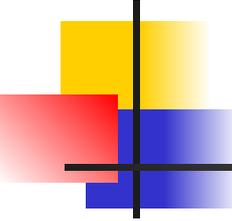


# Статистические игры

---

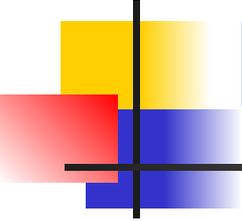
С единичным экспериментом



# Виды экспериментов

---

- При решении статистических игр с единичным экспериментом возможно провести идеальный, либо неидеальный эксперимент.
- *Идеальный* – это такой эксперимент, который полностью выясняет состояние «природы».
- *Неидеальный* эксперимент уточняет вероятности (в смысле Байеса).



# Идеальный эксперимент

---

- Один из основных вопросов статистической игры с идеальным экспериментом состоит в определении, покроеет ли эффект от эксперимента затраты на его проведение. Если да – то эксперимент целесообразно проводить, если нет – то эксперимент не проводится.

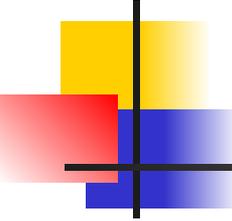


# Идеальный эксперимент

---

- Оперирующая сторона обычно называется *статистиком*, который располагает возможными стратегиями  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . Вторая сторона – «природа». Она может находиться в одном из состояний  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$  с вероятностями  $q_1, q_2, \dots, q_n$ .
- Можно считать, что если мы не будем проводить эксперимент, то можем выбрать ту стратегию, которой соответствует

$$i_0 = \arg \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot q_j, \quad \bar{a}_{cp} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot q_j.$$



# Идеальный эксперимент

---

- Если мы проведем эксперимент, то выясним, какое из состояний  $\Pi_j$  будем иметь место и уже тогда выберем

$$\beta_j = \max_i a_{ij}.$$

- Проведение эксперимента целесообразно, если результирующий выигрыш будет выше, чем сумма старого выигрыша (доэкспериментального) и стоимость эксперимента

$$\max_i \sum_j a_{ij} \cdot q_j < \sum_j \beta_{ij} \cdot q_j - C,$$

$$\min\left(\sum_j q_j (\beta_j - a_{ij})\right) > C \Rightarrow \min \bar{r}_{cp} > C.$$



# Пример

---

- На технологическую линию может поступать сырье разного качества. Из прошлого опыта известно, что в 60% случаев поступает сырье с малым количеством примесей  $P_1$ , в 40% случаев - сырье с большим количеством примесей  $P_2$ . На технологической линии предусмотрены 3 режима работы. Прибыль предприятия от реализации продукции, производимой технологической линией, зависит от качества используемого сырья и режима работы технологической линии.
- Эта прибыль в расчете на один день работы представлена матрицей
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
- Определить предельную стоимость эксперимента, который целесообразно проводить один раз в день с целью точного определения качества сырья.



# Неидеальный эксперимент

---

- В случае *неидеального* эксперимента мы имеем следующие входные данные:
  - Стратегии статистика  $X=(x_1, x_2, \dots, x_m)$
  - Вектор состояний природы  $\Pi=(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n)$
  - Вектор априорных вероятностей  $Q=(q_1, q_2, \dots, q_n)$
  - Матрица выигрышей  $\{a_{ij}\}$
  - Множество возможных исходов единичного эксперимента  $S=(s_1, s_2, \dots, s_k)$
  - Матрица условных вероятностей  $W=\{w_{ij}=P(s_i/\Pi_j)\}$
  - Цена эксперимента  $C$ .
- В этом случае необходимо решить 2 вопроса:
  - Целесообразно ли проводить эксперимент?
  - Если проводить эксперимент целесообразно, то определить, какая из стратегий должна быть выбрана в качестве оптимальной



# Неидельный эксперимент

- Если в результате эксперимента возникает ситуация  $S_{\varrho}$ , то используя формулу Байеса, можно рассчитать апостериорные вероятности:

$$v_{j\varrho} = P\left(\frac{\Pi_j}{S_{\varrho}}\right) = \frac{q_j \cdot w_{\varrho j}}{\sum_{s=1}^k q_s \cdot w_{\varrho s}}$$

- Определяем для каждой стратегии  $i$  средний выигрыш с учетом апостериорных вероятностей:

$$\bar{a}_{i\varrho} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot v_{j\varrho}.$$

- Условный средний выигрыш от стратегии  $x_i$  при условии, что эксперимент дал результат  $S_{\varrho}$ .



# Неидеальный эксперимент

---

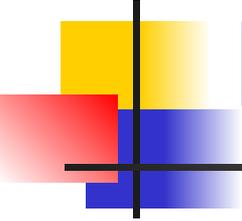
- Находим соответствующий оптимально-средний выигрыш

$$\bar{a}_{i_{\boxtimes}} = \max_i \bar{a}_{i_{\boxtimes}} = \max \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot v_{j_{\boxtimes}},$$

$i_{\boxtimes} = \arg \max_i \bar{a}_{i_{\boxtimes}}$  – номер стратегии при исходе  $S_{\boxtimes}$

- Для усреднения этого результата по всем возможным исходам  $S_{\ell}$  нужно найти вероятности каждого исхода

$$h_{\boxtimes} = P(S_{\boxtimes}) = \sum_j q_j \cdot w_{\boxtimes j}.$$



# Неидеальный эксперимент

---

- Находим средний выигрыш при условии проведения эксперимента

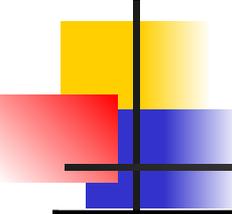
$$\bar{a}_{\text{экс}} = \sum_{\boxtimes=1}^k \bar{a}_{\boxtimes} \cdot h_{\boxtimes}.$$

- Необходимо сравнить полученный результат с

$$\bar{a} = \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot q_j.$$

- Очевидно, что эксперимент следует проводить при условии

$$\bar{a}_{\text{экс}} - \bar{a} > C.$$



# Пример

$x_i \backslash \pi_j$	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$
$x_1$	1	4	5	9
$x_2$	3	8	4	3
$x_2$	4	6	6	2
$q$	0.1	0.2	0.5	0.2

$S_\ell \backslash \pi_j$	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$
$S_1$	0.2	0.9	0.4	0.3
$S_2$	0.1	0.1	0.5	0.3
$S_3$	0.7	0	0.1	0.4