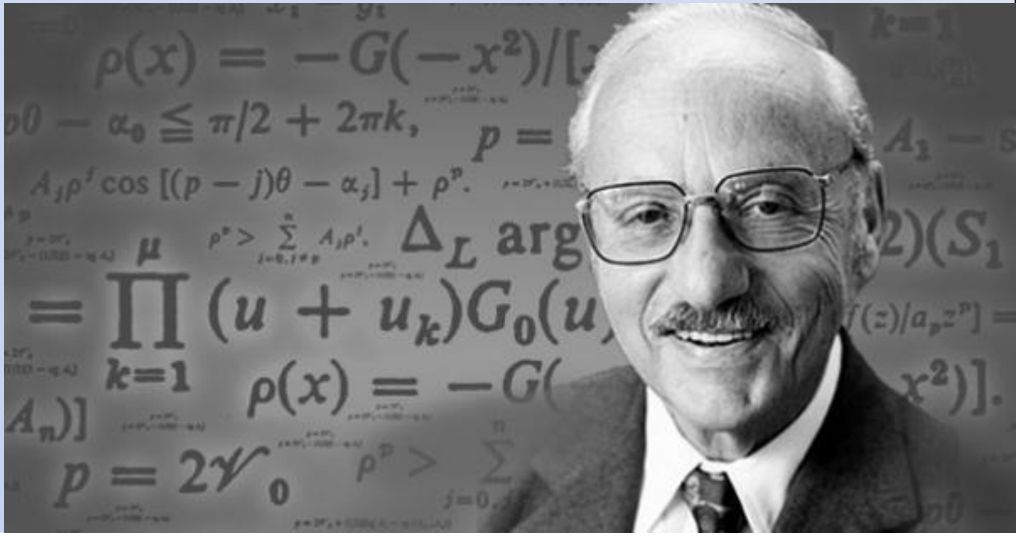
Симплекс-метод

универсальный метод решения задач линейного программирования

Авторы симплекс-метода

Симплекс-метод был разработан и впервые применен для решения задач в 1947 г. американским математиком Дж. Данцигом



Джорд Бернард Данциг (George Bernard Dantzig; 1914 —2005) — выдающийся математик США. Разработал симплексный алгоритм, применяемый при решении задач линейного программирования. Считается «отцом линейного программирования», наряду с советским математиком Л. В. Канторовичем.

Леонид Витальевич Канторович (1912-1986) — советский математик, создатель математической экономики и линейного программирования. Работал в области функционального анализа, вычислительной математики, теории программирования, математической физики и в экономике.

Авторы симплекс-метода

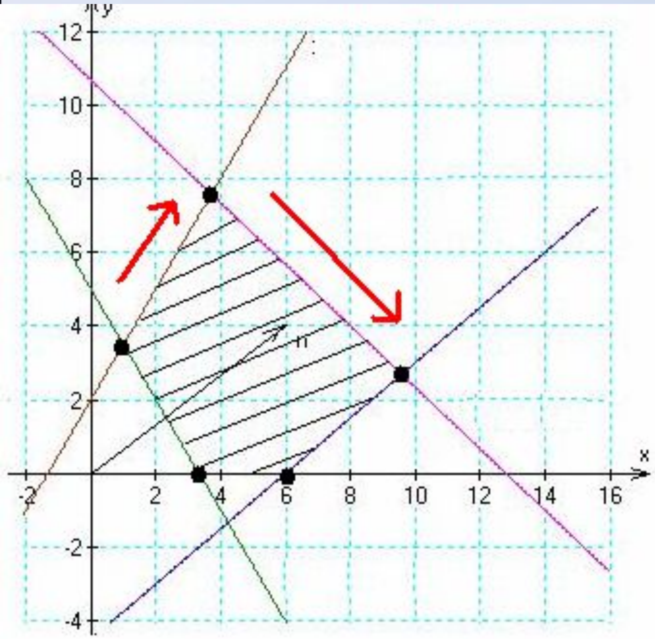
Джордж Данциг будучи студентом университета, однажды опоздал на занятие и принял написанные на доске уравнения за домашнее задание. Оно показалось ему сложнее обычного, но через несколько дней Бернард всё-таки смог его выполнить. Оказалось, что это были «нерешаемые в то время» задачи по статистике, над решением которых работали многие учёные.

