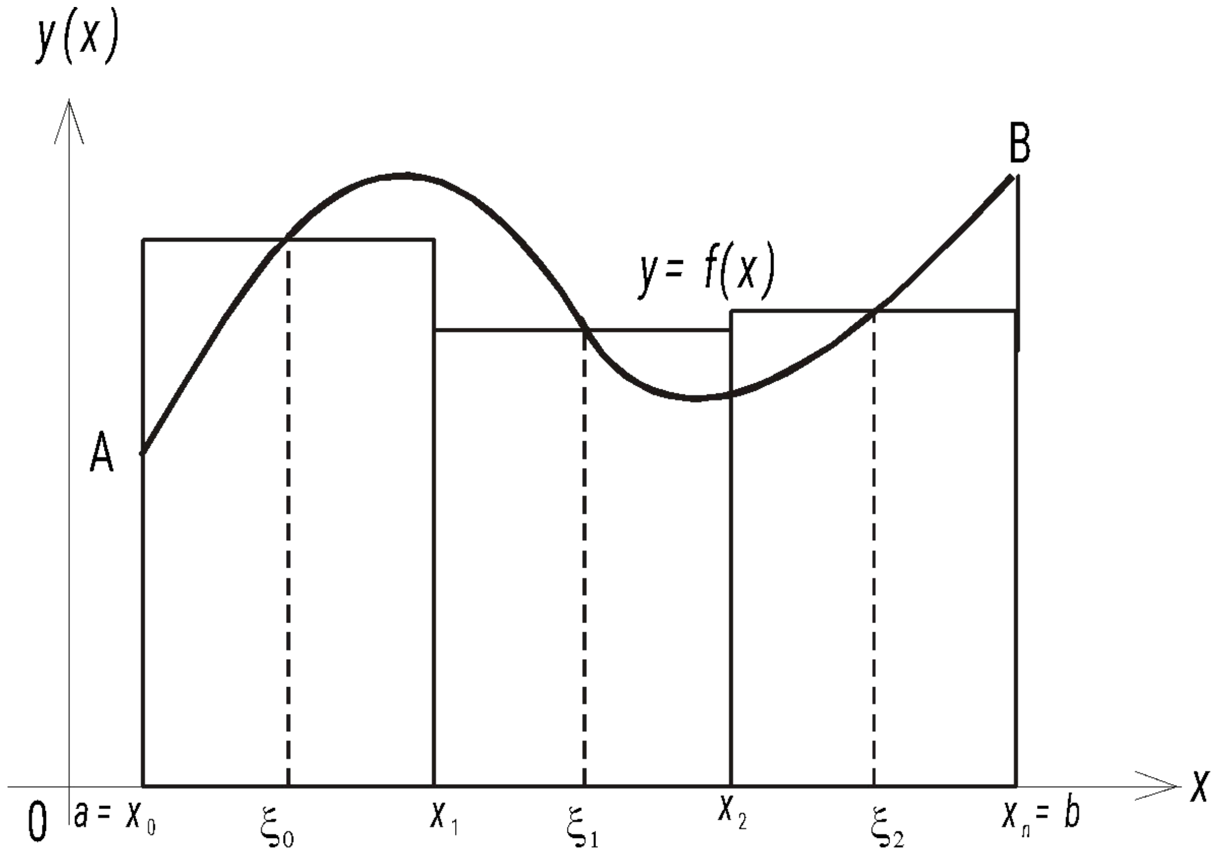
Применение определенного интеграла

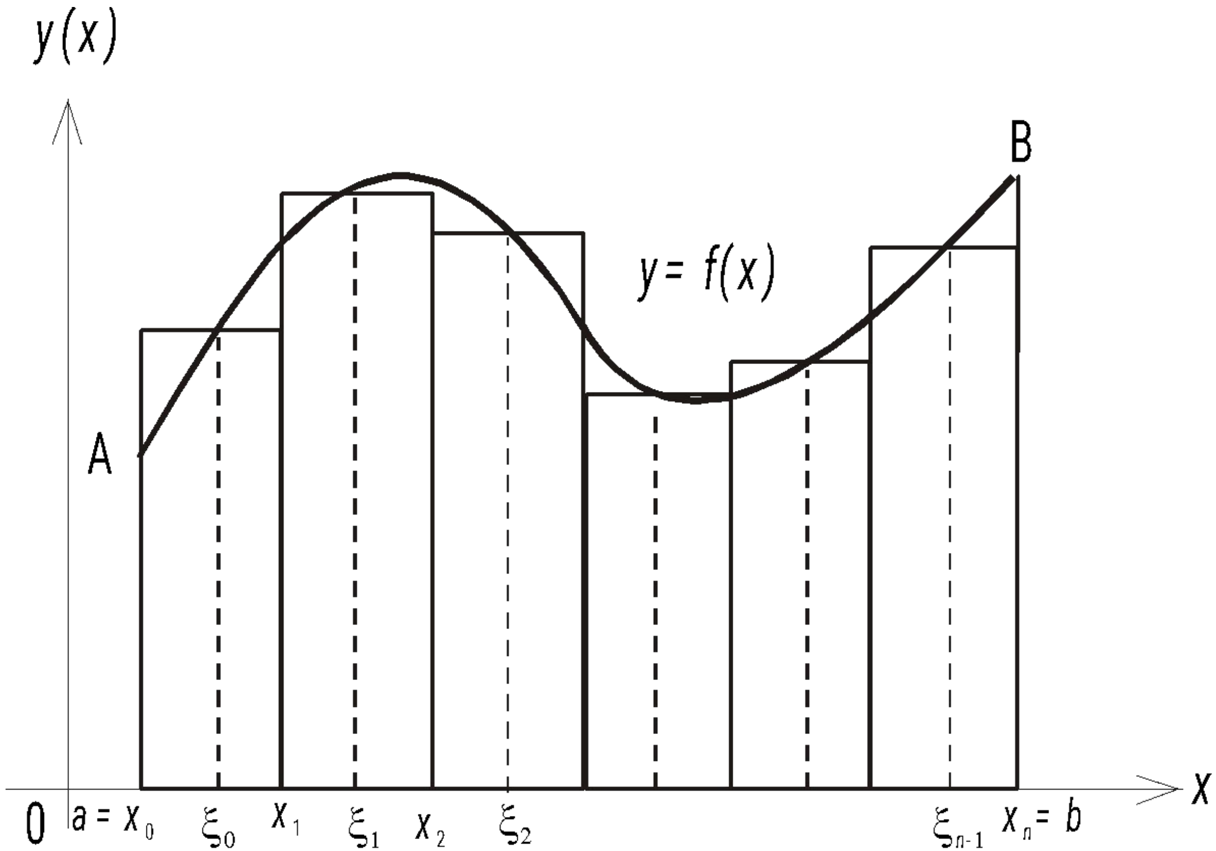
1. Геометрическое приложение.
2. Механическое приложение.

