Двойной интеграл

- Замена переменных в двойном интеграле
- Двойной интеграл в полярных координатах

Замена переменных в двойном интеграле

Пусть в замкнутой области D плоскости XOY задана непрерывная функция $z = f(x, y)$.

Заменим переменные x и y : $x = \varphi(u,v)$ $y = \psi(u,v)$

Если функции x и y имеют в некоторой области D^* плоскости $0uv$ непрерывные частные производные и не равный нулю определитель:

$$I(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{du} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

определитель Якоби (якобиан)

а функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, то справедлива формула замены переменной в двойном интеграле:

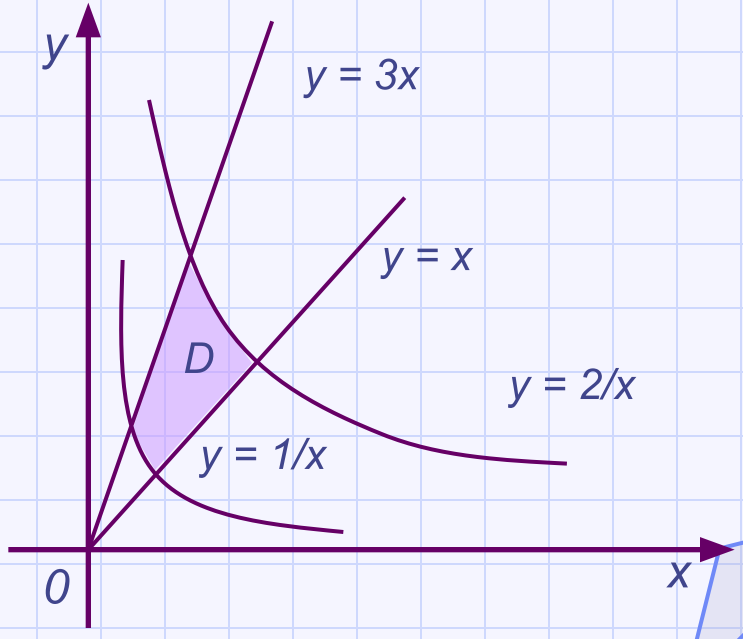
$$\boxed{\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\phi(u,v);\psi(u,v))\cdot\left|I(u,v)\right|dudv}$$

Замена переменных в двойном интеграле

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D dxdy$

если область D *ограничена линиями:*

$xy = 1$; $xy = 2$; $y = x$; $y = 3x$.



Сделаем замену переменных:

$$u = xy, \quad v = \frac{y}{x}.$$

Замена переменных в двойном интеграле

Найдем уравнения линий, ограничивающих область D^*

$$\left.\begin{aligned} u &= xy \\ xy &= 1 \\ xy &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{u = 1; \quad u = 2.}$$

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{y}{x} \\ y &= x \\ y &= 3x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} v &= \frac{y}{x} \\ \frac{y}{x} &= 1 \\ \frac{y}{x} &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{v = 1; \quad v = 3.}$$

Замена переменных в двойном интеграле

Выразим переменные x и y через u и v.

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} uv = y^2 \\ \dfrac{u}{v} = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = (uv)^{\frac{1}{2}} \\ x = \left(\dfrac{u}{v}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Найдем частные производные от получившихся функций:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \left(\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{2}}\right)'_u = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{u}{v}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{v} = \frac{1}{2\sqrt{uv}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \left(\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{2}}\right)'_v = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{u}{v}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{-u}{v^2} = -\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}}$$

Замена переменных в двойном интеграле

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\left(\left(uv\right)^{\frac{1}{2}}\right)_u^{'}=\frac{1}{2}\cdot\left(uv\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot v=\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\left(\left(uv\right)^{\frac{1}{2}}\right)_v^{'}=\frac{1}{2}\cdot\left(uv\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot u=\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}$$

Найдем $\boxed{\text{якобиан преобразования:}}$

$$I(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}}\\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{uv}}\cdot\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}+\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}}\cdot\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}}$$