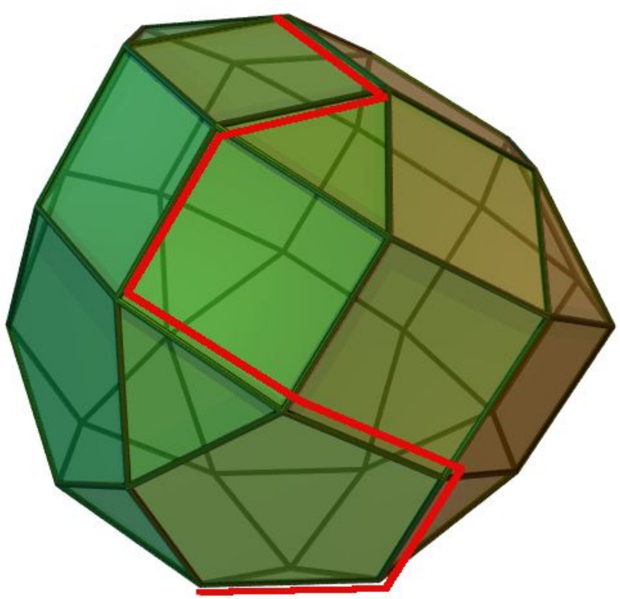
Присуждение премии Дж. Данцигу

Вспоминают, что когда *Канторович* пришёл на свою первую лекцию, студенты дружелюбно закричали ему: *«Парень, садись на место! Сейчас профессор придет»* Что неудивительно, поскольку «профессору» в это время было 18 лет. Пишут, что он был не очень блестящим лектором, но пытался добросовестно донести до студентов глубинный смысл математических определений и теорем. Экзаменатором он был строгим и требовательным, что, наверное, свойственно для многих вундеркиндов, которые очень многое схватывают на лету и не прощают студентам тупости.

Король Швеции Карл XVI Густав вручает Л.В.Канторовичу Нобелевскую премию

Общие положения





Геометрический смысл симплексного метода состоит в ***последовательном переходе от одной вершины многогранника ограничений к соседней***, в которой целевая функция принимает лучшее (или, по крайней мере, не худшее) значение до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение - вершина, где достигается оптимальное значение функции цели (если задача имеет конечный оптимум).

Процесс применения симплексного метода предполагает реализацию трех основных элементов:

1) способ определения какого-либо первоначального допустимого базисного решения задачи;
2) правило перехода к лучшему (точнее, не худшему) решению;
3) критерий проверки оптимальности найденного решения.

Алгоритм симплекс-метода.

ШАГ 1

Формулировка ЗЛП (формирование целевой функции и системы ограничений).

Для определенности будем считать, что решается задача на отыскание максимума.

$$L(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,n$$

Алгоритм симплекс-метода. ШАГ 2

Приведение задачи к канонической форме (перевод функциональных ограничений в систему уравнений).

В ограничения задачи вводятся *дополнительные переменные*

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2, \\
\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + y_m = b_m.
\end{cases}
$$

Все дополнительные переменные также должны быть неотрицательными и иметь тот же знак, что и свободные члены системы ограничений.

Алгоритм симплекс-метода.

ШАГ 3

Построение исходной симплекс-таблицы (получение первоначального допустимого базисного решения).

базис	переменные							b_i
	x_1	x_2	...	x_n	y_1	...	y_m	
y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	0	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	...	0	b_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...
y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	1	b_m
c_j	c_1	c_2	...	c_n	0	0	0	L

Первое допустимое решение: (0, 0,…,0, b_1, b_2, …, b_m)

Алгоритм симплекс-метода.

