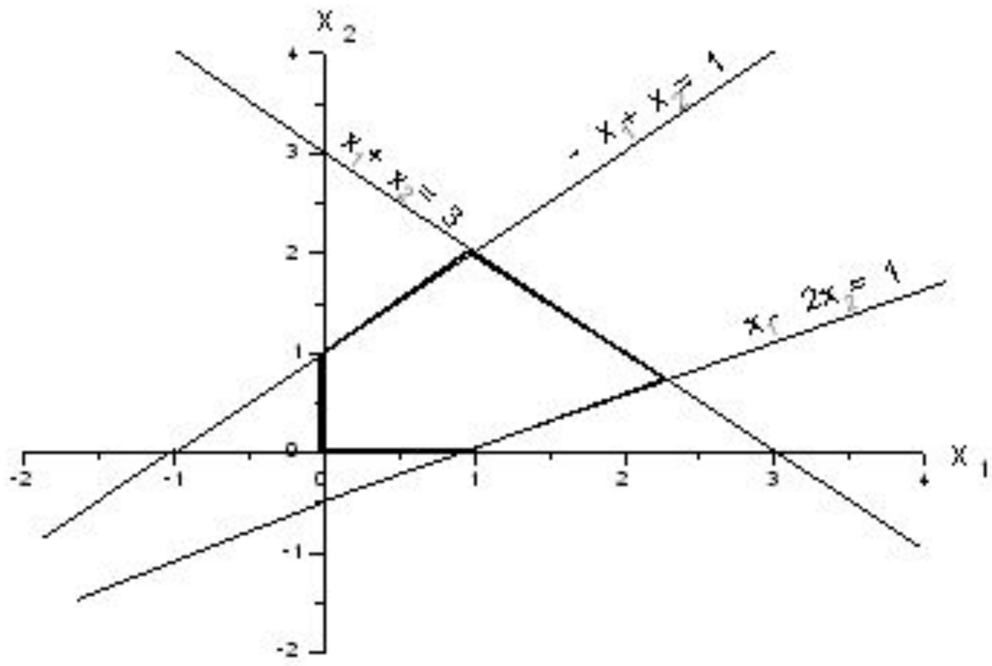

Рис. 5

Возможные случаи

- **Основной случай** - получающаяся область имеет вид ограниченного выпуклого многоугольника (см. рис. 6).
- **Неосновной случай -** получается неограниченный выпуклый многоугольник, имеющий вид, подобный изображенному на рис. 7. Подобная ситуация, например, получится, если в рассмотренном выше примере убрать ограничение $x_1+x_2\leq 3$. Оставшаяся часть будет неограниченным выпуклым многоугольником.
- Наконец, возможен случай, когда неравенства **противоречат друг другу**, и допустимая область вообще **пуста**.

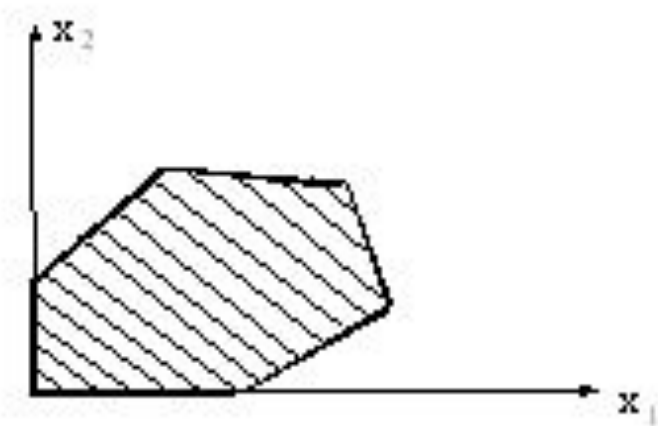

Рис. 6

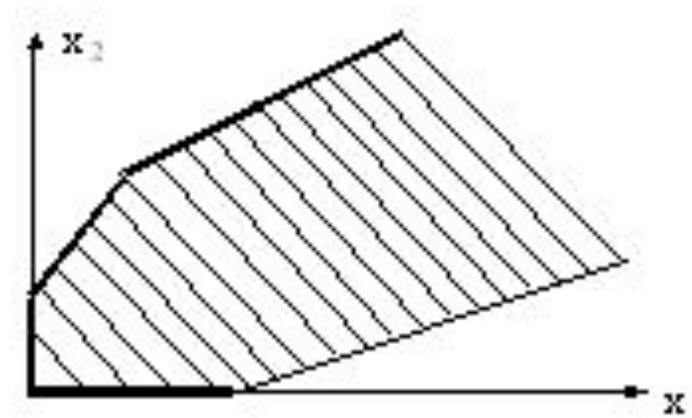

Рис. 7

Геометрическая интерпретация

- Вернёмся теперь к исходной задаче линейного программирования. В ней, кроме системы неравенств, есть еще **целевая функция** $c_1x_1+c_2x_2 \rightarrow max$.
- Рассмотрим прямую $c_1x_1+c_2x_2=L$. Будем увеличивать L. Легко догадаться, что прямая будет двигаться параллельно самой себе в том направлении, которое дается вектором (c_1, c_2), так как это - вектор нормали к нашей прямой и одновременно вектор градиента функции $f(x_1, x_2)=c_1x_1+c_2x_2$.