? 1.1. Площадь плоской фигуры

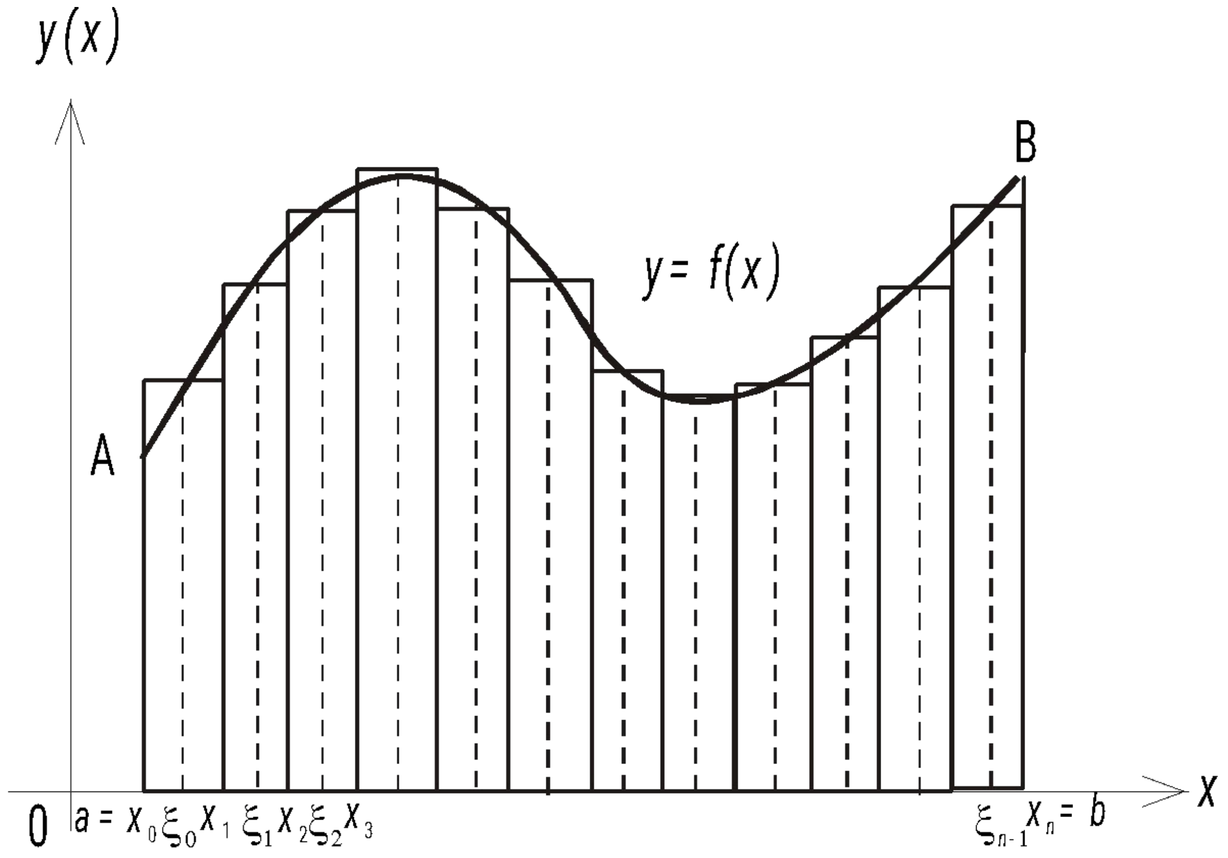
Задача о вычислении площади криволинейной фигуры



Задача о вычислении площади криволинейной фигуры



Задача о вычислении площади криволинейной фигуры



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\xi_j\right)\Delta x_j$$

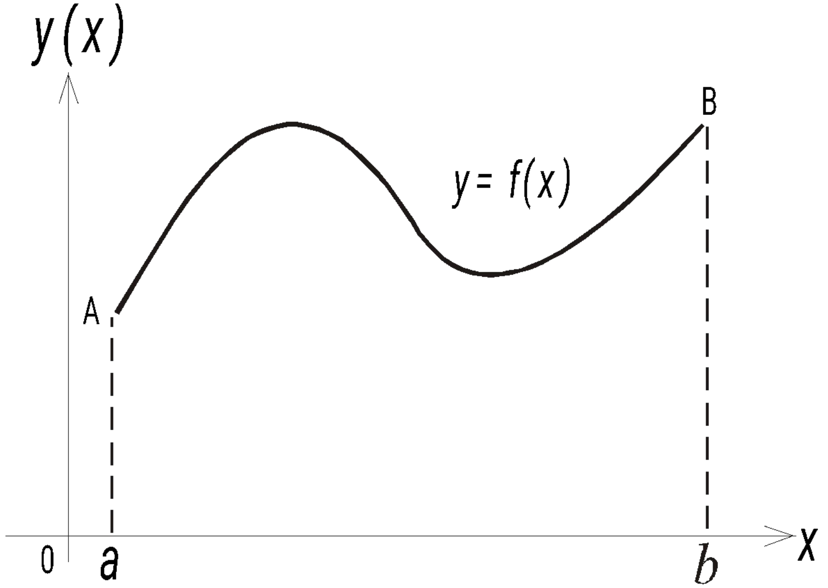
Вычисление площадей в прямоугольных координатах

Если $a<b$

и

$f(x)\geq 0$,

$$\boxed{S=\int_a^b f(x)dx}$$



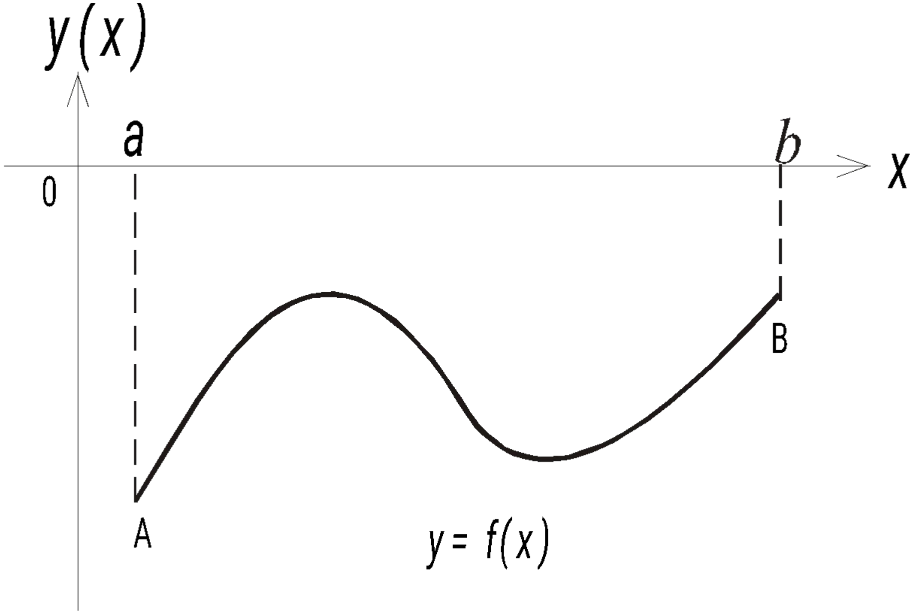
Вычисление площадей в прямоугольных координатах

Если $a<b$

и

$f(x)\le 0$,

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$



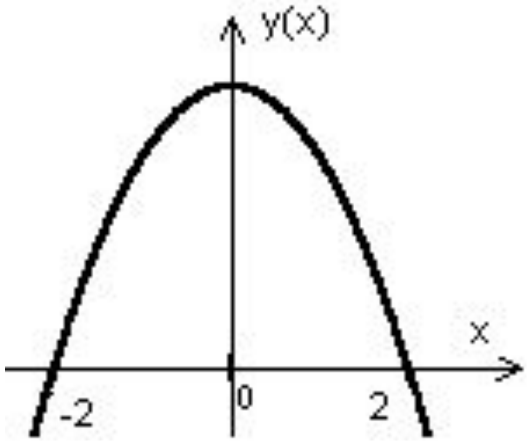
Пример:

Найти площадь фигуры, заключенной между осью Ox и кривой $y = 4 - x^2$.

Пример:

Найти площадь фигуры, заключенной между осью Ox и кривой $y = 4 - x^2$.

Решение:



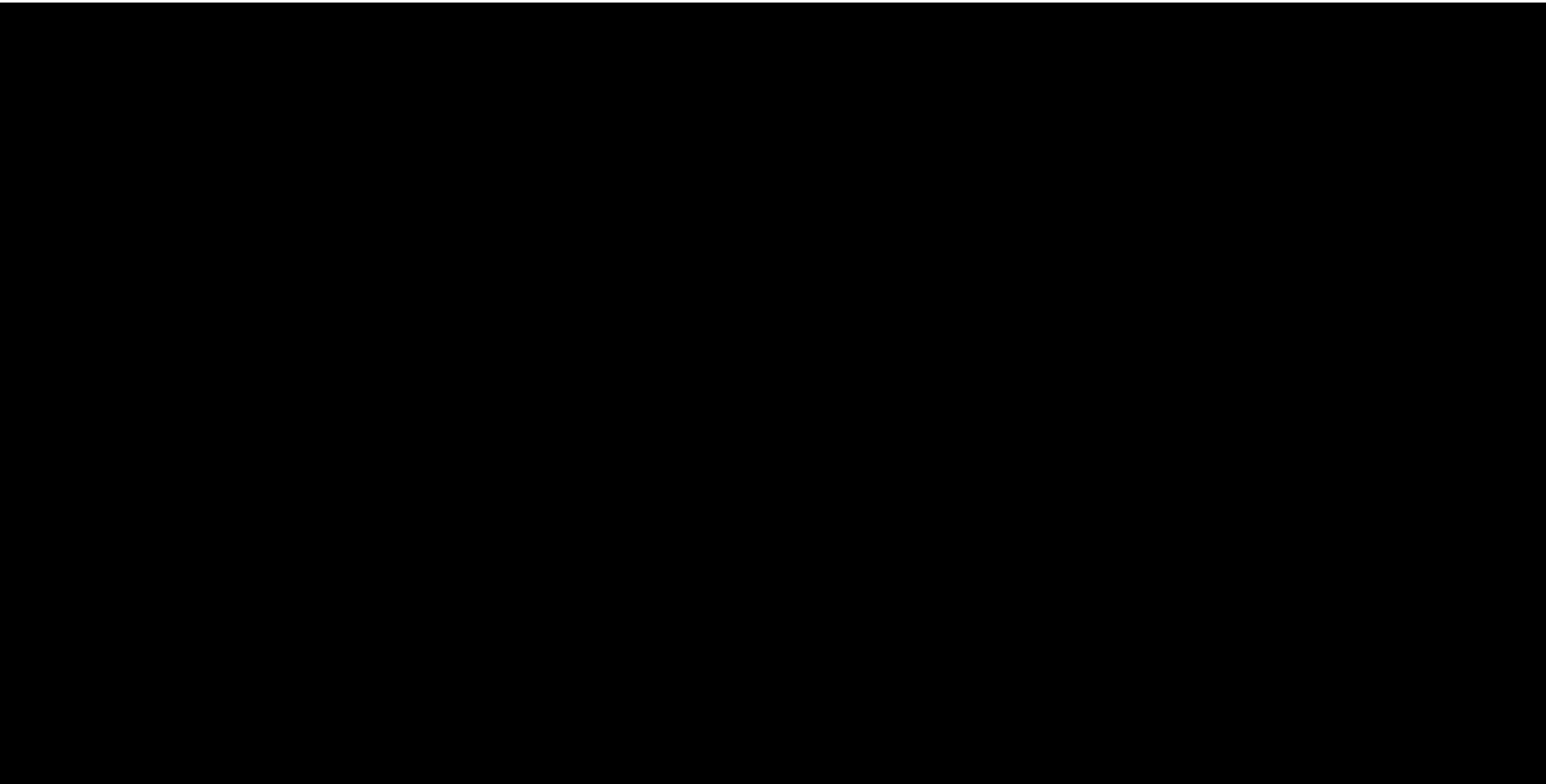
Найдем точки пересечения

$$4 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2 \text{ и } x_2 = 2.$$

$$S = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2} = 10\frac{2}{3}$$

Пример:

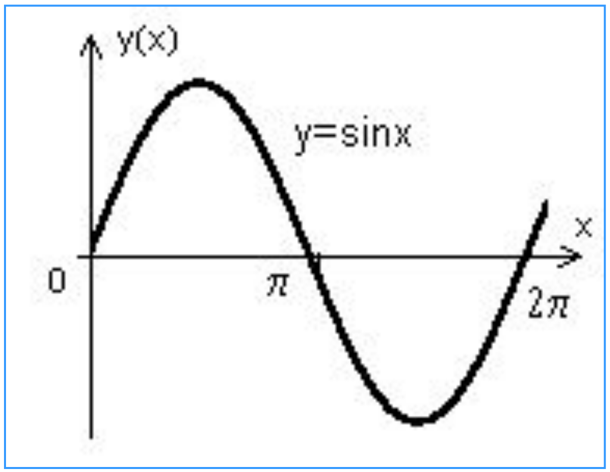
Вычислить площадь, ограниченную синусоидой $y = \sin x$ и осью Ox, при $0 \le x \le 2\pi$



Пример:

Вычислить площадь, ограниченную синусоидой $y = \sin x$ и осью Ox, при $0 \le x \le 2\pi$

Решение:



$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2,$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos\pi) = -(1-(-1)) = -2,$$

$$\boxed{S = 2-(-2) = 4}$$

Пример:

Вычислить площадь, ограниченную кривыми

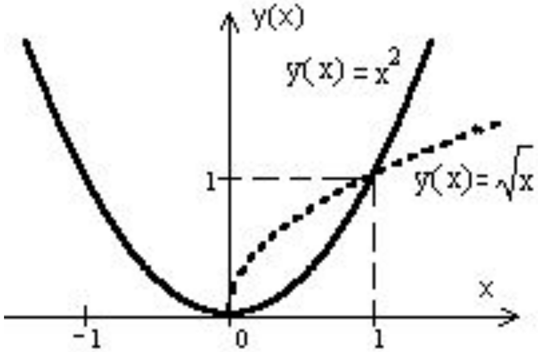
$$y = \sqrt{x} \quad \text{и} \quad y = x^2 \ .$$

Пример:

Вычислить площадь, ограниченную кривыми

$$y = \sqrt{x} \quad \text{и} \quad y = x^2 \quad .$$

Решение:



$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2,$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos\pi) = -(1-(-1)) = -2,$$

$$\boxed{S=2-(-2)=4}$$

Вычисление площадей кривых, заданных параметрически

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a, b]$ оси Ox:

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt,}$$

где t_1 и t_2 определяются из уравнений $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$ ($y(t) \geq 0$ при $t_1 \leq t \leq t_2$)

Замечание

Формула

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt,}$$

применима также для вычисления площади фигуры, ограниченной замкнутой кривой (изменение параметра t от t_1 до t_2 должно соответствовать обходу контура по часовой стрелке).

Пример:

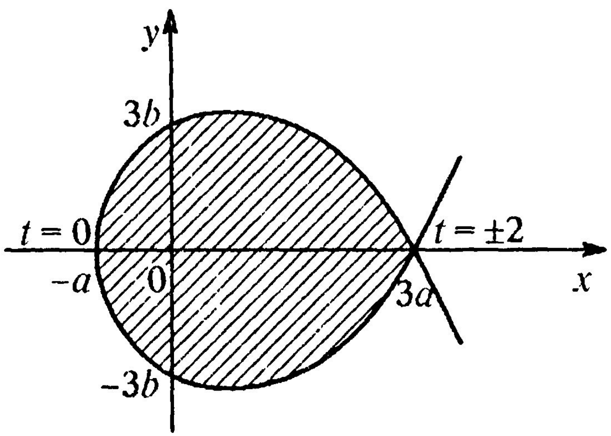
Найти площадь петли кривой

$x = a(t^2 - 1),$ $\quad y = b(4t - t^3)$ $\quad (a > 0, b > 0)$

Пример:

Найти площадь петли кривой

$x = a(t^2 - 1), \qquad y = b(4t - t^3) \qquad (a > 0, b > 0)$



Решение:

Найдем точки пересечения кривой с координатными осями

$x = 0$ при $t = \pm 1$;

$y = 0$ при $t = 0$, $t = \pm 2$.

$(0, 3b)$ при $t = 1$; $(0, -3b)$ при $t = -1$;

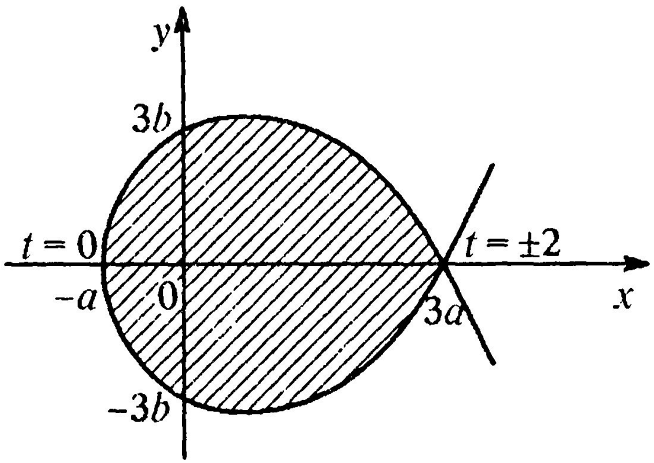
$(-a, 0)$ при $t = 0$; $(3a, 0)$ при $t = \pm 2$.

Пример:

Найти площадь петли кривой

$$x = a(t^2 - 1), \qquad y = b(4t - t^3) \qquad (a > 0, b > 0)$$

Решение:



$(0, 3b)$ при $t = 1$; $(0, -3b)$ при $t = -1$;

$(-a, 0)$ при $t = 0$; $(3a, 0)$ при $t = \pm 2$.

$$S = 2\int_{-a}^{3a} y\,dx = 2\int_{0}^{2} y(t)x'(t)\,dt =$$

$$= 2\int_{0}^{2} b(4t - t^3)a \cdot 2t\,dt = 4ab\int_{0}^{2}(4t^2 - t^4)\,dt = 4ab\left(\frac{4}{3}t^3 - \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{256}{15}ab$$

Вычисление площадей в полярных координатах

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho\,(\phi)$ и двумя лучами $\phi = \alpha$, $\phi = \beta$ $(\alpha < \beta)$:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi}$$

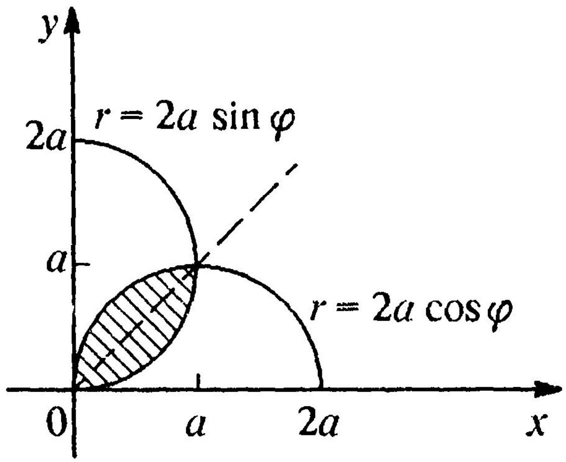
Пример:

Вычислить площадь лунки, ограниченной дугами окружностей $r = 2a\cos\varphi$ $r = 2a\sin\varphi$ $0 \le \varphi \le \pi/2,\ a > 0$

Пример:

Вычислить площадь лунки, ограниченной дугами окружностей $r = 2a\cos\varphi$ $r = 2a\sin\varphi$ $0 \le \varphi \le \pi/2,\ a > 0$

Решение:



Окружности пресекаются при

$$\varphi = \pi/4$$

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 4a^2\sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi/4}(1-\cos 2\varphi)d\varphi =$$

$$= 2a^2\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)a^2.$$

? 1.2. Длина дуги кривой

В декартовых координатах:

Если гладкая кривая задана уравнением $y = f(x)$, то длина l ее дуги:

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx,}$$

где a и b – абсциссы концов дуги.

Пример:

Найти длину полукубической параболы

$$y^2 = x^3$$

от начала координат до точки (4, 8).

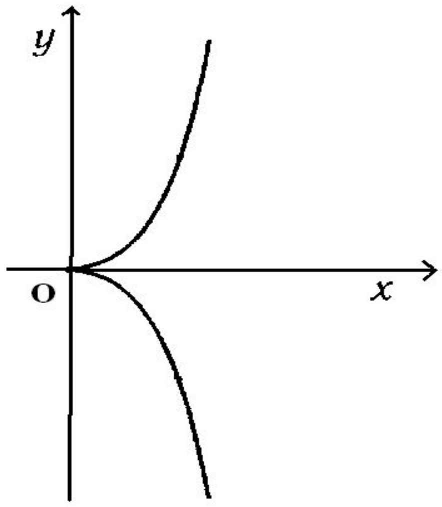
Пример:

Найти длину полукубической параболы

$$y^2 = x^3$$

от начала координат до точки (4, 8).

Решение:



$$y = x^{3/2} \Rightarrow y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx,}$$

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$$

Кривая задана параметрически

$$x = x(t),\ y = y(t),\ (t_1 \le t \le t_2):$$

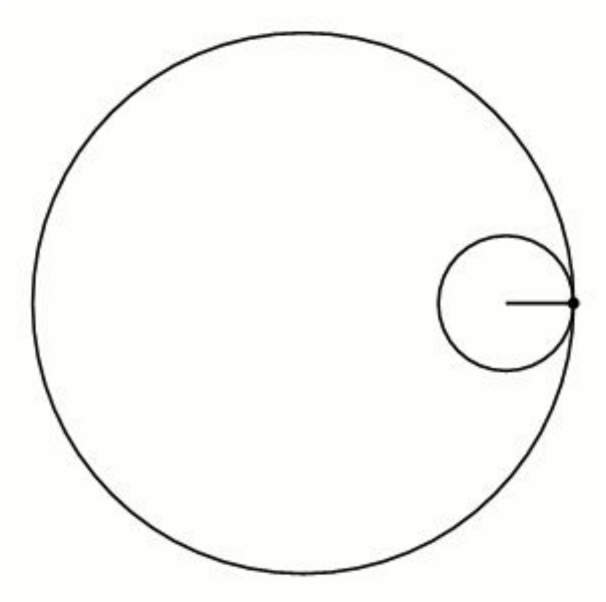
$$\boxed{l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt.}$$

Пример:

Найти длину астроиды

$$x = a\cos^3 t, \qquad y = a\sin^3 t$$

Решение:

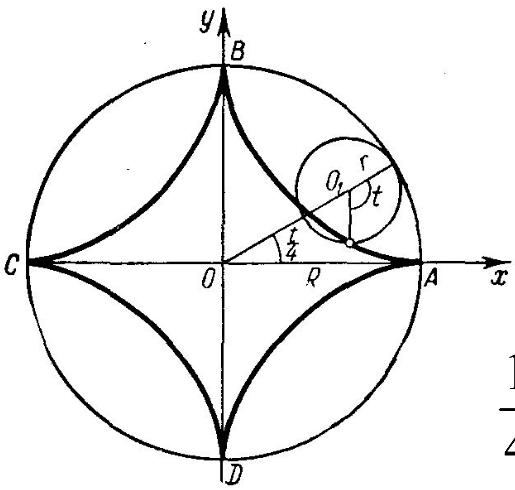


Пример:

Найти длину астроиды

$$x = a\cos^3 t, \qquad y = a\sin^3 t$$

Решение:



$$x'_t = -3a\cos^2 t \cdot \sin t \qquad y'_t = 3a\sin^2 t \cdot \cos t$$

$$\boxed{l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt.}$$

$$\frac{1}{4} l = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4 t \cdot \sin^2 t + 9a^2\sin^4 t \cdot \cos^2 t}\, dt =$$

$$= 3a \int_0^{\pi/2} \sin t \cdot \cos t\, dt = \; 3a \frac{\sin^2 t}{2}\bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2}. \qquad \boxed{l = 6a}$$

Кривая задана параметрически

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ (t_1 \le t \le t_2):$$

$$\boxed{l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt.}$$

В полярных координатах

Если задано полярное уравнение гладкой кривой $\rho = \rho\ (\phi)$ и двумя лучами $\alpha \leq \phi \leq \beta$:

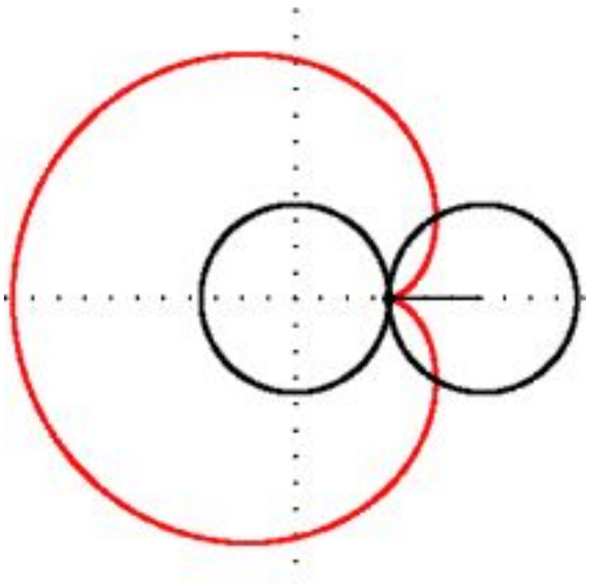
$$\boxed{l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi}$$

Пример:

Найти длину кардиоиды

$$r = a(1 - \cos\varphi) \quad (a > 0).$$

Решение:

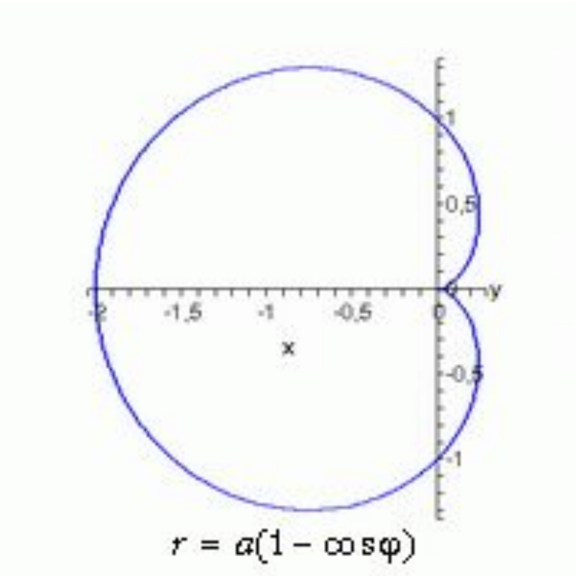


Пример:

Найти длину кардиоиды

$$r = a(1-\cos\varphi) \quad (a>0).$$

Решение:



$$r' = a\sin\varphi$$

$$\boxed{l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi}$$

$$\frac{1}{2} l = \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2 + a^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

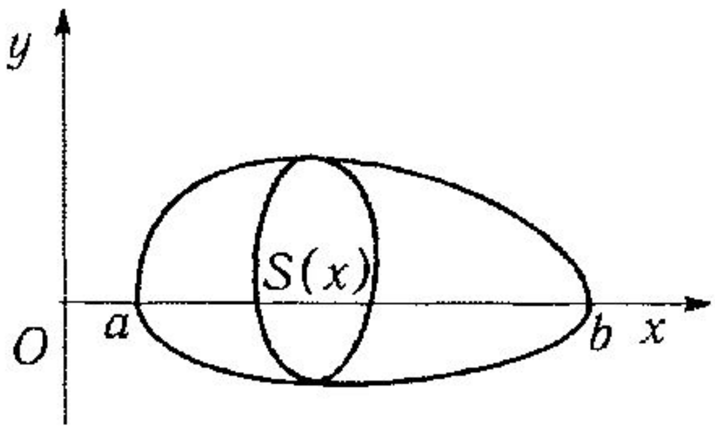
$$= a\int_0^{\pi} \sqrt{2(1-\cos\varphi)}\, d\varphi = 2a\int_0^{\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a,$$

$$\boxed{l = 8a}$$

? 1.3 Объем тела

Объем тела по площадям его параллельных сечений

Если площадь *S(x)* сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси *Ox*, является непрерывной функцией на отрезке [*a*, *b*], то объем тела:



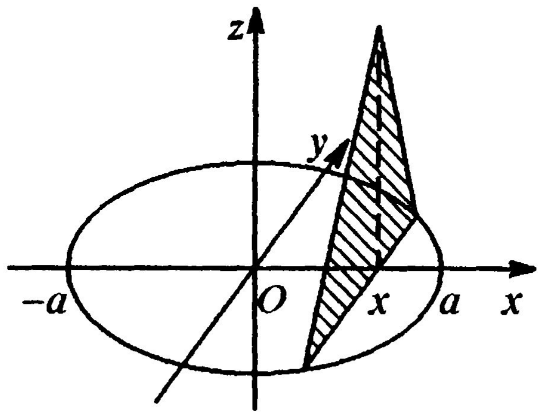
$$V = \int_a^b S(x)dx$$

где *a*, *b* – левая и правая границы тела.

Пример:

Найти объем тела, основание которого – круг радиуса *a*, а сечение плоскостью, перпендикулярной фиксированному диаметру круга, есть равнобедренный треугольник высоты *h*.

Решение:



$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx}$$

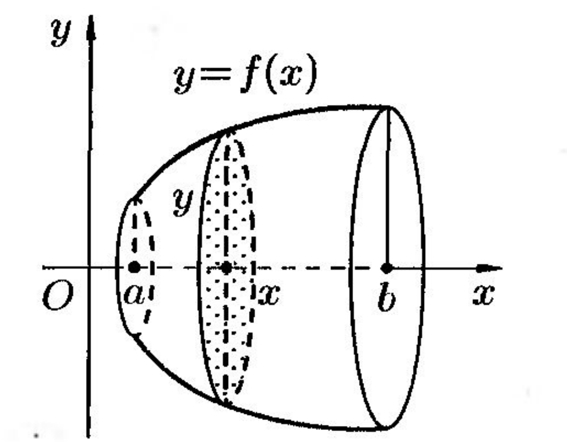
$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{a^2 - x^2}\,h = h\sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a \le x \le a)$$

$$V = h\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 2h\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx =$$

$$= 2h\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^a = 2h \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\pi a^2 h.$$

Объем тела вращения

Если криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $y = f(x) \geq 0$
и прямыми $y = 0, x = a, x = b \ (a > b)$, то объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Ox, равен



$$\boxed{V_x = \pi \int_a^h y^2 dx}$$

$$V = \int_a^b S(x)dx \qquad S(x) = \pi y^2$$

Объем тела вращения

Если криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $x = \varphi(y) \geq 0$
и прямыми $x = 0,\ y = c,\ y = d\ (c > d)$, то объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Oy, равен

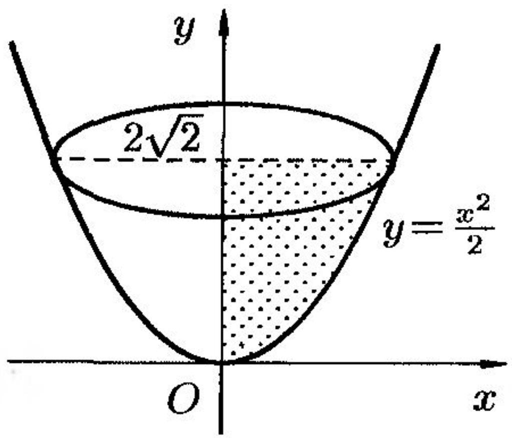
$$\boxed{V_y = \pi \int_c^d x^2 dy}$$

Пример:

Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{x^2}{2},\ x = 0,\ y = 2\sqrt{2}$$

Решение:



$$\boxed{V_y = \pi \int_c^d x^2 dy}$$

$$V_y = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} 2y dy = \pi y^2 \Big|_0^{2\sqrt{2}} = 8\pi$$

Объем тела вращения

Если криволинейный сектор, ограниченный кривой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$

вращается вокруг полярной оси,

то объем тела вращения равен

$$\boxed{V = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin\varphi d\varphi}$$

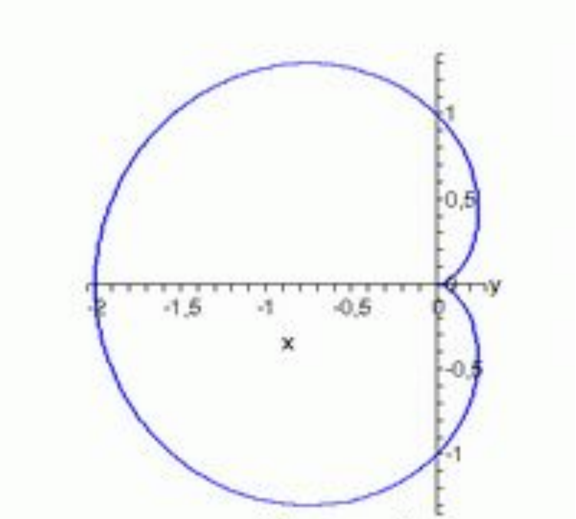
Пример:

Кардиоида $r = a(1 - \cos\varphi)$ вращается вокруг полярной оси.

Найти объем тела вращения

Решение:

$$\boxed{V = \frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin\varphi d\varphi}$$



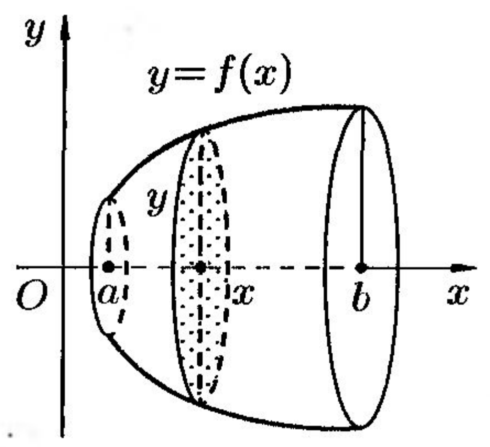
$r = a(1 - \cos\varphi)$

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_{0}^{\pi} a^3 (1 - \cos\varphi)^3 \sin\varphi d\varphi =$$

$$\frac{2}{3}\pi a^3 \left.\frac{(1 - \cos\varphi)^4}{4}\right|_0^{\pi} = \frac{8}{3}\pi a^3$$

Площадь поверхности вращения

Если криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $y = f(x) \geq 0$
и прямыми $y = 0, x = a, x = b\ (a > b)$, то площадь поверхности вращения, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Ox, равна



$$\boxed{S_x = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx}$$

Площадь поверхности вращения

Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t_1 \le t \le t_2$$

$$\boxed{S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.}$$

Если дуга задана в полярных координатах

$$r = r(\varphi), \quad \alpha \le \varphi \le \beta$$

$$\boxed{Q_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r \sin\varphi \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi}$$

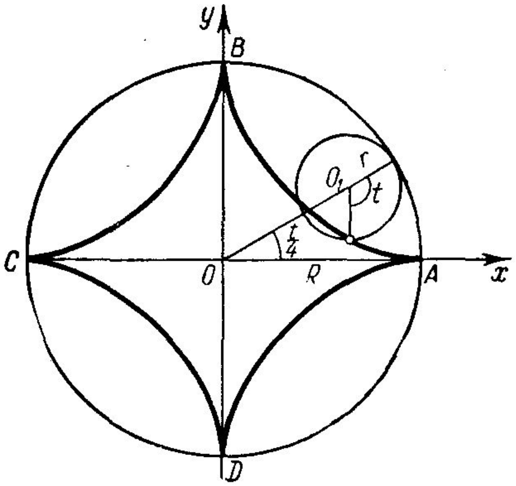
Пример:

Найти площадь поверхности, образованной вращением астроиды

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad \text{вокруг оси } Ox$$

Решение:

$$y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2},$$



$$y' = \frac{3}{2}(a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2}\left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right) = -\frac{\left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{1/2}}{x^{1/3}}$$

$$\sqrt{1 + \frac{a^{2/3} - x^{2/3}}{x^{2/3}}} = \frac{a^{1/3}}{|x|^{1/3}}.$$

Пример:

$$\boxed{S_x = 2\pi\int_a^b y\cdot\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx}$$

$$\sqrt{1+(y'_x)^2} = \sqrt{1+\frac{a^{2/3}-x^{2/3}}{x^{2/3}}} = \frac{a^{1/3}}{|x|^{1/3}}.$$

$$Q_x = 2\cdot 2\pi\int_0^a (a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}\cdot\frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}dx =$$

$$= 4\pi a^{1/3}\int_0^a (a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}\cdot x^{-1/3}dx =$$

$$= -4\pi a^{1/3}\cdot\frac{3}{2}\frac{(a^{2/3}-x^{2/3})^{5/2}}{5/2}\Bigg|_0^a = \frac{12}{5}\pi a^2.$$

? 2 Механическое приложение

Пройденный путь

Путь, пройденный точкой за промежуток времени [t_0, T], равен соответствующему определенному интегралу от скорости движения точки

$$s = \int_{t_0}^{T} v(t)\,dt$$

Замечание:

Результат верен лишь в том случае, если скорость $v=f(t)$ не меняет знака, например, $f(t) \geq 0$. Если же скорость v меняет знак, то указанная выше формула дает приращение абсциссы движущейся точки за промежуток времени [t_0, T].

Работа

Работа, произведенная силой F при перемещении точки M из положения $s=a$ в положение $s=b$, равна соответствующему определенному интегралу от силы:

$$\boxed{A = \int_a^b F(s)\,ds}$$

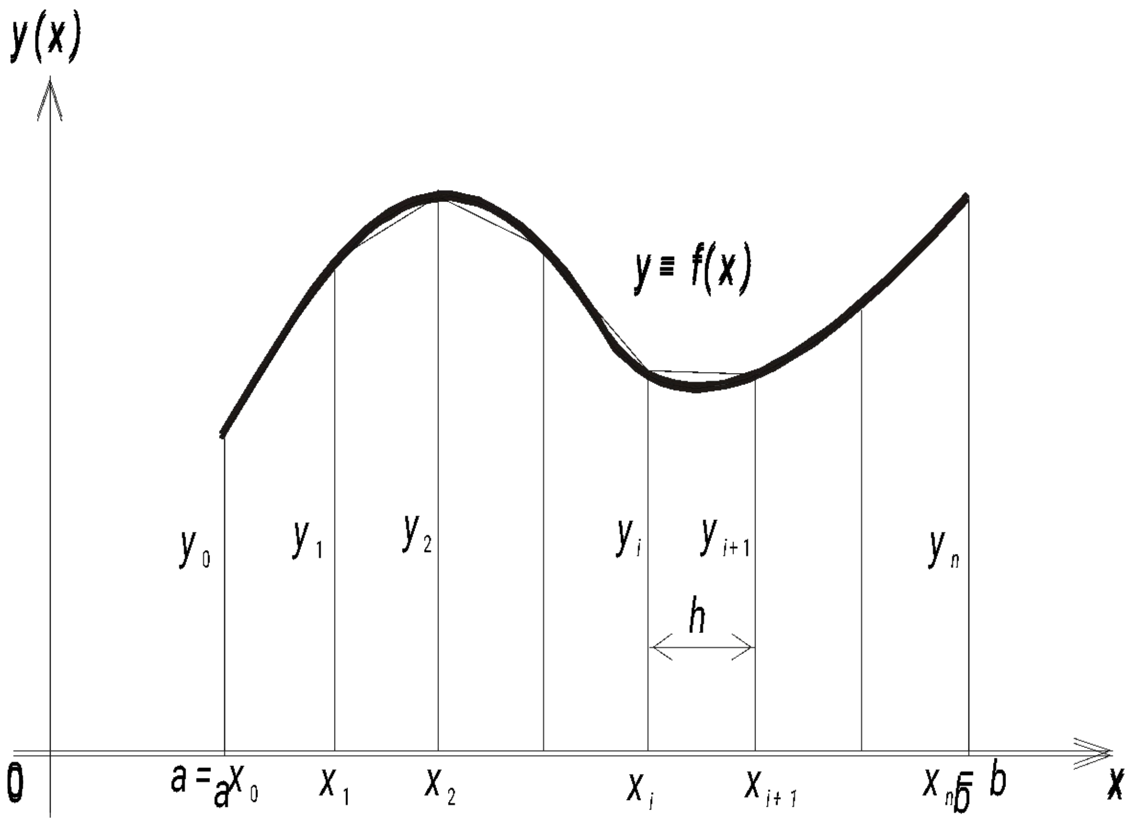
Масса стержня переменной плотности

Будем считать, что отрезок [*a* ,*b*] оси *x* имеет массу с переменной линейной плотностью $\rho(x) \geq 0$,
где $\rho(x)$ – непрерывная на [*a* ,*b*] функция.
Общая масса этого отрезка:

$$\boxed{M = \int_a^b \rho(x)dx}$$

? 3 Приближенное вычисление

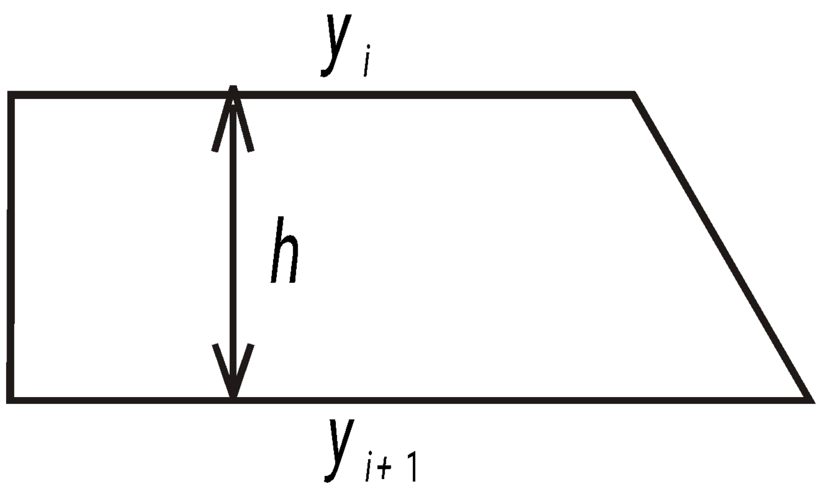
Понятие о приближенном вычислении определенных интегралов

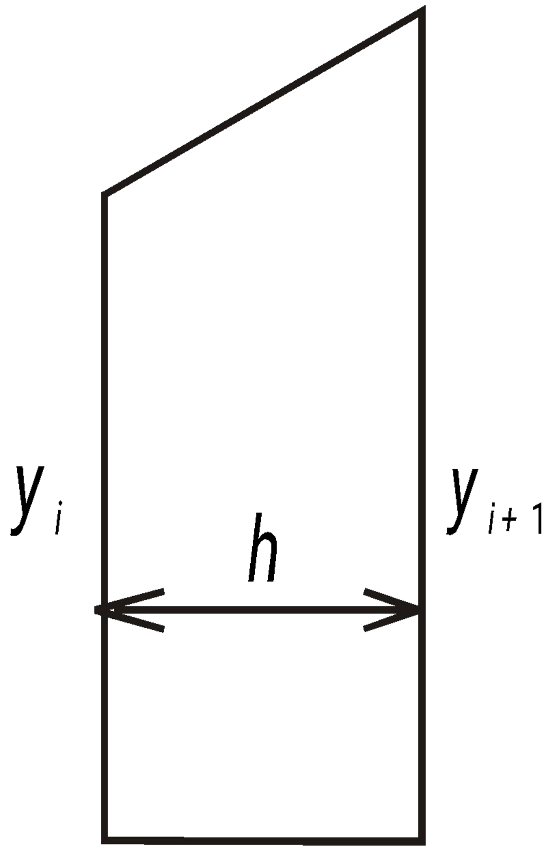


$$\int_a^b f(x)dx$$

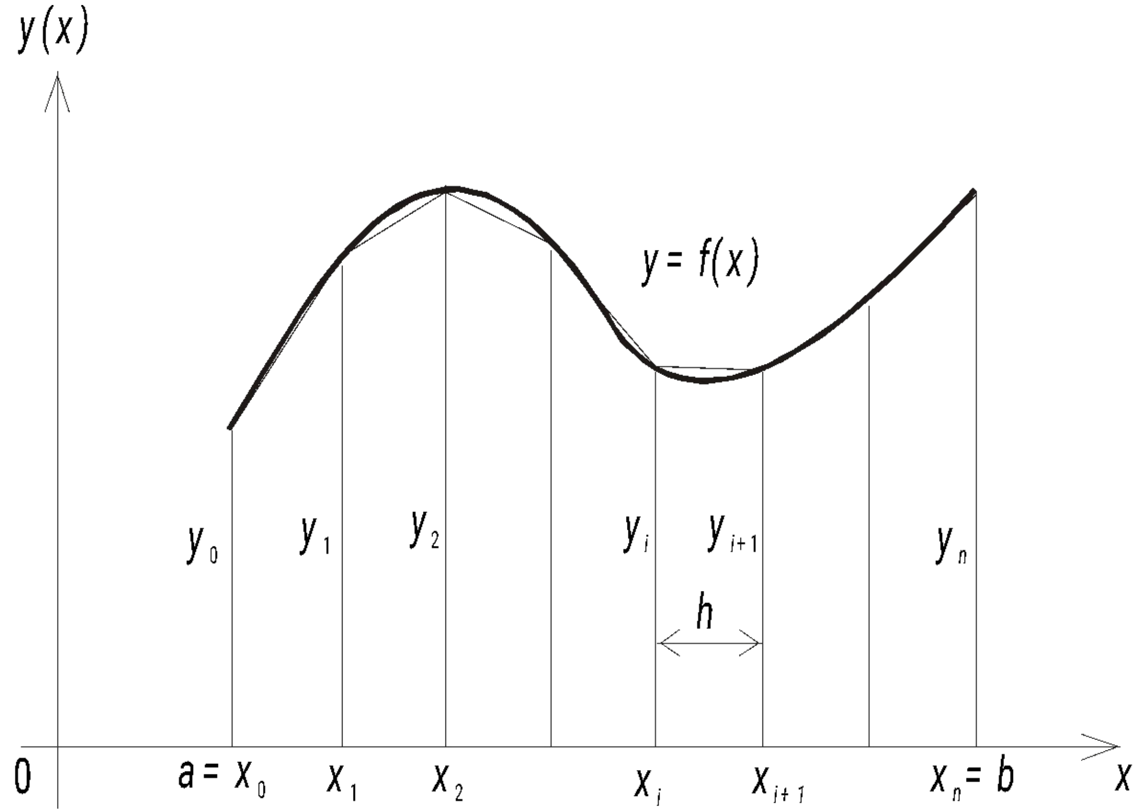
$$h = \frac{b-a}{n}$$

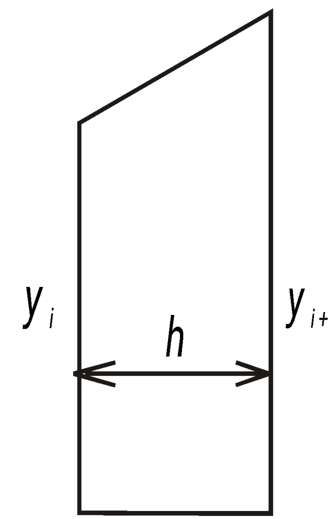
Понятие о приближенном вычислении определенных интегралов





$$S = \frac{h}{2}(y_i + y_{i+1})$$





$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + ... + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$$

h=0,1

i	x_i	y_i
0	0,0	1,0000
1	0,1	1,0050
2	0,2	1,0198
3	0,3	1,0440
4	0,4	1,0770
5	0,5	1,1180
6	0,6	1,1662
7	0,7	1,2207
8	0,8	1,2806
9	0,9	1,3454
10	1,0	1,4142

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \approx 0{,}1\cdot\left(\frac{1{,}0000}{2}+1{,}0050+1{,}0198+\ldots+1{,}3454+\frac{1{,}4142}{2}\right)=$$

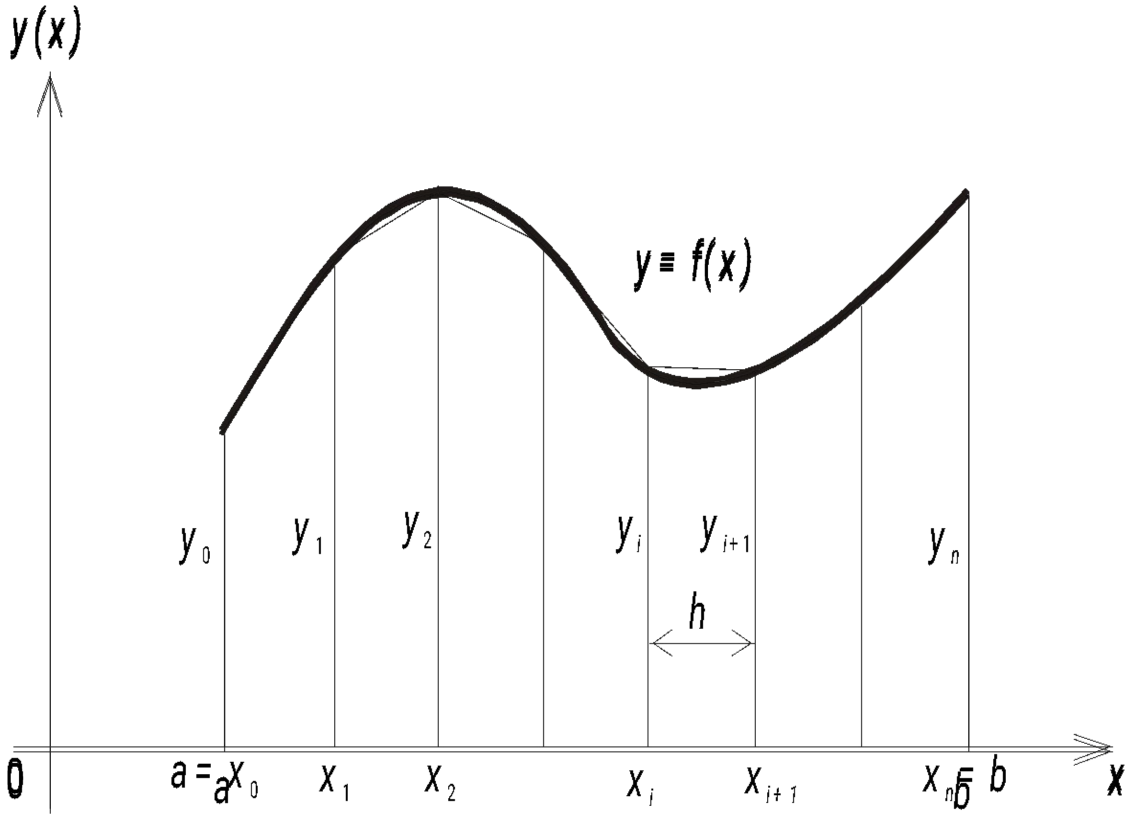
$$=0{,}1\cdot 11{,}4838=1{,}148$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \approx 0{,}1 \cdot \left(\frac{1{,}0000}{2} + 1{,}0050 + 1{,}0198 + \ldots + 1{,}3454 + \frac{1{,}4142}{2} \right) =$$

$$= 0{,}1 \cdot 11{,}4838 = 1{,}148$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) \approx 1{,}1479$$

