Тройной интеграл

- Виды поверхностей второго порядка
- Замена переменных в тройном интеграле
- Тройной интеграл в цилиндрических координатах

Виды поверхностей второго порядка

1 Цилиндрические поверхности

$$F(x;y)=0$$

Всякое уравнение, не содержащее переменной *z* и представляющее на плоскости *XOY* некоторую линию *L* представляет в пространстве цилиндрическую поверхность, у которой образующая параллельна оси *OZ*, а направляющей служит линия *L.*

Правило

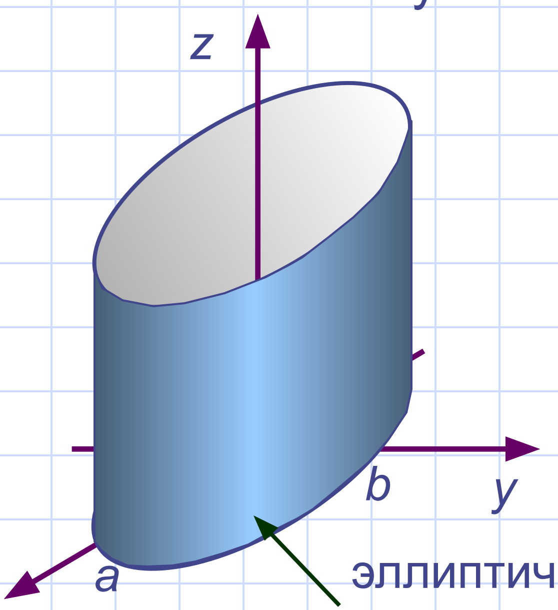
Для построения этой поверхности рисуем линию на плоскости *XOY* с таким же уравнением, затем переносим ее параллельно оси *OZ*.

Виды поверхностей второго порядка

Пример 1 Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

представляет на плоскости XOY эллипс с полуосями a и b.

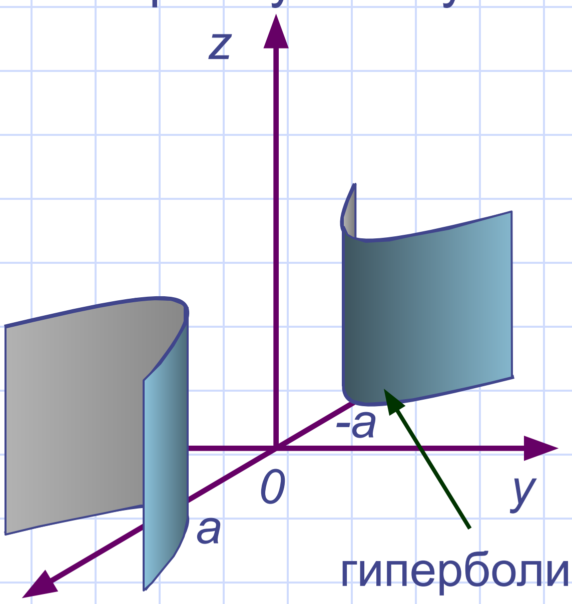


эллиптический цилиндр

Пример 2 Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

представляет на плоскости XOY гиперболу с полуосями a и b.



гиперболический цилиндр

Виды поверхностей второго порядка

$$F(x;z)=0; \quad F(y;z)=0$$

Эти уравнения представляют собой цилиндрические поверхности у которых образующие параллельны осям *OY* и *OX*.

