Транспортная задача линейного программирования

Метод минимального (максимального) элемента

- Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую и в клетку, которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел a_i и b_j. Затем из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо и строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя. Из оставшейся части таблицы стоимостей снова выбирают наименьшую стоимость, и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Задание

- Составить первоначальный опорный план методом минимального элемента для транспортной задачи вида:

2	3	4	15
11	6	10	1
8	9	3	3
4	1	2	21
10	20	10	

Задание

- Найти опорный план для задачи

	Поставщики	Потребители				Запасы груза
		B_1	B_2	B_3	B_4	
	A_1	2	6	3	1	11
X=	A_2	3	7	8	5	11
	A_3	9	2	4	5	8
	Потребность в грузе	5	9	9	7	**30**

Метод потенциалов

- Идея метода потенциалов для решения транспортной задачи сводиться к следующему. Представим себе что каждый из пунктов отправления A_i вносит за перевозку единицы груза (всё ровно куда) какую-то сумму α_i ; в свою очередь каждый из пунктов назначения B_j также вносит за перевозку груза (куда угодно) сумму β_j . Эти платежи передаются некоторому третьему лицу ("перевозчику"). $\alpha_i + \beta_j$ ($i=1..m$; $j=1..n$) будем называть "псевдостоимостью" перевозки единицы груза из A_i в B_j . Заметим, что платежи α_i и β_j не обязательно должны быть положительными; не исключено, что "перевозчик" сам платит тому или другому пункту какую-то премию за перевозку. Также надо отметить, что суммарная псевдостоимость любого допустимого плана перевозок при заданных платежах (α_i и β_j) одна и та же и от плана к плану не меняется.

Метод потенциалов

- До сих пор мы никак не связывали платежи (α_i и β_j) и псевдостоимости с истинными стоимостями перевозок $C_{i,j}$. Теперь мы установим между ними связь. Предположим, что план ($x_{i,j}$) невырожденный (число базисных клеток в таблице перевозок ровно ($m + n - 1$). Для всех этих клеток $x_{i,j}>0$. Определим платежи (α_i и β_j) так, чтобы во всех базисных клетках псевдостоимости были ровны стоимостям:
  - $\alpha_i + \beta_j = \mathbf{c}_{i,j}$, при $x_{i,j} >0$.
- Что касается свободных клеток (где $x_{i,j} = 0$), то в них соотношение между псевдостоимостями и стоимостями может быть какое угодно.

Метод потенциалов

- Оказывается соотношение между псевдостоимостями и стоимостями в свободных клетках показывает, является ли план оптимальным или же он может быть улучшен. Существует специальная теорема: Если для всех базисных клеток плана ($x_{i,j} > 0$)
  - $\alpha_i + \beta_j = \mathbf{c}_{i,j}$, (1)
- а для всех свободных клеток ($x_{i,j} = 0$)
  - $\alpha_i + \beta_j \le \mathbf{c}_{i,j}$, (2)
- то план является ***оптимальным*** и никакими способами улучшен быть не может. Нетрудно показать, что это теорема справедлива также для вырожденного плана, и некоторые из базисных переменных ровны нулю. План обладающий этим свойством называется **потенциальным** планом, а соответствующие ему платежи (α_i и β_j) — потенциалами пунктов A_i и B_j ($i=1,...,m$; $j=1,...,n$).

Метод потенциалов

- Для решения транспортной задачи нам нужно одно - построить потенциальный план. Оказывается его можно построить методом последовательных приближений, задаваясь сначала какой-то произвольной системой платежей, удовлетворяющей условию (1). При этом в каждой базисной клетке получиться сумма платежей, равная стоимости перевозок в данной клетке; затем, улучшая план следует одновременно менять систему платежей. Так, что они приближаются к потенциалам. При улучшении плана нам помогает следующее свойство платежей и псевдостоимостей: Какова бы ни была система платежей (αi и βj) удовлетворяющая условию (1), для каждой свободной клетки цена цикла пересчёта равна разности между стоимостью и псевдостоимостью в данной клетке.