ШАГ 4

Проверка условия: все $c_j \le 0$. Если НЕТ - осуществляется переход к шагу 5, если ДА - задача решена.

Алгоритм симплекс-метода.

ШАГ 5

Выбор разрешающего столбца

(переменной, вводимой в базис).

Разрешающий столбец выбирается в соответствии со следующим условием:

$$c_r = \max_{j=1,n+m} \{c_j\}$$

Алгоритм симплекс-метода.

ШАГ 6

Проверка условия: все $a_{ir} \le 0$. Если ДА - целевая функция неограничена и решения нет, если НЕТ - переход к шагу 7.

Необходимо проверить элементы разрешающего столбца. Если среди них нет положительных, то задача неразрешима.

Алгоритм симплекс-метода.

ШАГ 7

Выбор разрешающей строки (переменной, выводимой из базиса) по условию:

$$D_s = \min_{i=1,m} \left\{ \frac{b_i}{a_{ir}} \right\},$$

для $a_{ir} > 0$, где s - номер разрешающей строки.

Алгоритм симплекс-метода. ШАГ 8

Пересчет элементов симплекс-таблицы (переход к новому базисному решению).
Порядок пересчета различных элементов таблицы несколько отличается.

Для элементов разрешающей строки используются следующие формулы:

$$a'_{sj} = \frac{a_{sj}}{a_{sr}}, b'_{s} = \frac{b_{s}}{a_{sr}},$$

где s - номер разрешающей строки,
r - номер разрешающего столбца,
a'_{sj}, b'_{s} - новые значения пересчитываемых элементов,
a_{sj}, b_{s} - старые значения пересчитываемых элементов,
a_{sr} - старое значение разрешающего элемента.
Таким образом, при пересчете элементов разрешающей строки каждый ее элемент делится на разрешающий элемент.

Алгоритм симплекс-метода.

ШАГ 8

Пересчет элементов *разрешающего столбца.* Все они (кроме разрешающего элемента) должны стать равными нулю:

$$a'_{ir} = 0, c'_r = 0$$

базис	переменные							b_i
	x_1	x_2	…	x_n	y_1	…	y_m	
y_1	a_{11}	0	…	a_{1n}	1	0	0	b_1
x_2	a_{21}/a_{22}	1	…	a_{2n}/a_{22}	$0/a_{22}$	…	$0/a_{22}$	b_2/a_{22}
…	…	…	…	…	…	…	…	…
y_m	a_{m1}	0	…	a_{mn}	0	0	1	b_m
c_j	c_1	**0**	…	c_n	**0**	**0**	**0**	L

Алгоритм симплекс-метода.

ШАГ 8

Пересчет остальных элементов

Элементы, не принадлежащие разрешающим столбцу и строке, пересчитываются по так называемому **правилу прямоугольника**: мысленно выделяется прямоугольник, в котором элемент, подлежащий пересчету и разрешающий элемент образуют одну из диагоналей. Формулы будут иметь следующий вид:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ir}a_{sj}}{a_{sr}}; b'_i = b_i - \frac{a_{ir}b_s}{a_{sr}}; c'_j = c_j - \frac{a_{sj}c_r}{a_{sr}}; L' = L - \frac{c_r b_s}{a_{sr}}.$$

Алгоритм повторяем с шага 4 до тех пор, **пока** в строке коэффициентов целевой функции **есть неотрицательные** элементы.

Решение находится в первом и последнем столбцах, значение целевой функции – в правой нижней ячейке (со знаком минус)

базис	**переменные**							$\mathbf{b_i}$
	x_1	x_2	…	x_n	y_1	…	y_m	
$\mathbf{x_2}$	0	1		0				$\mathbf{b'_1}$
$\mathbf{x_n}$	0	0		1				$\mathbf{b'_2}$
…								**…**
$\mathbf{x_1}$	1	0		0				$\mathbf{b'_m}$
$\mathbf{c_j}$	**<=0**	**<=0**	**…**	**<=0**	**<=0**	**…**	**<=0**	**– L**