Метод проекции градиента

(минимизация выпуклого критерия
на линейной системе ограничений
– равенств и неравенств)

Метод проекции градиента является обобщением *метода наискорейшего спуска* на случай, когда решается задача минимизации нелинейной функции с ограничениями.

Хотя метод применим и в задачах с ***нелинейными*** ограничениями, **хорошая сходимость** имеет место только в случае, когда **ограничения – линейны**.

Постановка задачи: *найти* x *(n-мерный вектор)* , доставляющий *минимум выпуклой скалярной функции* $f(x)$ при условиях: $\mathbf{A_1 x = B_1}$, $\mathbf{A_2 x \le B_2}$

Примечание: Если должна быть учтена неотрицательность x, то, в отличие от ЛП, ограничения $x \geq 0$ должны быть включены в общую систему ограничений в форме $-x \le 0$.

Напомним основные позиции *метода наискорейшего спуска* (поиск минимума *выпуклой* функции ***f(x)*** *без ограничений*)


Линии равного уровня критерия
Минимум
$x^{\langle 0\rangle}$
$x^{\langle 1\rangle}$
$x^{\langle 2\rangle}$
$x^{\langle 3\rangle}$
$x^{\langle 4\rangle}$
90°
x_2
x_1
1. Стартовую точку выбираем произвольно
2. Определяем направление антиградиента и перемещаемся в точку минимума по этому направлению
3. В точке минимума по направлению траектория перемещения *касается* одной из линий равного уровня
4. Определяется новое направление антиградиента (если критерий квадратичный – ортогональное предыдущему)
5. Последующие точки находятся аналогично – до тех пор, пока градиент не станет близок к 0

Поэтому точка перемещается в положение, ближайшее к той, которая получилась бы, если бы ограничения отсутствовали – т.е. на поверхность области ограничений.

Рассмотрим, какие изменения нужно внести в метод наискорейшего спуска, чтобы распространить его на задачи с ограничениями

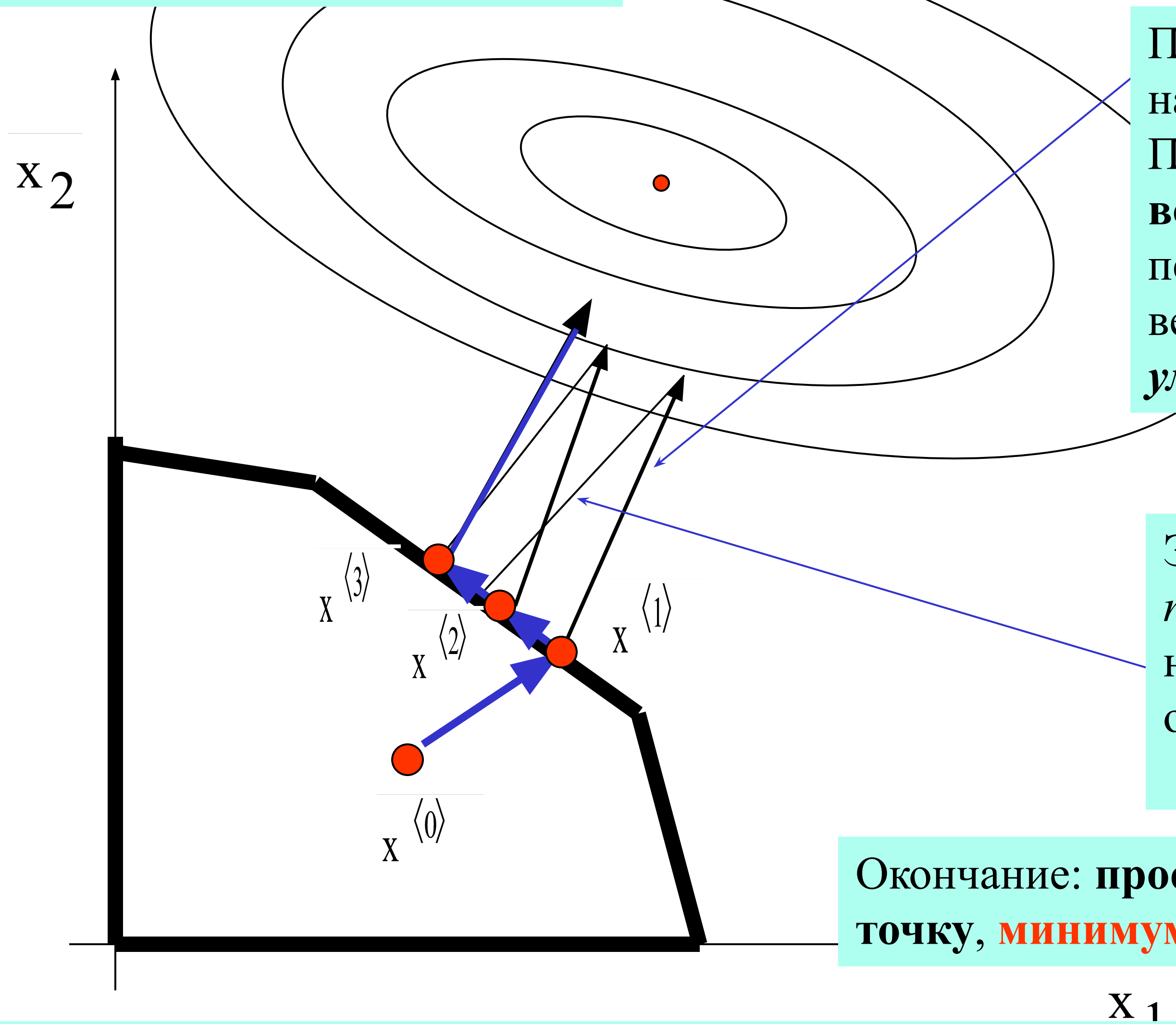
Если бы ограничений не было, точка переместилась бы по траектории наискорейшего спуска

Но «по дороге» траектория наискорейшего спуска наталкивается на ограничение, мешающее продолжить траекторию. Такое ограничение называется **АКТИВНЫМ**.