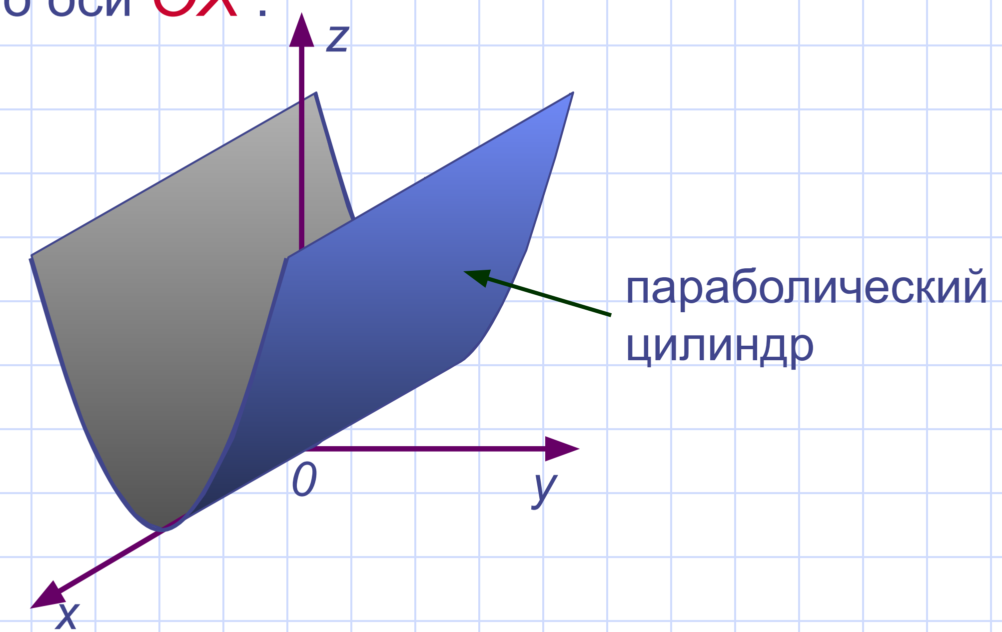
Для построения первой поверхности рисуем линию на плоскости *XOZ*, затем переносим ее параллельно оси *OY* , для построения второй поверхности рисуем линию на плоскости *YOZ*, затем переносим ее параллельно оси *OX* .

Пример 3

Уравнение

$$y^2 = 2pz$$

представляет на плоскости *YOZ* параболу.



Виды поверхностей второго порядка

2 Поверхности вращения

$$F(x^2+y^2;z)=0$$

Уравнение поверхности содержит переменные *x* и *y* в виде x^2+y^2

Правило

Для построения этой поверхности задаем *x = 0*, рисуем линию на плоскости *YOZ* с уравнением $F(y^2;z)=0$, затем вращаем ее вокруг оси *OZ*.

Аналогично изображаются поверхности:

$$F(x^2+z^2;y)=0$$

(задаем *x = 0*, рисуем линию на плоскости *YOZ* , затем вращаем ее вокруг оси *OY*)

$$F(y^2+z^2;x)=0$$

(задаем *y = 0*, рисуем линию на плоскости *XOZ* , затем вращаем ее вокруг оси *OX*)