Процедура построения потенциального (оптимального) плана

- В качестве первого приближения к оптимальному плану берётся любой допустимый план. В этом плане m+n-1 базисных клеток, где m - число строк, n - число столбцов транспортной таблицы. Для этого плана можно определить платежи (α_i и β_j), так, чтобы в каждой базисной клетке выполнялось условие :
  - $\alpha_i + \beta_j = \mathbf{c}_{i,j}$ (3)
- Уравнений (3) всего m+n-1, а число неизвестных равно m+n. Следовательно, одну из этих неизвестных можно задать произвольно (например, равной нулю). После этого из m+n-1 уравнений (3) можно найти остальные платежи α_i , β_j , а по ним вычислить псевдостоимости для каждой свободной клетки.
- Если оказалось, что все эти псевдостоимости не превосходят стоимостей, то план потенциален и, значит, оптимален. Если же хотя бы в одной свободной клетке псевдостоимость больше стоимости, то план не является оптимальным и может быть улучшен переносом перевозок по циклу, соответствующему данной свободной клетке. Цена этого цикла равна разности между стоимостью и псевдостоимостью в этой свободной клетке.

Критерий оптимальности

- Если известны потенциалы решения X0 транспортной задачи и для всех незаполненных ячеек выполняются условия $\alpha i + \beta j \leq$ **c**i,j, то X0 является оптимальным планом транспортной задачи.
- Если план не оптимален, то необходимо перейти к следующему плану (таблице) так, чтобы транспортные расходы не увеличивались.
- **Цикл перерасчёта таблицы** - это последовательность ячеек, удовлетворяющая условиям:
    - одна ячейка пустая, все остальные занятые;
    - любые две соседние ячейки находятся в одной строке или в одном столбце;
    - никакие три соседние ячейки не могут быть в одной строке или в одном столбце.
- Пустой ячейке присваивают знак **+** , остальным - поочерёдно знаки **-** и **+** .

Метод потенциалов

- Для перераспределения плана перевозок с помощью цикла перерасчёта сначала находят незаполненную ячейку (r, s), в которой $\alpha r + \beta s$ = **c**r,s , и строят соответствующий цикл; затем в минусовых клетках находят число X=min(Xi,j). Далее составляют новую таблицу по следующему правилу:
    - В плюсовых клетках добавляем X;
    - Из минусовых клеток вычитаем X;
    - Все остальные клетки вне цикла остаются без изменения.
- Получим новую таблицу, дающую новое решение X, такое, что F(X1)<=F(X0); оно снова проверяется на оптимальность через конечное число шагов, обязательно найдем оптимальный план транспортной задачи, ибо он всегда существует.

Пример

- Найдём оптимальный план задачи.
- Фирма должна отправить некоторое количество кроватей с трёх складов в пять магазинов. На складах имеется соответственно 15, 25 и 20 кроватей, а для пяти магазинов требуется соответственно 20, 12, 5, 8 и 15 кроватей. Стоимость перевозки одной кровати со склада в магазин приведены в таблице.

Склады	Магазины				
	B1	B2	B3	B4	B5
A1	1	0	3	4	2
A2	5	1	2	3	3
A3	4	8	1	4	3

Пример

- В качестве опорного плана возьмем план, полученный с помощью метода **"минимального элемента"** X11=3, X12=12, X21=2, X24=8, X25=15, X31=15, X33=5. Все остальные элементы равны 0.
- Составим систему уравнений для нахождения потенциалов решения, найдем сумму соответствующих потенциалов для каждой свободной ячейки и пересчитаем тарифы (стоимости) для каждой свободной ячейки.

	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	1 3	0 12	3	4	2	~~15~~ 3
A2	5 2	1	2	3 8	3 15	~~25~~ ~~17~~ 2
A3	4 15	8	1 5	4	3	~~20~~ 15
	~~20~~ ~~17~~ 2	12	5	8	15	

$$\begin{cases} \alpha 1+\beta 1=c11=1 \\ \alpha 1+\beta 2=c12=0 \\ \alpha 2+\beta 1=c21=5 \\ \alpha 2+\beta 4=c24=3 \\ \alpha 2+\beta 5=c25=3 \\ \alpha 3+\beta 1=c31=4 \\ \alpha 3+\beta 3=c33=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha 1=0 \\ \beta 1=1 \\ \alpha 2=4 \\ \beta 2=0 \\ \beta 3=-2 \\ \beta 4=-1 \\ \alpha 3=3 \\ \beta 5=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} c13=-2 \\ c14=-1 \\ c15=-1 \\ c22=4 \\ c23=2 \\ c32=2 \\ c33=2 \\ c35=2 \end{cases} \quad \begin{cases} c'13=5 \\ c'14=5 \\ c'15=3 \\ c'22=-1 \\ c'23=0 \\ c'32=4 \\ c'34=2 \\ c'35=1 \end{cases}$$