Перемещаем точку в направлении проекции до достижения минимума по этому направлению.

Найдем направление антиградиента.

Перемещение по этому направлению невозможно. Поэтому выберем из числа **возможных** такое, перемещение в котором ведет к ***самому быстрому уменьшению*** критерия.



Это направление – *проекция антиградиента* на поверхность активных ограничений.

Окончание: **проекция вырождается в точку**, **минимум найден**

Далее снова находим антиградиент, его проекцию, перемещаемся до минимума в направлении проекции.

Минимум может быть достигнут:

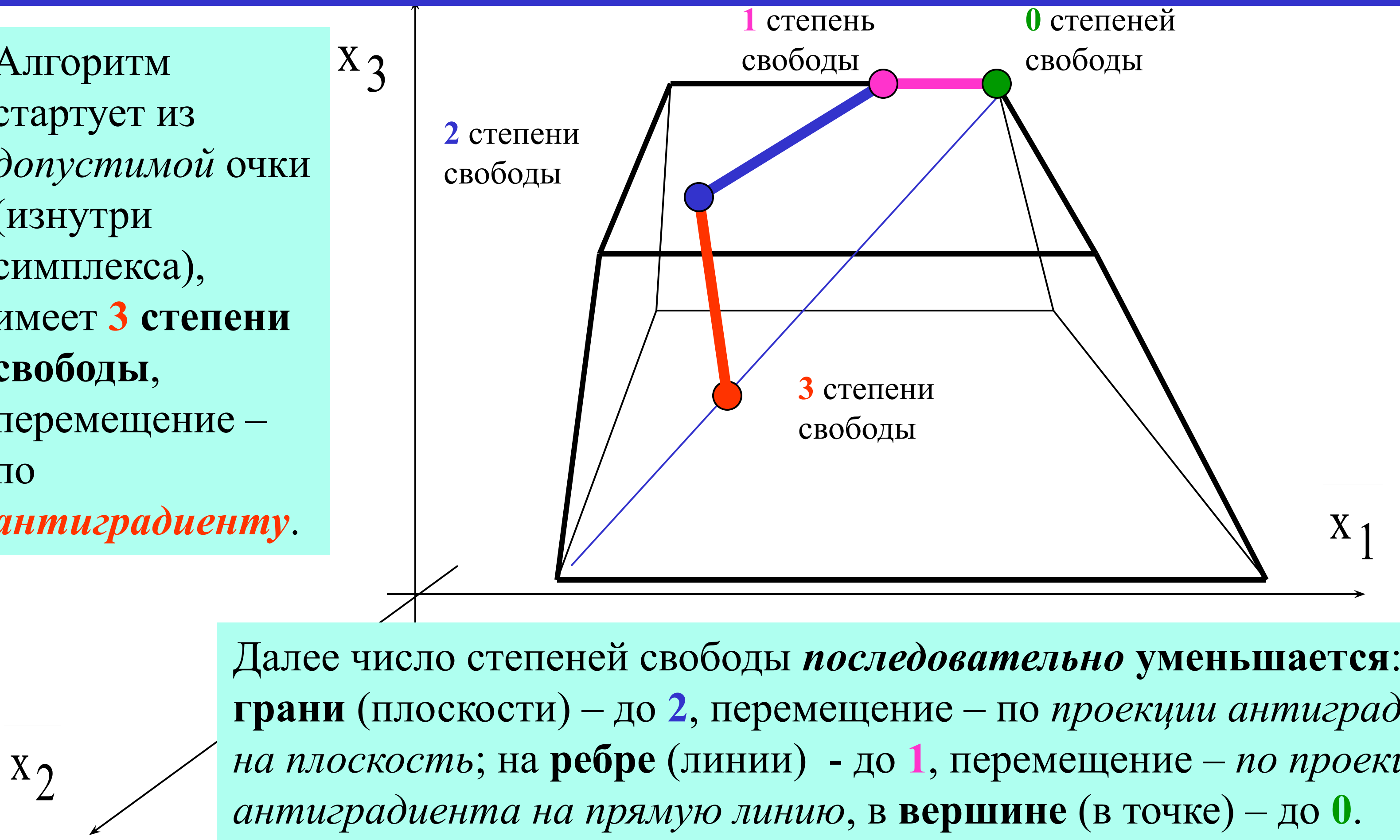
А) **Внутри ограничений** – если достигается условие [*градиент*] = 0;

Б) **На грани** – если проекция антиградиента на грань выродится в точку;

В) **На ребре** – если проекция антиградиента на плоскость выродится в точку;

Г) **В вершине** – если число степеней свободы стало равно 0.

Алгоритм стартует из *допустимой* очки (изнутри симплекса), имеет **3 степени свободы**, перемещение – по ***антиградиенту***.



Далее число степеней свободы ***последовательно*** **уменьшается**: на **грани** (плоскости) – до **2**, перемещение – по *проекции антиградиента на плоскость*; на **ребре** (линии) **-** до **1**, перемещение – *по проекции антиградиента на прямую линию*, в **вершине** (в точке) – до **0**.