Дифференциальные уравнения

- Однородные дифференциальные уравнения
- Линейные дифференциальные уравнения
- Уравнения Бернулли

Однородные дифференциальные уравнения

Функция $y = f(x, y)$ называется ***однородной функцией*** n – ого порядка, если при умножении каждого ее аргумента на произвольный множитель k вся функция умножится на k^n:

$$f(k \cdot x; k \cdot y) = k^n \cdot f(x; y)$$

Например, функция $f(x; y) = x^2 - 2xy$

является однородной функцией второго порядка, так как:

$$f(k \cdot x; k \cdot y) = (kx)^2 - 2(kx)(ky) = k^2 \cdot (x^2 - 2xy) = k^2 \cdot f(x; y)$$

Дифференциальное уравнение

$$y' = f(x; y)$$

называется ***однородным***, если $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого порядка.

Однородные дифференциальные уравнения

Покажем, что однородное дифференциальное уравнение можно привести к виду:

$$\boxed{y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad (1)$$

Если *f(x, y)* есть однородная функция нулевого порядка, то:

$$f(kx; ky) = f(x; y)$$

Положив $k = \dfrac{1}{x}$ получим: $f(x; y) = f\left(\dfrac{x}{x}; \dfrac{y}{x}\right) = f\left(1; \dfrac{y}{x}\right) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$

Однородное дифференциальное уравнение вида *(1)* приводится к уравнению с разделяющимися переменными про помощи подстановки:

$$\frac{y}{x} = t \;\Rightarrow\; y = t \cdot x \;\Rightarrow\; y' = t' \cdot x + t \cdot x' = t' \cdot x + t$$

$$\boxed{\frac{y}{x} = t; \quad y' = t' \cdot x + t}$$

Однородные дифференциальные уравнения

Однородное уравнение часто задается в дифференциальной форме:

$$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0 \qquad (2)$$

Уравнение *(2)* будет однородным, если *P(x; y)* и *Q(x; y)* – однородные функции одинакового порядка.

При интегрировании уравнения вида *(2)* можно сначала привести его к виду *(1)* или сразу сделать подстановку:

$$y = xt; \qquad dy = x \cdot dt + t \cdot dx$$

Однородные дифференциальные уравнения

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Приведем уравнение к виду (1):

$$xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y \implies y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{x} \implies$$

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} + \frac{y}{x} \implies y' = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} + \frac{y}{x} \implies y' = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$$

Сделаем замену переменной: $\dfrac{y}{x} = t; \quad y' = t' \cdot x + t$

$$t'x + t = \sqrt{1 + t^2} + t \implies \frac{dt}{dx}x = \sqrt{1 + t^2} \implies \int \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\implies \ln\left|t + \sqrt{1 + t^2}\right| = \ln|x| + \ln C \implies \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = Cx \implies$$

$$\boxed{y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2}$$

Однородные дифференциальные уравнения

$$\left(x^2-y^2\right)\cdot dx+2xy\cdot dy=0$$

Уравнение является однородным, так как функции:

$P(x;y)=x^2-y^2;\quad Q(x;y)=2xy$ - однородные второго порядка

Пусть: $y=xt;\quad dy=x\cdot dt+t\cdot dx$

$$\left(x^2-(xt)^2\right)\cdot dx+2x(xt)\cdot(xdt+tdx)=0\ \Rightarrow$$

$$x^2dx-x^2t^2dx+2x^3tdt+2x^2t^2dx=0\ \Rightarrow$$

$$x^2(1+t^2)dx=-2x^3tdt\ \Rightarrow\int\frac{dx}{x}=\int-\frac{2tdt}{1+t^2}\ \Rightarrow$$

$$\ln|x|=-\int\frac{d\left(t^2+1\right)}{1+t^2}\ \Rightarrow\ \ln|x|=-\ln\left|t^2+1\right|+\ln C\ \Rightarrow x=\frac{C}{t^2+1}$$

$$\Rightarrow\ C=x\cdot\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)\ \Rightarrow\ \boxed{Cx^2=x^2+y^2}$$

Линейные дифференциальные уравнения

ДУ первого порядка называется ***линейным***, если его можно записать в виде:

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)} \qquad (3)$$

p(x) и *q(x)* – заданные функции в частности постоянные.

Рассмотрим 2 метода интегрирования линейного уравнения.

Метод Бернулли.

Решение уравнения ищется в виде произведения двух функций, то есть с помощью подстановки:

$$\boxed{y = u \cdot v}$$

Где *u(x)* и *v(x)* – неизвестные функции, причем одна из них произвольная функция, не равная нулю.