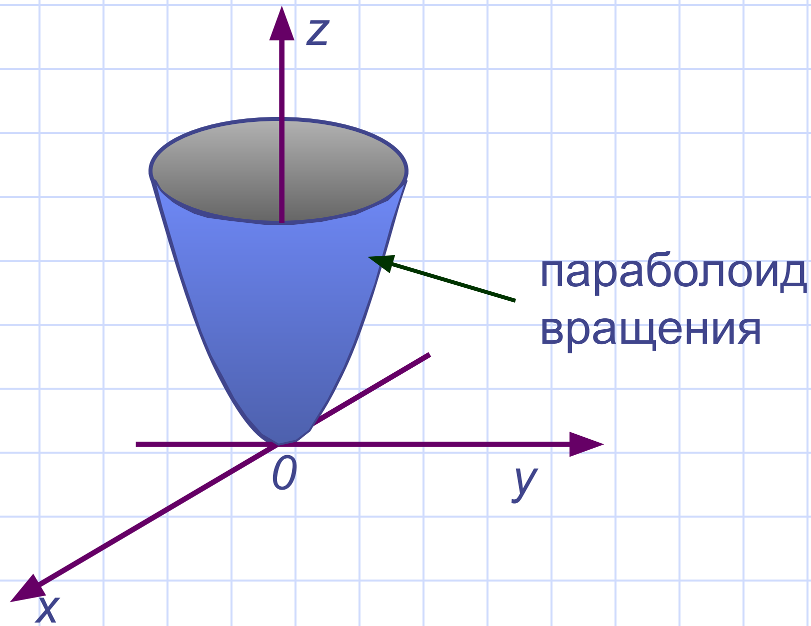
Виды поверхностей второго порядка

Пример 4

$$z = x^2 + y^2$$

Зададим $x = 0$, и получим уравнение линии на плоскости YOZ:

$$z = y^2$$

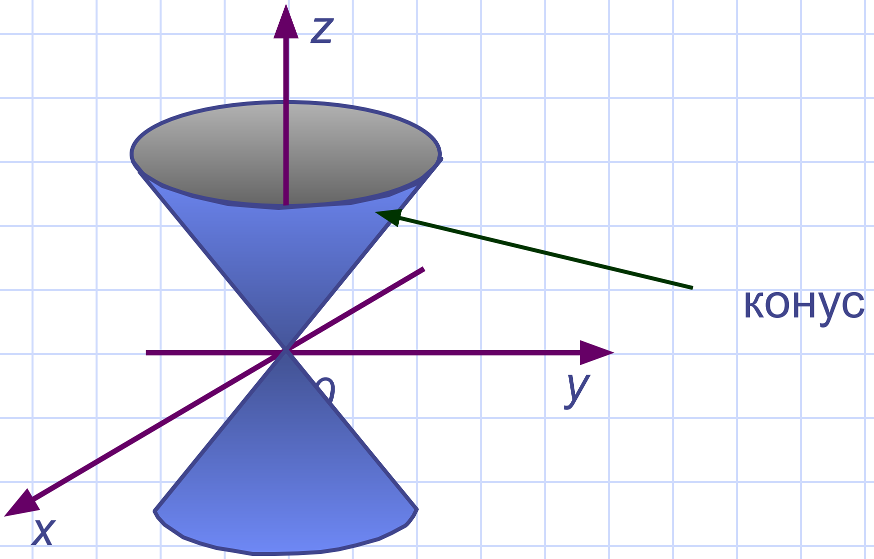


Виды поверхностей второго порядка

Пример 5 $z^2 = x^2 + y^2$

Зададим $x = 0$, и получим уравнение линии на плоскости YOZ:

$z^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad z = \pm y$ - уравнения двух прямых