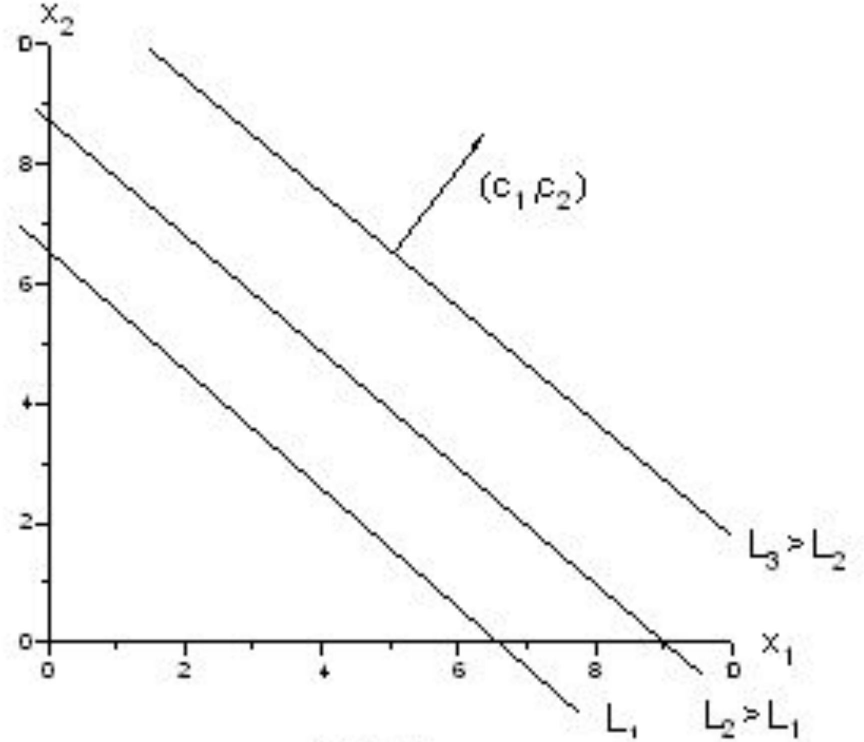

Рис. 8

Решение

- А теперь сведем всё вместе. Итак, надо решить задачу

$$c_1x_1+c_2x_2\to max$$
$$a_{11}x_1+a_{12}x_2\le b_1,$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2\le b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2\le b_m,$$
$$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0.$$

- Ограничения задачи вырезают на плоскости некоторый многоугольник. Пусть при некотором L прямая $c_1x_1+c_2x_2=L$ пересекает допустимую область. Это пересечение дает какие-то значения переменных , которые являются планами.
- Увеличивая L мы начнем двигать нашу прямую и её пересечение с допустимой областью будет изменяться (см. рис. 9). В конце концов эта прямая выйдет на границу допустимой области - как правило, это будет одна из вершин многоугольника. Дальнейшее увеличение L приведёт к тому, что пересечение прямой $c_1x_1+c_2x_2=L$ с допустимой областью будет пустым. Поэтому то положение прямой $c_1x_1+c_2x_2=L$, при котором она вышла на граничную точку допустимой области, и даст решение задачи, а соответствующее значение L и будет оптимальным значением целевой функции.

Пример

- Решить задачу

$$x_1+2x_2\to \max$$
$$-x_1+x_2\le 1,$$
$$x_1-2x_2\le 1,$$
$$x_1+x_2\le 2,$$
$$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0.$$

