Статистические игры

С единичным экспериментом

Виды экспериментов

- При решении статистических игр с единичным экспериментом возможно провести идеальный, либо неидеальный эксперимент.
- *Идеальный* – это такой эксперимент, который полностью выясняет состояние «природы».
- *Неидеальный* эксперимент уточняет вероятности (в смысле Байеса).

Идеальный эксперимент

- Один из основных вопросов статистической игры с идеальным экспериментом состоит в определении, покроет ли эффект от эксперимента затраты на его проведение. Если да – то эксперимент целесообразно проводить, если нет – то эксперимент не проводится.

Идеальный эксперимент

- Оперирующая сторона обычно называется *статистиком*, который располагает возможными стратегиями x_1, x_2, …, x_m. Вторая сторона – «*природа*». Она может находится в одном из состояний $П_1$, $П_2$,…, $П_n$ с вероятностями q_1, q_2,…, q_n.
- Можно считать, что если мы не будем проводить эксперимент, то можем выбрать ту стратегию, которой соответствует

$$i_0 = \arg\max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot q_j, \quad \overline{a}_{cp} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot q_j.$$

Идеальный эксперимент

- Если мы проведем эксперимент, то выясним, какое из состояний $П_j$ будем иметь место и уже тогда выберем

$$\beta_j = \max_i a_{ij}.$$

- Проведение эксперимента целесообразно, если результирующий выигрыш будет выше, чем сумма старого выигрыша (доэкспериментального) и стоимость эксперимента

$$\max_i \sum_j a_{ij} \cdot q_j < \sum_j \beta_{ij} \cdot q_j - C,$$

$$\min\left(\sum q_j \left(\beta_j - a_{ij}\right)\right) > C \Rightarrow \min \bar{r}_{cp} > C.$$

Пример

- На технологическую линию может поступать сырье разного качества. Из прошлого опыта известно, что в 60% случаев поступает сырье с малым количеством примесей $П_1$, в 40% случаев - сырье с большим количеством примесей $П_2$. На технологической линии предусмотрены 3 режима работы. Прибыль предприятия от реализации продукции, производимой технологической линией, зависит от качества используемого сырья и режима работы технологической линии.

- Эта прибыль в расчете на один день работы представлена матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Определить предельную стоимость эксперимента, который целесообразно проводить один раз в день с целью точного определения качества сырья.

Неидеальный эксперимент

- В случае *неидеального* эксперимента мы имеем следующие входные данные:
  - Стратегии статистика $X=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$
  - Вектор состояний природы $П=(П_1, П_2, \ldots, П_n)$
  - Вектор априорных вероятностей $Q=(q_1, q_2, \ldots, q_n)$
  - Матрица выигрышей $\{a_{ij}\}$
  - Множество возможных исходов единичного эксперимента $S=(s_1, s_2, \ldots, s_k)$
  - Матрица условных вероятностей $W=\{w_{ij}=P(s_i/П_j\}$
  - Цена эксперимента *C*.
- В этом случае необходимо решить 2 вопроса:
  - Целесообразно ли проводить эксперимент?
  - Если проводить эксперимент целесообразно, то определить, какая из стратегий должна быть выбрана в качестве оптимальной

Неидельный эксперимент

- Если в результате эксперимента возникает ситуация S_ℓ, то используя формулу Байеса, можно рассчитать апостериорные вероятности:

$$v_{j\ell} = P\left(\Pi_j / S_\ell \right) = \frac{q_j \cdot w_{\ell j}}{\sum_{s=1}^{k} q_s \cdot w_{\ell s}}$$

- Определяем для каждой стратегии i средний выигрыш с учетом апостериорных вероятностей:

$$\overline{a}_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot v_{j\ell}.$$

- Условный средний выигрыш от стратегии x_i при условии, что эксперимент дал результат S_ℓ.

Неидеальный эксперимент

- Находим соответствующий оптимально-средний выигрыш

$$\overline{a}_{\ell} = \max_i \overline{a}_{i\ell} = \max \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot v_{j\ell},$$

$$i_{\ell} = \arg\max_i \overline{a}_{i\ell} - \text{номер стратегии при исходе } S_{\ell}$$

- Для усреднения этого результата по всем возможным исходам S_ℓ нужно найти вероятности каждого исхода

$$h_{\ell} = P(S_{\ell}) = \sum_{j} q_j \cdot w_{\ell j}.$$

Неидеальный эксперимент

- Находим средний выигрыш при условии проведения эксперимента

$$\overline{a}_{экс} = \sum_{\square=1}^{k} \overline{a}_{\square} \cdot h_{\square}.$$

- Необходимо сравнить полученный результат с

$$\overline{a} = \max_{i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot q_{j}.$$

- Очевидно, что эксперимент следует проводить при условии

$$\overline{a}_{экс} - \overline{a} > C.$$

Пример

$x_i \backslash П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
x_1	1	4	5	9
x_2	3	8	4	3
x_2	4	6	6	2
q	0.1	0.2	0.5	0.2

$S_\ell \backslash П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
S_1	0.2	0.9	0.4	0.3
S_2	0.1	0.1	0.5	0.3
S_3	0.7	0	0.1	0.4