Симплекс-метод

Метод искусственного базиса

Метод искусственного базиса

- Последняя трудность, которую осталось преодолеть - это определение исходного опорного плана и исходной симплекс-таблицы, с которой начинаются все итерации.
- За счет чего мы так легко составили исходную симплекс-таблицу в предыдущем примере? Легко видеть, что это произошло потому, что среди переменных были такие, что входили лишь в одно уравнение системы ограничений и не входили в другие.
- На искусственном введении таких переменных и основан метод искусственного базиса.

Метод искусственного базиса

- Итак, пусть мы имеем задачу линейного программирования в канонической форме

$$
\begin{array}{lllll}
c_1 x_1 & +c_2 x_2 & +\dots & +c_n x_n \Rightarrow \min & \\
a_{11} x_1 & +a_{12} x_2 & +\dots & +a_{1n} x_n = b_1 & \\
a_{21} x_1 & +a_{22} x_2 & +\dots & +a_{2n} x_n = b_2 & x_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1,n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots\dots & \\
a_{m1} x_1 & +a_{m2} x_2 & +\dots & +a_{mn} x_n = b_m &
\end{array}
$$

- Можно считать, что все $b_i \geq 0$, так как умножением соответствующего ограничения на -1 всегда можно сменить знак.
- Возьмем ну очень большое число M и будем решать следующую вспомогательную задачу.

Вспомогательная задача

$$\begin{array}{llllllll}
c_1x_1 & +c_2x_2 & +\dots & +c_nx_n & +Mx_{n+1} & +Mx_{n+2} & +\dots & +Mx_{n+m} \Rightarrow \min \\
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & +x_{n+1} & & & = b_1 \\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & & +x_{n+2} & & = b_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & & & & \dots \\
a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & & & & +x_{n+m} = b_m
\end{array}$$

- В этой задаче сразу ясен исходный базис - в качестве него надо взять переменные $x_{n+1},\dots,x_{n+m}$.
- В качестве исходного опорного плана надо взять план

$$\vec{x} = (0,0,\dots,0,x_{n+1},x_{n+2},\dots,x_{n+m}) =$$

$$= (0,0,\dots,0,b_1,b_2,\dots,b_m).$$

Решение симплекс-таблицы

- А теперь начнем преобразования симплекс-таблицы, стараясь выводить из базиса дополнительные переменные.
- Заметим, что если какая-то дополнительная переменная выведена из базиса, то соответствующий столбец симплекс-таблицы можно просто вычеркнуть и больше к нему не возвращаться.
- В конце концов возможны два варианта.
- **Вариант 1**
- Все векторы, соответствующие введенным дополнительным переменным, будут выведены из базиса. В этом случае мы просто вернемся к исходной задаче, попав в какую-то вершину допустимой области. Все столбцы симплекс-таблицы, соответствующие дополнительным переменным, тогда исчезнут и дальше будет решаться исходная задача.
- **Вариант 2**
- Несмотря на то, что *M* очень велико, получающийся оптимальный план будет все-таки содержать какую-то из дополнительных переменных. Это означает, что **допустимая область исходной задачи пуста**, то есть ограничения исходной задачи **противоречивы** и поэтому исходная задача вообще не имеет решений.
- Заметим в заключение, что величина М вообще не конкретизируется и так и остается в виде буквы М. При решении учебных задач в дополнительную строку пишут алгебраические выражения, содержащие *M*, а при счете на ЭВМ вводится еще одна дополнительная строка, куда пишутся коэффициенты при *M*.

Пример

$$\begin{aligned}
-x_1 \quad -2x_2 \quad -3x_3 \quad +x_4 &\Rightarrow \min \\
x_1 \quad +2x_2 \quad +3x_3 \qquad\quad &= 15 \\
2x_1 \quad +x_2 \quad +5x_3 \qquad\quad &= 20 \\
x_1 \quad +2x_2 \quad +x_3 \quad +x_4 &= 10
\end{aligned}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4}.$$

Пример

- Введем дополнительные переменные

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
-x_1 & -2x_2 & -3x_3 & +x_4 & +Mx_5 & +Mx_6 & \Rightarrow \min \\
x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & +x_5 & & =15 \\
2x_1 & +x_2 & +5x_3 & & & +x_6 & =20 \\
x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & & & =10
\end{array}
$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,6}.$$

Пример

- Исходная симплекс-таблица примет тогда вид:

	Базис	c_i	План	-1	-2	-3	1	M	M
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	x_5	M	15	1	2	3	0	1	0
$\Rightarrow$	x_6	M	20	2	1	5	0	0	1
	x_4	1	10	1	2	1	1	0	0
			10+35M	2+3M	4+3M	4+8M	0	0	0
						$\Uparrow$			

Первая итерация

	Базис	c_i	План	-1	-2	-3	1	M
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
⇒	x_5	M	3	1/5	7/5	0	0	1
	x_3	-3	4	2/5	1/5	1	0	0
	x_4	1	6	3/5	9/5	0	1	0
			-6+3M	2/5+1/5M	16/5+1/5M	0	0	0
					⇑			

Вторая итерация

	Базис	c_i	План	-1	-2	-3	1
				x_1	x_2	x_3	x_4
	x_2	-2	15/7	-1/7	1	0	0
	x_3	-3	25/7	3/7	0	1	0
	x_4	1	15/7	6/7	0	0	1
$\Rightarrow$			-90/7	6/7	0	0	0
				$\Uparrow$			

Третья итерация

- Мы вернулись к исходной задаче и продолжаем решать ее по стандартной схеме.

	Базис	c_i	План	-1	-2	-3	1
				x_1	x_2	x_3	x_4
	x_2	-2	5/2	0	1	0	1/6
	x_3	-3	5/2	0	0	1	-3/6
	x_1	-1	5/2	1	0	0	7/6
			-15	0	0	0	-1