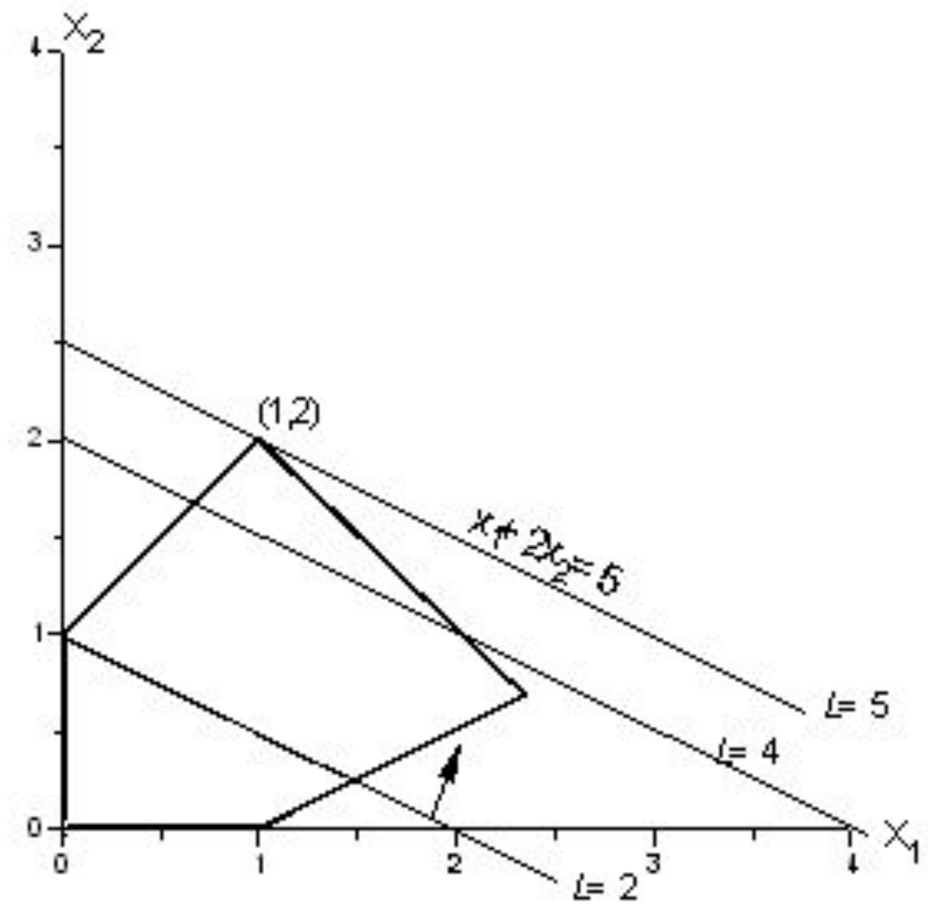

Рис.10

Особый случай

- Обратите внимание на то, что оптимальный план, как правило, соответствует какой-то вершине многоугольника, изображающего допустимую область. И лишь в том случае, когда прямая $c_1x_1+c_2x_2=L$ совпадет с границей допустимой области, может случиться так, что решение не будет единственным. Но и в этом случае вершины, соответствующие границам этой стороны, дают оптимальные планы нашей задачи линейного программирования. Таким образом, вершины допустимой области играют в решении задач линейного программирования особую роль.

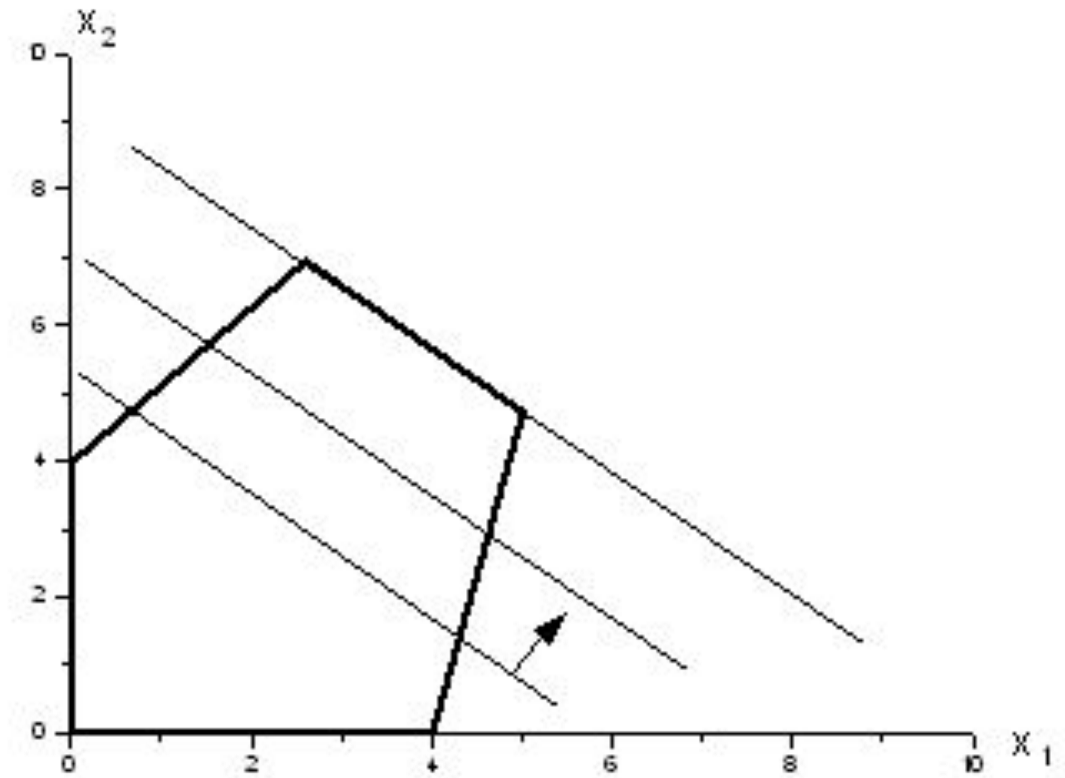

Рис. 11

Заключение

- Ну, а если допустимая область неограничена, то и значение целевой функции может быть неограниченным. Подводя итог этим примерам, можно сформулировать следующие положения:
  1. допустимая область - это выпуклый многоугольник;
  2. оптимум достигается в вершине допустимой области (если допустимая область ограничена и не пуста);
  3. ограниченность целевой функции в допустимой области является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи.