Дифференциальные уравнения 1 порядка

1. ДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными.
2. Однородные ДУ 1-го порядка .
3. Линейные ДУ 1-го порядка .

ДУ первого порядка

называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида:

$$\boxed{F(x, y, y') = 0}$$

ДУ 1-го порядка, разрешенное относительно производной:

$$\boxed{y' = f(x, y)}$$

Дифференциальная форма ДУ 1-го порядка

$$y' = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad dy = f(x, y)dx; \quad f(x, y)dx - dy = 0;$$

$$f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad Q(x, y) \neq 0;$$

$$\boxed{P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0}$$

1. ДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными

ДУ 1-го порядка называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если оно может быть приведено к виду:

$$\boxed{X(x)Y(y)dx + X_1(x)Y_1(y)dy = 0}$$

$$\boxed{X(x)Y(y)dx + X_1(x)Y_1(y)dy = 0}$$

$$\overline{}$$

$$X_1(x)Y(y)$$

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \frac{Y_1(y)}{Y(y)}dy = 0$$

общее решение:

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \int \frac{Y_1(y)}{Y(y)}dy = C$$

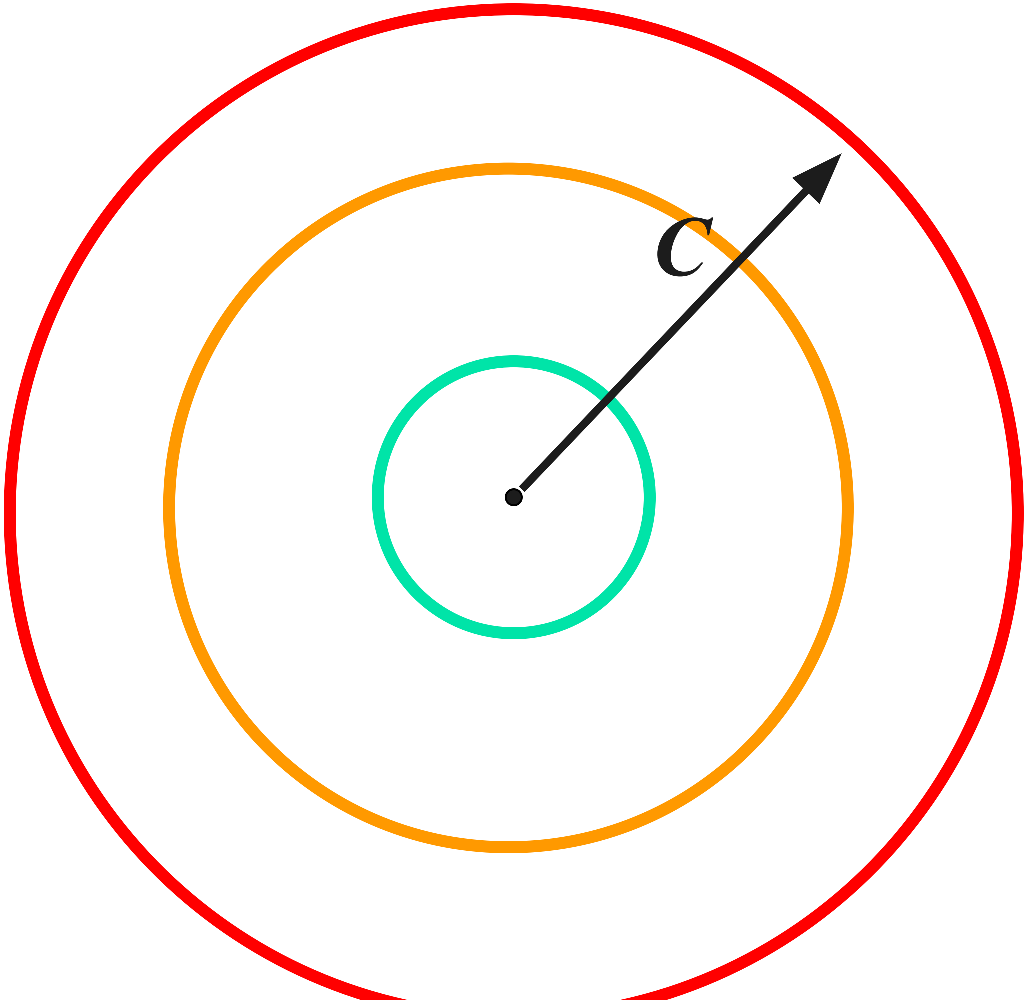
ПРИМЕР:

$$y' = -\frac{x}{y} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$ydy + xdx = 0 \qquad \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C_1$$

$$x^2 + y^2 = 2 \cdot C_1 \xrightarrow{C^2 = 2C_1} x^2 + y^2 = C^2$$

$$x^2 + y^2 = C^2$$



Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными

ДУ вида

$$y' = f(ax + by + c), \quad b \neq 0$$

приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными с помощью подстановки:

$$u = ax + by + c,$$

где u – новая неизвестная функция.