Действительно, любую функцию y можно записать как:

$$y = \frac{y}{v} \cdot v \quad \Rightarrow \quad y = u \cdot v \quad (v \neq 0)$$

Линейные дифференциальные уравнения

Подставим в уравнение (3): $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$u' \cdot v + \left[u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v\right] = q(x) \Rightarrow$$

$$u' \cdot v + u \cdot \left(v' + p(x) \cdot v\right) = q(x) \qquad (*)$$

Подберем функцию *v(x)* так, чтобы выражение, стоящее в скобках было равно нулю, то есть решим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$v' + p(x) \cdot v = 0$$

Подставим найденную функцию *v(x)* в уравнение $(*)$

$$u' \cdot v + u \cdot 0 = q(x) \Rightarrow u' \cdot v = q(x)$$

Получим еще одно уравнение с разделяющимися переменными, решив которое найдем функцию *u(x)*

Линейные дифференциальные уравнения

$$y' + 2xy = 4x$$

$\boxed{=0}$

Положим: $y = u\cdot v;\quad y' = u'\cdot v + u\cdot v'$

$$u'\cdot v + \left[u\cdot v' + 2x\cdot u\cdot v\right] = 4x \Longrightarrow u'\cdot v + u\cdot\boxed{\left(v' + 2x\cdot v\right)} = 4x \Longrightarrow$$

$$v' + 2x\cdot v = 0 \Longrightarrow \frac{dv}{dx} = -2x\cdot v \Longrightarrow \int\frac{dv}{v} = -\int 2x\,dx \Longrightarrow$$

$$\ln|v| = -x^2 \Longrightarrow \boxed{v = e^{-x^2}}$$

При нахождении функции v(x) произвольная постоянная **C** <u>не прибавляется</u>

$$u'\cdot v = 4x \Longrightarrow u'\cdot e^{-x^2} = 4x \Longrightarrow \frac{du}{dx} = 4x\cdot e^{x^2} \Longrightarrow$$

$$\int du = \int 4x\cdot e^{x^2}dx \Longrightarrow u = 2\int e^{x^2}d\left(x^2\right) \Longrightarrow \boxed{u = 2e^{x^2} + C}$$

При нахождении функции u(x) произвольная постоянная **C** <u>прибавляется</u>

Таким образом, общее решение уравнения:

$$y = u\cdot v = \left(2e^{x^2} + C\right)\cdot e^{-x^2} \Longrightarrow \boxed{y = 2 + C\cdot e^{-x^2}}$$

Линейные дифференциальные уравнения

Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (3)$$

Рассмотрим соответствующее уравнение без правой части, то есть уравнение вида:

$$y' + p(x)y = 0$$

Оно называется ***линейным однородным ДУ*** первого порядка.

Это уравнение является также уравнением с разделяющимися переменными.

Решением уравнения будет функция, зависящая от одной произвольной постоянной: $y_0 = f_0(x) + C$

Метод Лагранжа заключается в том, что постоянную C в полученном решении заменяем на функцию $C(x)$ и решение уравнения ищем в виде:

$$y(x) = f_0(x) + C(x)$$

Функция $C(x)$ находится подстановкой $y(x)$ в уравнение (3)

Линейные дифференциальные уравнения

$$y' + 2xy = 4x$$

Запишем и решим соответствующее однородное уравнение:

$$y' + 2xy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2xy \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int 2x\,dx \Rightarrow$$

$$\ln|y| = -x^2 + C \Rightarrow y = e^{-x^2 + C} \Rightarrow \boxed{y_0 = C \cdot e^{-x^2}}$$

$$y = C(x)\cdot e^{-x^2}$$

Решение однородного уравнения

Подставим полученную функцию в исходное уравнение:

$$y' = C'(x)\cdot e^{-x^2} + C(x)\cdot(-2xe^{-x^2})$$

$$\underbrace{C'(x)\cdot e^{-x^2} - \cancel{2xe^{-x^2}C(x)}}_{y'} + \underbrace{\cancel{2xe^{-x^2}C(x)}}_{y} = 4x \Rightarrow$$

$$C'(x)\cdot e^{-x^2} = 4x \Rightarrow C'(x) = 4x \cdot e^{x^2} \Rightarrow C(x) = \int 4x \cdot e^{x^2}\,dx$$

$$\Rightarrow C(x) = 2\int e^{x^2}\,dx^2 = 2e^{x^2} + C \Rightarrow \boxed{y = 2 + C \cdot e^{-x^2}}$$

Уравнение Бернулли

Уравнение вида

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)\cdot y^n} \quad (4)$$

Называется ***уравнением Бернулли***.

Уравнение Бернулли решается также, как и линейное уравнение методом Бернулли.

$$y' + \frac{y}{x} = -x\cdot y^2$$ *Положим:* $y = u\cdot v; \quad y' = u'\cdot v + u\cdot v'$

$$u'\cdot v + \left(u\cdot v' + \frac{u\cdot v}{x}\right) = -x\cdot(u\cdot v)^2 \Rightarrow$$

$$u'\cdot v + u\boxed{\left(v' + \frac{v}{x}\right)} = -x\cdot(u\cdot v)^2 \qquad v' + \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = -\ln|x| \Rightarrow \boxed{v = \frac{1}{x}}$$

Уравнение Бернулли

$$u'\cdot v=-x\cdot(u\cdot v)^2 \quad\Longrightarrow\quad u'\cdot\frac{1}{x}=-x\cdot\left(u\cdot\frac{1}{x}\right)^2 \quad\Longrightarrow$$

$$\frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x}=-x\cdot u^2\cdot\frac{1}{x^2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{du}{dx}=-u^2 \quad\Longrightarrow\int\frac{du}{u^2}=-\int dx \quad\Longrightarrow$$

$$-\frac{1}{u}=-x+C \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{u}=x+C \quad\Longrightarrow\quad \boxed{u=\frac{1}{x+C}}$$

$$y=\frac{1}{x+C}\cdot\frac{1}{x} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{y=\frac{1}{x^2+Cx}}$$