Линейное программирование

Решение систем линейных неравенств

Неравенства

- Линейные неравенства – это неравенства вида

$$\sum a_i x_i + b \geq c$$

- Задание системы линейных неравенств с двумя или тремя неизвестными означает задание выпуклой многоугольной области на плоскости или, соответственно, выпуклого многогранного тела в пространстве.
- Начиная с середины 40-х годов этого столетия, возникла новая область прикладной математики – линейное программирование – с важными приложениями в экономике и технике. В конечном счете линейное программирование – это всего лишь один из разделов (хотя и очень важный) теории систем линейных неравенств.

Геометрический смысл уравнения первой степени

- Рассмотрим уравнение первой степени с двумя неизвестными x и y

$$ax+by+c=0. \qquad (1)$$

- Истолковывая x и y как координаты точки на плоскости, можем сказать, что *множество точек, определяемых уравнением* (1), *есть прямая линия на плоскости.*

Геометрический смысл уравнения первой степени

- Аналогично для неравенства

  $$ax+by+c\geq 0. \qquad (2)$$

- Если $b\neq 0$, то данное неравенство приводится к одному из видов $y\geq kx+p$ или $y\leq kx+p$.
- Первому из этих неравенств удовлетворяют все точки, лежащие «выше» прямой $y=kx+p$ или же на этой прямой, а второму – все точки, лежащие «ниже» прямой $y=kx+p$ или на этой прямой.
- Если же $b=0$, то неравенство приводится к одному из видов $x\geq h$ или $x\leq h$. Первому из них удовлетворяют все точки, лежащие «правее» прямой $x=h$ или на этой прямой, второму – все точки, лежащие «левее» прямой $x=h$ или на этой прямой.

Геометрический смысл системы линейных неравенств

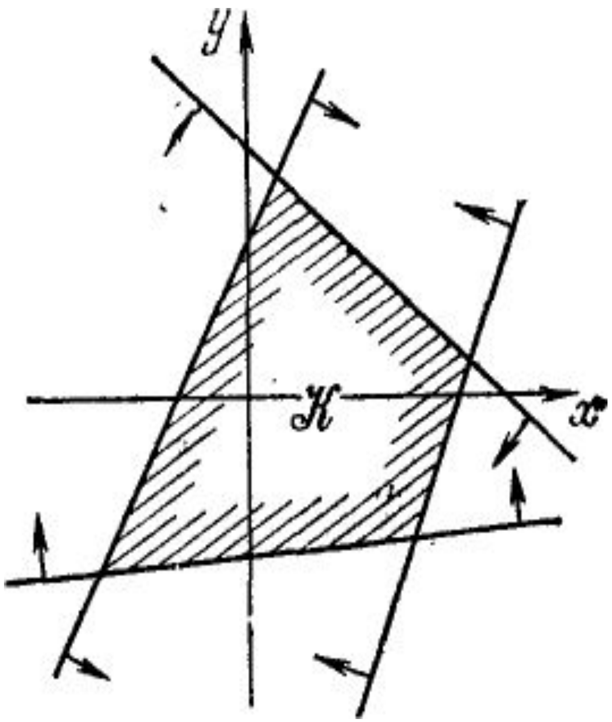
- Пусть дана система неравенств с двумя неизвестными x и y.

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1\geq 0, \\ a_2x+b_2y+c_2\geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_mx+b_my+c_m\geq 0. \end{array}\right\}$$

- Первое неравенство системы определяет на координатной плоскости xOy некоторую полуплоскость $П_1$, второе – полуплоскость $П_2$ и т.д. Если пара чисел x, y удовлетворяет всем неравенствам системы, то соответствующая точка *M(x, y)* принадлежит всем полуплоскостям $П_1, П_2, \ldots, П_m$ одновременно. Другими словами, точка *M* принадлежит *пересечению* (общей части) указанных полуплоскостей. Легко видеть, что пересечение конечного числа полуплоскостей есть некоторая многоугольная область.

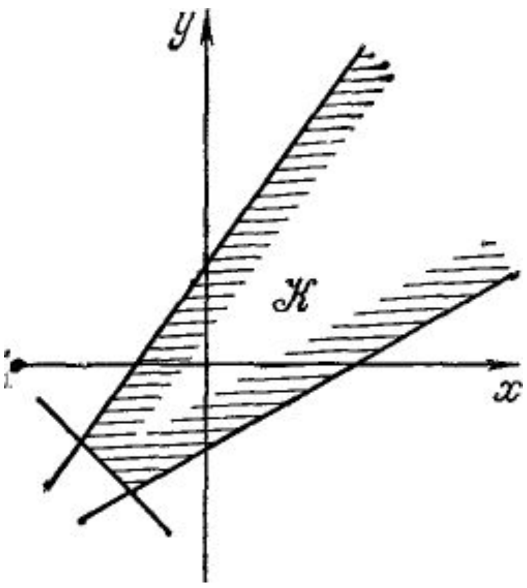
Пример

- Вдоль контура области изображены штрихи, идущие внутрь области. Они одновременно указывают, с какой стороны от данной прямой лежит соответствующая полуплоскость; то же самое указано и с помощью стрелок.



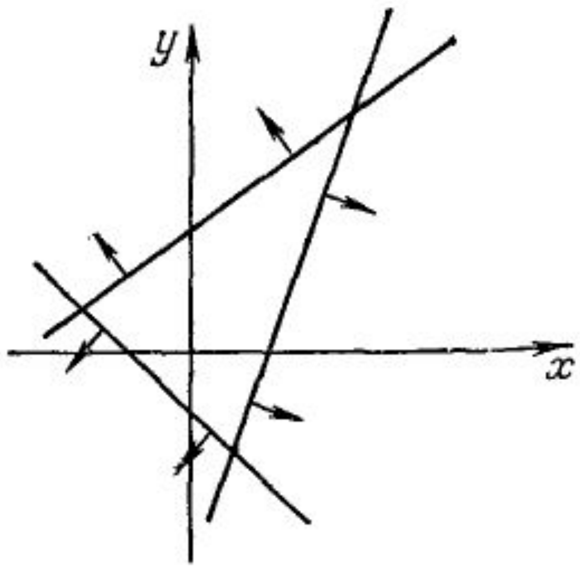
Неограниченная область решений

- Область *К* называется областью решений системы неравенств. Сразу же отметим, что область решений не всегда бывает ограничена; в результате пересечения нескольких полуплоскостей может возникнуть и неограниченная область.
- Имея в виду то обстоятельство, что граница области *К* состоит из кусков прямых (или из целых прямых), мы говорим, что *К* есть многоугольная область решений системы.



Противоречивость системы

- Разумеется, возможен и такой случай, когда нет ни одной точки, принадлежащей одновременно всем рассматриваемым полуплоскостям, т.е. когда область *К* «пуста»; это означает, что система противоречива.



Выпуклость области решений

- Область решений *X* всегда выпукла.
- *Множество точек* (на *плоскости или в пространстве) называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками A и B оно содержит и весь отрезок AB.*