Стохастические игры

Игры с «природой»

Основные определения

- К теории игр примыкает так называемая теория статистических решений. Зачастую принятие управленческих решений предполагает наличие ситуаций выбора наиболее выгодного варианта поведения из нескольких имеющихся вариантов в условиях неопределённости. В этом случае противником игрока (*лица, принимающего решения* – ЛПР) является некоторая объективная действительность, которую принято называть *природой*.
- *Игра с природой* (статистическая игра) – это парная матричная игра, в которой сознательный игрок А (статистик) выступает против участника, совершенно безразличного к результату игры, называемого природой.

Платежная матрица

- Объективно система (природа, окружающая среда) не заинтересована в проигрыше игрока. В процессе принятия решения о выборе варианта поведения игрок имеет информацию о том, что окружающая среда может принять одно из нескольких возможных состояний и сталкивается с неопределённостью относительно того конкретного состояния, которое примет окружающая среда в данный момент времени.

- В общем виде платёжная матрица статистической игры имеет вид:
- В данной игре строки матрицы (Ai) - стратегии ЛПР, а столбцы матрицы (Sj) – состояния окружающей среды.

	S_1	S_2	…	S_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_n	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Исследование платежной матрицы

- Начинать анализ платежной матрицы следует с определения «заведомо невыгодных» стратегий игрока А (доминируемых), которые исключаются из платежной матрицы. Удалять доминируемые стратегии – состояния окружающей среды нельзя, т.к. они принципиально не могут быть выгодными или невыгодными.
- Нецелесообразно решать такую игру методами решения антагонистических игр, определяя смешанную стратегию игрока А. Здесь качественно другая ситуация. Поэтому решением является чистая стратегия игрока А, которая определяется с помощью критериев принятия решения.

Понятие риска

- **Риском** r_{ij} игрока при выборе стратегии A_i в условиях S_j называется разность

$$r_{ij} = b_j - a_i,$$

- где b_j - максимальный элемент в j - м столбце.
- Другими словами риск при выборе стратегии A_i это проигрыш по сравнению с тем случаем, когда игрок знал бы условие при котором он может получить выигрыш b_j.

Матрица риска

- Найдем **матрицу риска** R для следующей матрицы игры A.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 & -5 \\ 15 & 5 & 19 & 15 \\ 15 & -5 & 5 & 35 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 18 & 40 \\ 0 & 2 & 0 & 20 \\ 0 & 12 & 14 & 0 \end{pmatrix}$$

Если известны вероятности состояний природы

- Предположим, что неопределенность состояний природы (доброкачественная), то есть вероятности состояний p_j известны, вычислим математическое ожидание выигрыша первого игрока, то есть выбрать стратегию удовлетворяющую условию (критерий Байеса)

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} p_j a_{ij} \to \max$$

- Следует отметить, что точно та же стратегия соответствует минимальному математическому ожиданию риска

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} p_j r_{ij} \to \min$$

Пример

- Пусть распределение вероятности состояний природы в последней задаче равны:
  - $P(S_1)=2/5$; $P(S_2)=1/5$; $P(S_3)=1/5$; $P(S_4)=1/5$;
- Тогда
  - $a_1 = 13/5$; $a_2 = 69/5$; $a_3 = 13$;
  - $a = \max(13/5, 69/5, 13) = 69/5 = 13{,}8$.
- Следовательно оптимальной по этому критерию является стратегия A_2.
- Далее рассмотрим критерий минимального математического ожидания риска
  - $r_1 = 78/5$; $r_2 = 22/5$; $r_3 = 26/5$;
  - $r = \min(78/5, 22/5, 26/5) = 22/5 = 4{,}4$.

Критерии принятия решений

- **Критерий недостаточного основания Лапласа** – максимальное среднее значение каждой строки.

- **Критерий Вальда (максиминный)** совпадает с крайне осторожной максиминной стратегией.

Критерии принятия решения

- **Критерий минимального риска Севиджа** рекомендует выбирать стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации
- Игрок, применяющий критерий Севиджа, также придерживается позиции пессимизма, ориентирующийся на минимально возможный риск
- **Критерий Гурвица** соответствует всем промежуточным стратегиям между пессимизмом и крайним оптимизмом. Выигрыш рассчитывается по формуле:
- где **λ (**0 ≤ λ ≤ 1) - *коэффициент пессимизма*; чем больше игрок хочет подстраховаться тем большее значение λ он выбирает. При λ = 1 критерий Гурвица соответствует критерию крайнего пессимизма, критерию Вальда.

Задание

- Рассмотрим пример решения статистической игры в экономической задаче.
- Сельскохозяйственное предприятие может реализовать некоторую продукцию:
  - A1 – сразу после уборки;
  - A2 – в зимние месяцы;
  - A3 – в весенние месяцы.
- Прибыль зависит от цены реализации в данный период времени, затратами на хранение и возможных потерь. Размер прибыли, рассчитанный для разных состояний-соотношений дохода и издержек (S1, S2 и S3), в течение всего периода реализации, представлен в виде матрицы (млн. руб.)

	S1	S2	S3
A1	2	-3	7
A2	-1	5	4
A3	-7	13	-3

Задание

- Решить игру, если неизвестны состояния природы.

	S_1	S_2	S_3
A_1	20	30	15
A_2	75	20	35
A_3	25	80	25
A_4	85	5	45