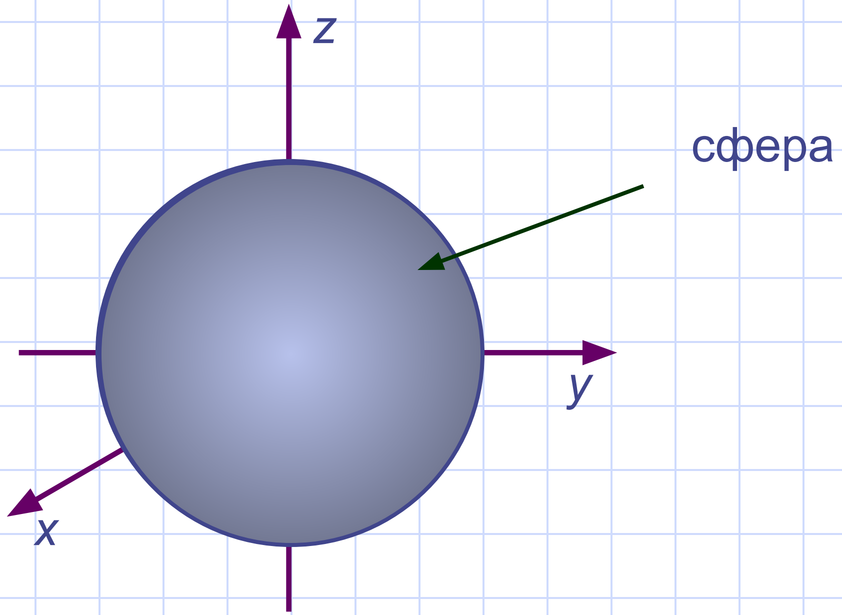


Виды поверхностей второго порядка

Пример 6 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Зададим $x = 0$, и получим уравнение линии на плоскости YOZ:

$y^2 + z^2 = R^2$ - уравнение окружности



В общем случае уравнение сферы с центром в точке $(a; b; c)$ и радиусом R: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

Замена переменных в тройном интеграле

Пусть в замкнутой области V пространства задана непрерывная функция $F = f(x, y, z)$.

Заменим переменные :

$$x = \varphi(u,v,w) \qquad y = \psi(u,v,w) \qquad z = \chi(u,v,w)$$

Пусть функции x, y и z имеют в некоторой области V^* плоскости $0uvw$ непрерывные частные производные и не равный нулю определитель:

$$I(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

определитель Якоби (якобиан)

Замена переменных в тройном интеграле

Тогда справедлива формула замены переменной в тройном интеграле:

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\iiint\limits_{V^*} f(\phi(u,v,w);\psi(u,v,w);\ \chi(u,v,w))\cdot\left|I(u,v,w)\right|dudvdw$$

Для вычисления тройного интеграла наиболее часто используют так называемые ***цилиндрические и сферические*** координаты.