2. Однородные ДУ 1-го порядка

Многочлен

$$\boxed{P(x,y)=\sum_{i,j} a_{i,j}x^i y^j}$$

называется *однородным* измерения n, если все члены его имеют одно и то же измерение n,
т.е. для каждого члена этого многочлена сумма показателей

$$\boxed{i+j=n}$$

ПРИМЕР:

$$P(x, y) = 2x^2 - 3xy - 5y^2$$

однородный многочлен 2-го измерения

Замечание:

Если аргументы x и y однородного многочлена измерения n заменить на пропорциональные величины kx и ky, то в результате этот многочлен умножится на n-ю степень коэффициента пропорциональности k.

$$P(kx, ky) = 2(kx)^2 - 3(kx)(ky) - 5(ky)^2 =$$

$$= k^2(2x^2 - 3xy - 5y^2) = k^2 P(x, y)$$

Функция $f(x, y)$ называется *однородной* n–го измерения относительно своих аргументов x и y, если для любого значения параметра k (кроме нуля) выполняется тождество:

$$\boxed{f(kx, ky) = k^n f(x, y).}$$

ПРИМЕР:

Является ли однородной функция

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2 y ?$$

ПРИМЕР:

Является ли однородной функция

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2 y?$$

$$f(kx, ky) = (kx)^3 + 3(kx)^2 ky =$$

$$= k^3 x^3 + 3k^3 x^2 y =$$

$$= k^3 (x^3 + 3x^2 y) = k^3 f(x, y)$$

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

ДУ 1-го порядка называется *однородным*, если функции *P(x, y)* и *Q(x, y)* – однородные функции одинакового измерения.

однородное ДУ приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки:

$$u = \frac{y}{x}$$

$$(x+y)dx + xdy = 0$$

$$\boxed{y' = f(x, y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad dy = f(x, y)dx$$

При dy стоит коэффициент, равный 1,
т.е. однородная функция 0-го измерения;
следовательно, $f(x, y)$ также должна быть однородной функцией 0-го измерения.

$$\boxed{y' = f(x, y)}$$

ДУ 1-го порядка является однородным тогда и только тогда, когда правая часть его $f(x, y)$ есть однородная функция 0-го измерения

Замечание:

Функция $f(x, y)$ есть однородная функция 0-го измерения, если она не меняется при замене x на kx и y на ky, где k – произвольный коэффициент пропорциональности.

$$f(kx, ky) = k^n f(x, y) =$$

$$= k^0 f(x, y) = f(x, y)$$

$$\boxed{y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x} + 1\right)}$$

Уравнения, приводящиеся к однородным

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$

$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0,$ то переменные могут быть разделены подстановкой $x = u + \alpha;$ $y = v + \beta;$

где α и β - решения системы уравнений $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$

Уравнения, приводящиеся к однородным

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0,$$

то переменные могут быть разделены подстановкой $ax+by=t.$

3. Линейные ДУ 1-го порядка

ДУ называется *линейным*

относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$\boxed{y' + P(x)y = Q(x),}$$

$P(x)$ и $Q(x)$- функции непрерывные на некотором промежутке $a < x < b$.

$$y' + P(x)\,y = Q(x)$$

$\boxed{Q(x) = 0}$ ⟸ Однородное ЛДУ

$\boxed{Q(x) \neq 0}$ ⟸ Неоднородное ЛДУ

Линейные однородные ДУ

$$\boxed{y' + P(x)\,y = 0}$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|;$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)dx;$$

$$\boxed{y = Ce^{-\int P(x)dx}}$$

Общее решение

Линейные неоднородные ДУ

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad Q(x) \neq 0$$

1) Метод Бернулли.

Бернулли Якоб (1654-1705) – швейцарский математик

2) Метод Лагранжа.