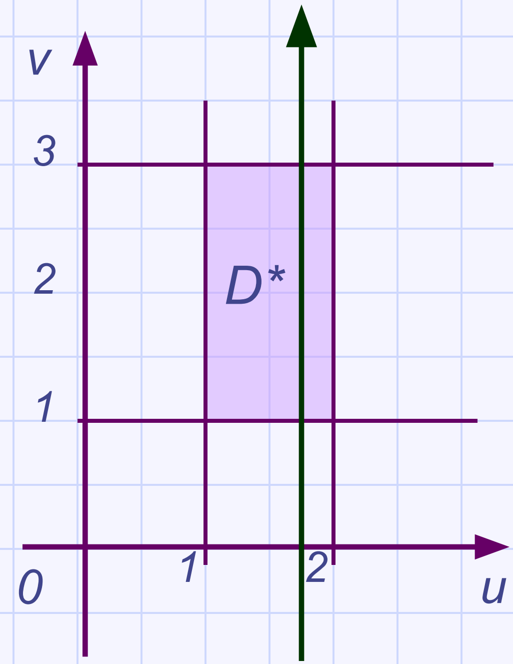
$$=\frac{1}{4v}+\frac{1}{4v}=\frac{1}{2v}$$

Замена переменных в двойном интеграле

Построим область D.*

Расставим пределы интегрирования, пользуясь формулой (1):

$$\iint\limits_{D} dxdy = \iint\limits_{D^*} |I| \cdot dudv = \int_1^2 du \int_1^3 \frac{1}{2v}\, dv$$



Вычислим двукратный интеграл:

$$\int_1^2 du \int_1^3 \frac{1}{2v}\, dv = \frac{1}{2}\int_1^2 du \cdot \ln v\Big|_1^3 = \frac{1}{2}\int_1^2 (\ln 3 - \ln 1)\, du =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3 \cdot u\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\ln 3$$

Двойной интеграл в полярных координатах

Рассмотрим частный случай замены переменных: замену декартовых координат x и y полярными координатами r и φ.

В качестве u и v возьмем полярные координаты r и φ. Они связаны с декартовыми координатами формулами:

$$x = r \cdot \cos\varphi; \quad y = r \cdot \sin\varphi$$

Правые части в этих равенствах – непрерывно дифференцируемые функции.

Якобиан преобразования равен:

$$I(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (r\cos\varphi)_r' & (r\cos\varphi)_\varphi' \\ (r\sin\varphi)_r' & (r\sin\varphi)_\varphi' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

Двойной интеграл в полярных координатах

Формула замены переменных принимает вид:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi$$

Пусть область D^* задана линиями в полярной системе координат:

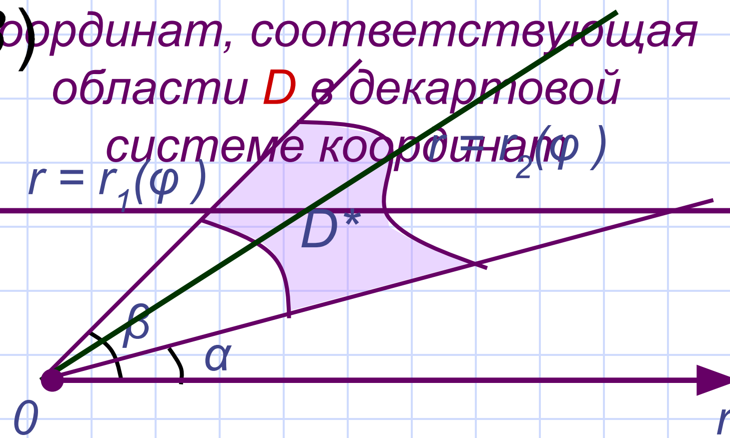
Область в полярной системе координат, соответствующая области D в декартовой системе координат

Лучами $\varphi = \alpha; \quad \varphi = \beta \quad (\alpha < \beta)$

Кривыми

$$r = r_1(\varphi); \quad r = r_2(\varphi);$$

$$(\, r_1(\varphi) \le r_2(\varphi)\,)$$

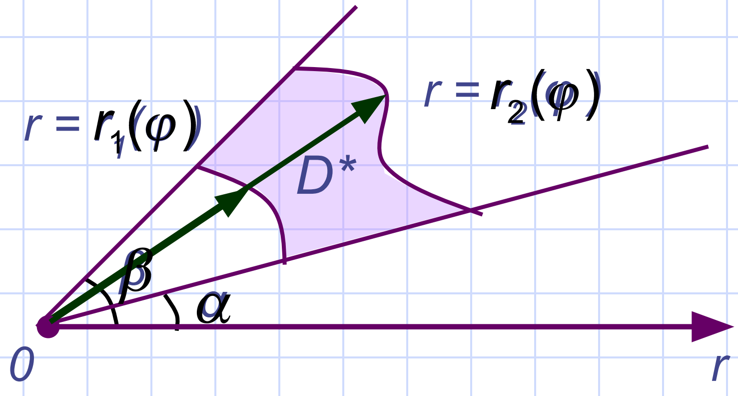


Такая область называется ***правильной областью*** в полярной системе координат:

луч, выходящий из полюса, пересекает границу области не более, чем в двух точках.

Двойной интеграл в полярных координатах

Расставим пределы интегрирования:



$$\iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\cdot r\, dr\, d\varphi = \int d\varphi \int f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\cdot r\, dr$$

Внутренний интеграл здесь берется при постоянном φ.

Двойной интеграл в полярных координатах

Замечания

1 Переход к полярным координатам целесообразен, когда подынтегральная функция имеет вид $f(x^2+y^2)$; область D есть круг, кольцо или части таковых.

2 На практике переход к полярным координатам осуществляется путем замены

$$x = r \cdot \cos\varphi \qquad y = r \cdot \sin\varphi \qquad dxdy = r\,dr\,d\varphi$$

Уравнения линий, ограничивающих область D, также преобразуются к полярным координатам.

3 Преобразование области D в область D^* не выполняют, а совмещают декартовы и полярную системы координат, находят нужные пределы интегрирования по r и φ.

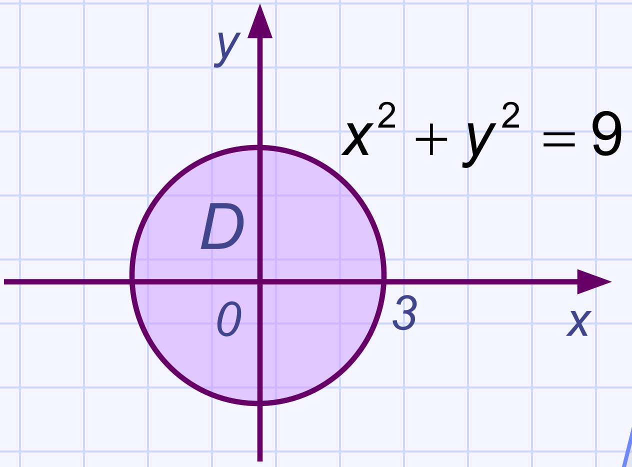
Двойной интеграл в полярных координатах

Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{9 - x^2 - y^2}\,dxdy \quad D: \quad x^2 + y^2 \le 9$

Перейдем к полярным координатам:

$$\iint\limits_D \sqrt{9 - (r\cos\varphi)^2 - (r\sin\varphi)^2} \cdot r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \iint\limits_D \sqrt{9 - r^2} \cdot r\,dr\,d\varphi$$

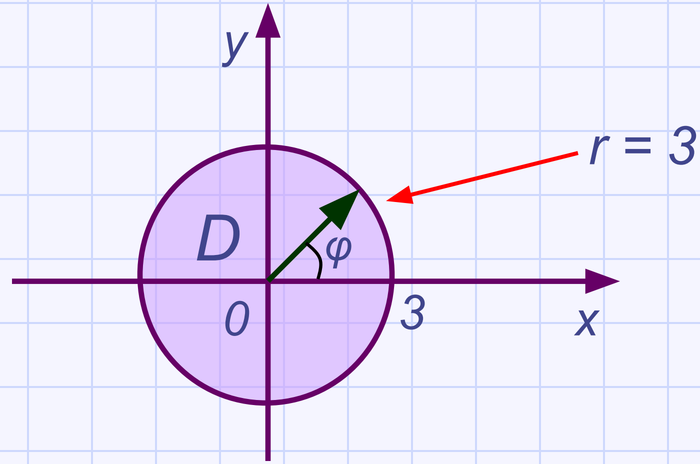


Изобразим область **D** *в декартовой системе координат.*

Двойной интеграл в полярных координатах

В полярной системе координат эта область будет определяться неравенствами:

$$0 \le \varphi \le 2\pi; \qquad 0 \le r \le 3$$



$$\iint\limits_D \sqrt{9-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi = \int d\varphi \int \sqrt{9-r^2}\cdot r\,dr =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \sqrt{9-r^2}\,d(9-r^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left.\frac{2\cdot(9-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^3 = -\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi(0-27) = 9\varphi\Big|_0^{2\pi} = 18\pi.$$