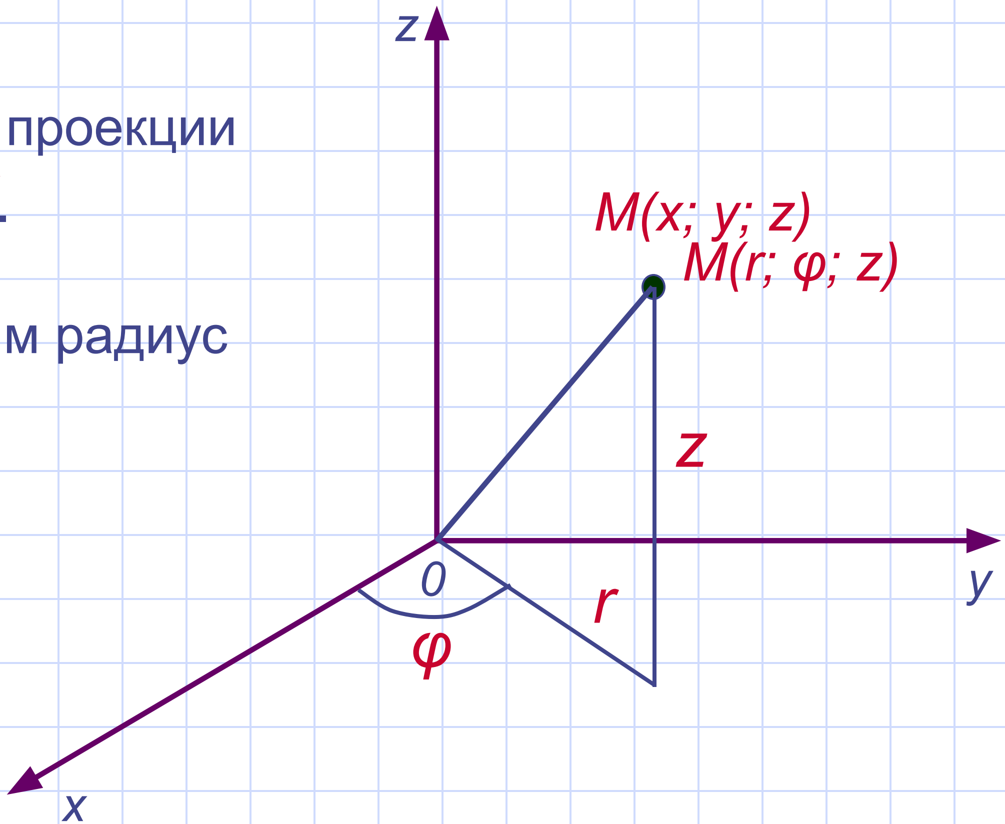
Цилиндрические координаты

Положение точки $M(x; y; z)$ в пространстве можно определить заданием трех чисел $r; \varphi; z$.

r – длина радиус – вектора проекции точки M на плоскость $X0Y$.

φ – угол, образованный этим радиус – вектором с осью $0X$.

z – аппликата точки M.



Эти три числа ($r; \varphi; z$) называются ***цилиндрическими координатами*** точки M.

Цилиндрические координаты

Цилиндрические координаты точки связаны с ее декартовыми координатами следующими соотношениями:

$$\boxed{x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi; \quad z = z.}$$

$$(r \geq 0; \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi; \quad z \in R)$$

Возьмем в качестве *u, v, w* цилиндрические координаты *r, φ, z* и вычислим Якобиан преобразования:

$$I(r,\varphi,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

Цилиндрические координаты

Формула замены переменных примет вид:

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V f(r\cos\varphi; r\sin\varphi; z)\cdot r\; dr\, d\varphi\, dz}$$

$$\iiint\limits_V f(r;\varphi;z)\cdot r\; dr\, d\varphi\, dz = \iint\limits_D dr\, d\varphi \left[\int\limits_{z_1(r;\varphi)}^{z_2(r;\varphi)} f(r;\varphi;z)\cdot r\; dz \right]$$

Внутренний интеграл берется по переменной z, пределы расставляются также, как в декартовых координатах (уравнения поверхностей должны быть приведены к цилиндрическим координатам) .

Оставшийся двойной интеграл – это интеграл в полярных координатах по области D.

Цилиндрические координаты

Замечание

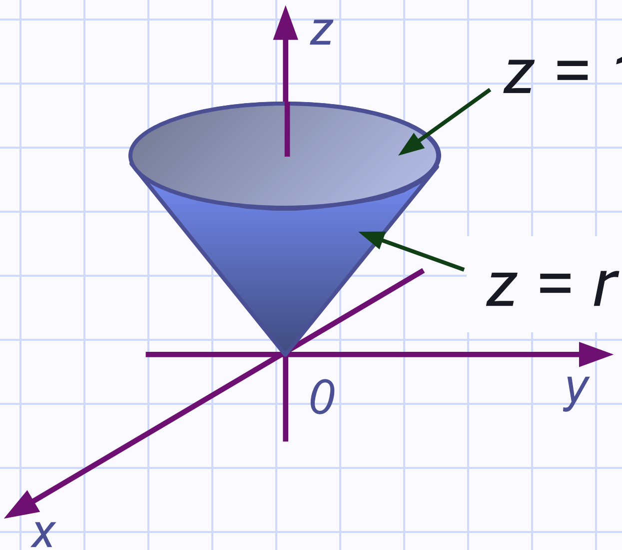
К цилиндрическим координатам удобно переходить в том случае, если область D (проекция области V на XOY) – круг или часть круга или если область V образована цилиндрической поверхностью.