Ларганж Жозеф Луи (1736-1813) - французский математик

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Метод Бернулли

Искомая функция представляется в виде произведения двух функций

$$\boxed{y = uv}$$

$$y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\boxed{u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)}$$

$$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)}$$

Метод Бернулли

Искомая функция представляется в виде произведения двух функций

$$\boxed{y = uv}$$

$$y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\boxed{u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)}$$

$$\boxed{u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)}$$

Метод Бернулли

$$u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}+P(x)u\right)=Q(x)$$

Важное замечание

т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению.

Пример: $\boxed{y=2x^2}$

$$y=1\cdot 2x^2; \qquad y=2x\cdot x; \qquad y=2\cdot x^2;$$

Метод Бернулли

$$\boxed{u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}+P(x)u\right)=Q(x)}$$

Таким образом, можно одну из составляющих произведения функций выбрать так, что выражение :

$$\frac{du}{dx}+P(x)u=0$$

Метод Бернулли

$$\frac{du}{dx} + P(x)u = 0$$

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx;$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int P(x)dx;$$

$$\ln|u| + \ln|C_1| = -\int P(x)dx;$$

$$u = Ce^{-\int P(x)dx}; \quad C = 1/C_1$$

Метод Бернулли

$$\boxed{u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}+P(x)u\right)=Q(x)}$$

$$\frac{du}{dx}+P(x)u=0$$

$$u=Ce^{-\int P(x)dx}$$

$$\boxed{Ce^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx}=Q(x);}$$

Метод Бернулли

$$\boxed{Ce^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx}=Q(x);}$$

$$Cdv=Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

;

$$Cv=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_1$$

$$v=\frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_2$$

Метод Бернулли

$$\boxed{y = uv}$$

$$u = Ce^{-\int P(x)dx} \qquad v = \frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2$$

;

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \cdot \frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right)$$

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right)}$$

Метод Бернулли

;

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C_2 \right)}$$

Решение неоднородного ЛДУ в общем виде по способу Бернулли

Метод Лагранжа (вариации произвольной постоянной)

$$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)}$$

1) Отбросим правую часть:

$$y' + P(x)y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y = C_1 e^{-\int P(x)dx}$$

Метод Лагранжа

$$y = C_1 e^{-\int P(x)dx}$$

2) Будем считать постоянную C_1 некоторой функцией от x.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} + C_1(x) e^{-\int P(x)dx} \cdot (-P(x));$$

Метод Лагранжа

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} + C_1(x) e^{-\int P(x)dx} \cdot (-P(x));$$

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

$$\boxed{\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} - C_1(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C_1(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)}$$

$$\boxed{\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} = Q(x);}$$

Метод Лагранжа

$$\frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} = Q(x);$$

$$dC_1(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

$$C_1 = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C;$$

Метод Лагранжа

$$C_1 = \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C;$$

$$y = C_1 e^{-\int P(x)dx}$$

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right)}$$

Метод Лагранжа

;

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C_2 \right)}$$

Решение неоднородного ЛДУ в общем виде по способу Лагранжа

4. Уравнения Бернулли

Уравнение Бернулли

$$\boxed{y' + Py = Q \cdot y^n,}$$

где P и Q – функции от x или постоянные числа,
а n – постоянное число, не равное 1.

Уравнение Бернулли

$$\boxed{y' + Py = Q \cdot y^n,}$$

применяют подстановку ,

$$z = \frac{1}{y^{n-1}}$$

помощью которой, уравнение Бернулли приводится к линейному

Уравнение Бернулли

$$\frac{y' + Py = Q \cdot y^n,}{y^n} \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y^n} + P\frac{1}{y^{n-1}} = Q;$$

$$z = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n} \quad \Rightarrow \quad z' = (1-n)y^{-n}y' = -(n-1)\frac{1}{y^n}y'$$

$$\Downarrow$$

$$-(n-1)z' = \frac{y'}{y^n}$$

$$\boxed{-\frac{z'}{n-1} + Pz = Q}$$

Уравнение Бернулли

$$-\frac{z'}{n-1}+Pz=Q \Rightarrow \boxed{z'-(n-1)Pz=-(n-1)Q}$$

линейное уравнение относительно неизвестной функции *z*

$$z=e^{-\int Pdx}\left(\int Q_1 e^{\int P_1 dx}dx+C\right)$$

$$Q_1=-(n-1)Q; \qquad P_1=-(n-1)P.$$

Спасибо за внимание!