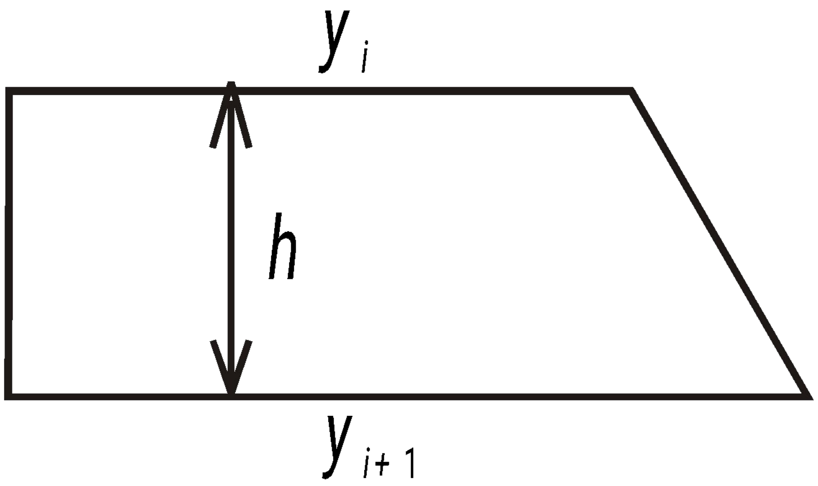
Понятие о приближенном вычислении определенных интегралов

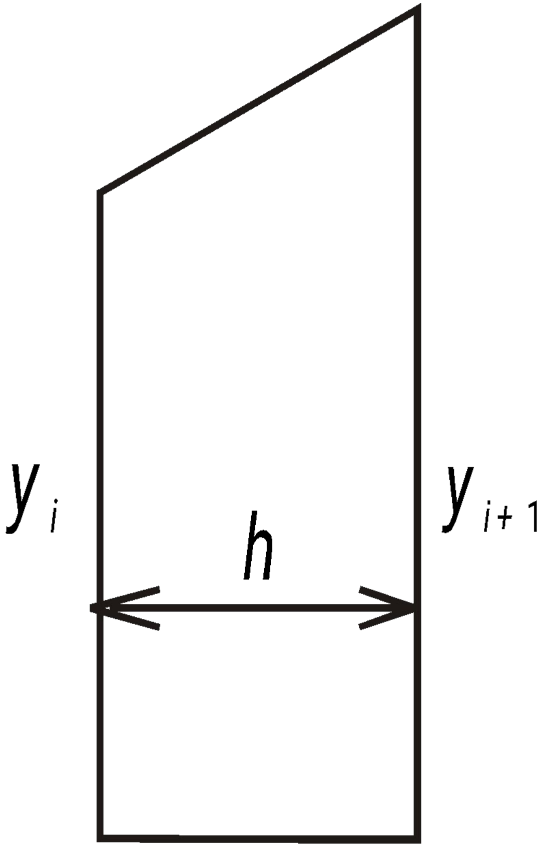


$$\int_a^b f(x)dx$$

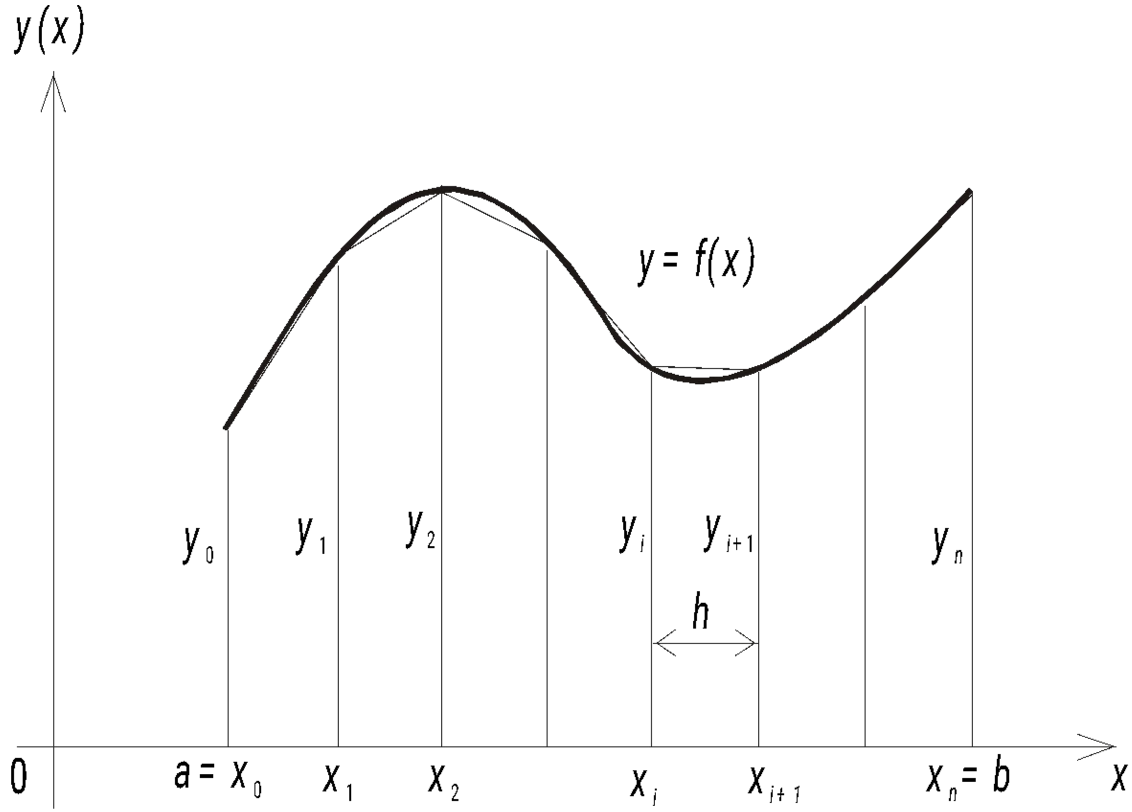
$$h = \frac{b-a}{n}$$

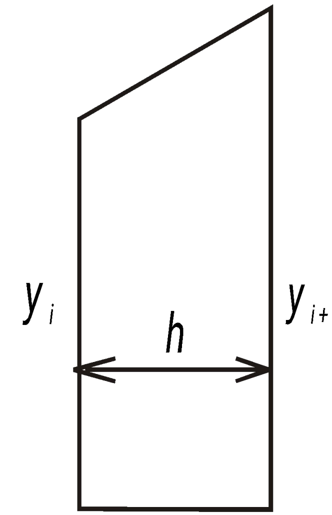
Понятие о приближенном вычислении определенных интегралов





$$S = \frac{h}{2}(y_i + y_{i+1})$$





$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \ldots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$$

h=0,1

i	x_i	y_i
0	0,0	1,0000
1	0,1	1,0050
2	0,2	1,0198
3	0,3	1,0440
4	0,4	1,0770
5	0,5	1,1180
6	0,6	1,1662
7	0,7	1,2207
8	0,8	1,2806
9	0,9	1,3454
10	1,0	1,4142

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \approx 0{,}1\cdot\left(\frac{1{,}0000}{2}+1{,}0050+1{,}0198+\ldots+1{,}3454+\frac{1{,}4142}{2}\right)=$$

$$=0{,}1\cdot 11{,}4838=1{,}148$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \approx 0{,}1 \cdot \left(\frac{1{,}0000}{2} + 1{,}0050 + 1{,}0198 + \ldots + 1{,}3454 + \frac{1{,}4142}{2} \right) =$$

$$= 0{,}1 \cdot 11{,}4838 = 1{,}148$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) \approx 1{,}1479$$

Спасибо за внимание!

Спасибо за внимание!