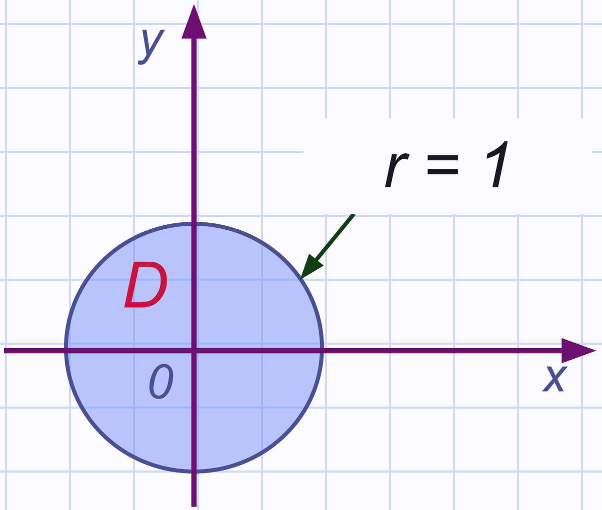
Вычислить $$\iiint\limits_V z\,dxdydz$$

V – *область, ограниченная верхней частью конуса*

$z^2 = x^2 + y^2$ *и плоскостью* $z = 1$.

Цилиндрические координаты





Приведем уравнение конуса к цилиндрическим координатам:

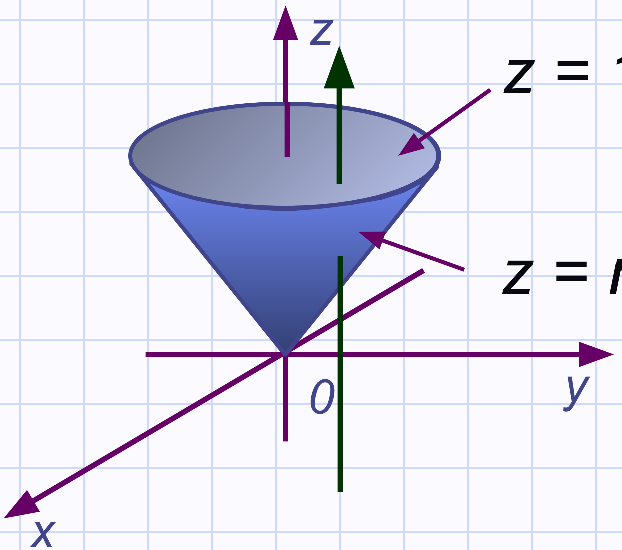
$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z = \sqrt{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2} \Rightarrow z = r$$

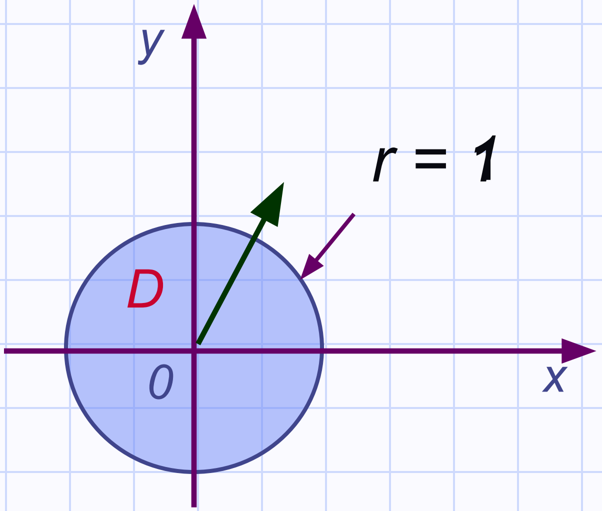
Найдем уравнение линии, ограничивающей область *D*:

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

В полярных координатах: $r = 1$

Цилиндрические координаты





Расставим пределы интегрирования:

$$\iiint\limits_V z\cdot r\ dr\,d\varphi\,dz=\iint\limits_D dr\,d\varphi\left[\int z\cdot r\ dz\right]=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0 dr\int\limits_r^1 z\cdot r\ dz$$

Цилиндрические координаты

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_r^1 z\cdot r\ dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \left.\left(\frac{z^2}{2} r\right)\right|_r^1 =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\frac{r}{2} - \frac{r^3}{2}\right) dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \left.\left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{8}\right)\right|_0^1 =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) d\varphi = \frac{1}{8}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}$$