Пример

- Так как у нас получились отрицательные значения, то полученный план не является оптимальным. Выберем ячейку для пересчета 22. Получим:

	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	+ 1 3	- 0 12	3	4	2	15
A2	- 5 2	+ 1	2	3 8	3 15	25
A3	4 15	8	1 5	4	3	20
	20	12	5	8	15	

$$X=\min\{2, 12\}=2$$

Строим следующую транспортную таблицу

	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	+ 1 5	- 0 10	3	4	2	15
A2	- 5 0	+ 1 2	2	3 8	3 15	25
A3	4 15	8	1 5	4	3	20
	20	12	5	8	15	

Пример

- Проверим полученный план на оптимальность. Теперь ячейка 12 не заполнена.

$$\begin{cases} \alpha1+\beta1=c11=1 \\ \alpha1+\beta2=c12=0 \\ \alpha2+\beta2=c22=1 \\ \alpha2+\beta4=c24=3 \\ \alpha2+\beta5=c25=3 \\ \alpha3+\beta1=c31=4 \\ \alpha3+\beta3=c33=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha1=0 \\ \beta1=1 \\ \alpha2=1 \\ \beta2=0 \\ \beta3=-2 \\ \beta4=2 \\ \alpha3=2 \\ \beta5=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} c13=-2 \\ c14=2 \\ c15=-2 \\ c12=0 \\ c23=-1 \\ c32=3 \\ c34=5 \\ c35=5 \end{cases} \quad \begin{cases} c'13=5 \\ c'14=2 \\ c'15=4 \\ c'12=5 \\ c'23=3 \\ c'32=5 \\ c'34=-1 \\ c'35=-2 \end{cases}$$

Пример

- Построенный план не является оптимальным, следовательно, производим пересчет. Выберем ячейку 35.

	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	+ 1 5	- 0 10	3	4	2	15
A2	5 0	+ 1 2	2	3 8	- 3 15	25
A3	- 4 15	8	1 5	4	+ 3	20
	20	12	5	8	15	

X=min{15, 10, 15}=10

Пример

- Строим следующую транспортную таблицу.

	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	1 15	0	3	4	2	15
A2	5 0	1 12	2	3 8	3 5	25
A3	4 5	8	1 5	4	3 10	20
	20	12	5	8	15	

Пример

- Проверим построенный план на оптимальность.

$$\begin{cases} \alpha 1+\beta 1=c11=1 \\ \alpha 2+\beta 2=c22=1 \\ \alpha 2+\beta 4=c24=3 \\ \alpha 2+\beta 5=c25=3 \\ \alpha 3+\beta 1=c31=4 \\ \alpha 3+\beta 3=c33=1 \\ \alpha 3+\beta 5=c35=3 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha 1 = 0 \\ \beta 1 = 1 \\ \alpha 2 = 3 \\ \beta 2 = -2 \\ \beta 3 = -2 \\ \beta 4 = 0 \\ \alpha 3 = 3 \\ \beta 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c12 = -2 \\ c13 = -2 \\ c14 = 0 \\ c15 = 1 \\ c21 = 4 \\ c23 = 1 \\ c32 = 1 \\ c34 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c'12 = 2 \\ c'13 = 5 \\ c'14 = 4 \\ c'15 = 1 \\ c'21 = 1 \\ c'23 = 1 \\ c'32 = 1 \\ c'34 = 1 \end{cases}$$

- **Полученный план является оптимальным.** X11=15, X22=12, X24=8, X25=5, X31=5, X33=5, X35=10. Все остальные Xij=0.
- **F=1*15+1*12+3*8+3*5+4*5+1*5+3*10=121**

Задания

2	4	7	9	200
5	1	8	12	270
11	6	4	3	130
122	82	242	154	

2	3	4	3	90
5	3	1	2	60
2	1	4	2	150
122	42	62	74	

18	2	3	12	180
3	4	8	7	160
4	5	6	12	140
7	1	5	6	120
152	152	122	174	

4	5	3	7	280
7	6	2	9	175
1	3	9	8	125
2	4	5	6	130
92	182	304	132	