Метод непосредственного применения законов Кирхгофа

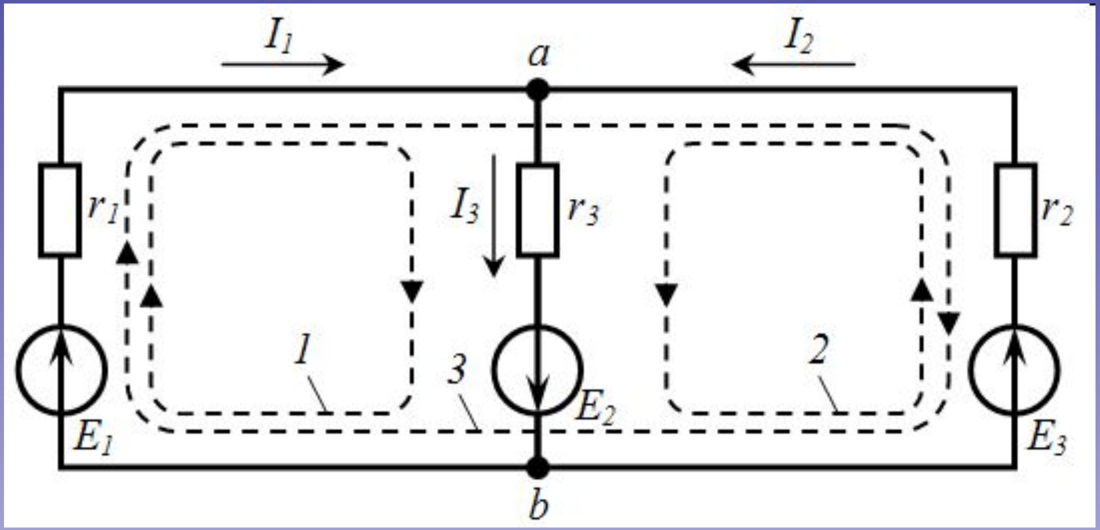
$$\sum I = 0$$

Первый закон Кирхгофа.

$$\sum RI = \sum E$$

Второй закон Кирхгофа.

Метод непосредственного применения законов Кирхгофа



- В качестве примера рассмотрим расчёт цепи, схема которой показана на рисунке — она содержит У = 2 узла и В = 3 ветви, т.е. К = В − У + 1 = 3 − 2 + 1 = 2 независимых контура (на рисунке контуры отмечены пунктирной линией — можно выбрать любую пару из них — 1 и 2, или 2 и 3, или 1 и 3).

- Произвольно выбираем положительные направления токов ветвей I1, I2, I3 (на рисунке направления уже отмечены). По первому закону Кирхгофа можно составить одно (У − 1 = 2 − 1 = 1) независимое уравнение, например для узла а

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

Метод непосредственного применения законов Кирхгофа

- и по второму закону Кирхгофа — два (К = 2) независимых уравнения, например для контуров 1 и 2

$$r_1 I_1 + r_3 I_3 = E_1 + E_2$$
$$r_2 I_2 + r_3 I_3 = E_2 + E_3$$

Представим систему из этих трёх уравнений в матричной форме:

$$\begin{array}{ll} Y-1 & \{ \\ K & \left\{ \right. \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ r_1 & 0 & r_3 \\ 0 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = AI = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = BE$$

или

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ r_1 & 0 & r_3 \\ 0 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)} \begin{bmatrix} -r_2 r_3 & -r_1 r_3 & r_1 r_2 \\ -(r_2 + r_3) & r_3 & -r_2 \\ r_3 & -(r_1 + r_3) & -r_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} =$$

Метод непосредственного применения законов Кирхгофа

$$= \frac{1}{r^2}\begin{bmatrix} r_2+r_3 & -r_3 & r_2 \\ -r_3 & r_1+r_3 & r_1 \\ r_2 & r_1 & r_1+r_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = [G][E].$$

Теперь составим систему уравнений токов:

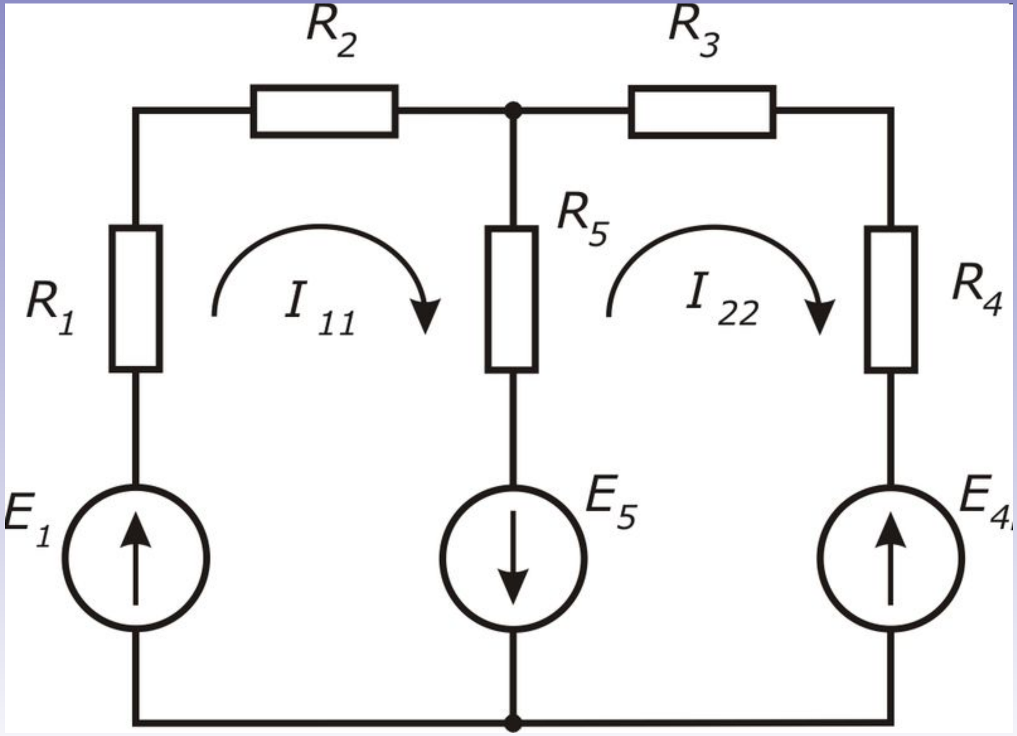
$$\begin{cases} I_1 = g_{11}E_1 + g_{12}E_2 + g_{13}E_3; \\ I_2 = g_{21}E_1 + g_{22}E_2 + g_{23}E_3; \\ I_3 = g_{31}E_1 + g_{32}E_2 + g_{33}E_3, \end{cases}$$

где

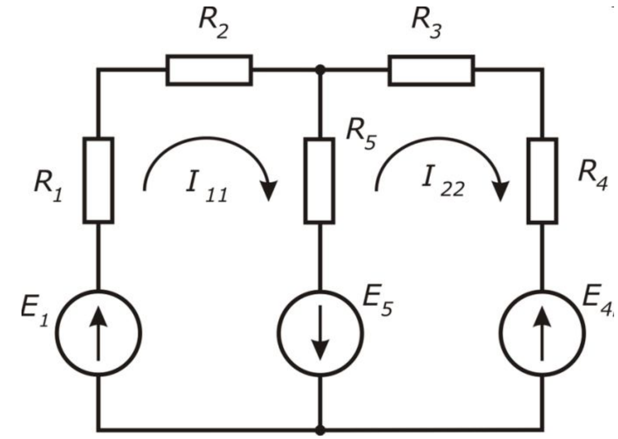
$$\begin{aligned} g_{11} &= (r_2+r_3)/r^2; \\ g_{22} &= (r_1+r_3)/r^2; \\ g_{33} &= (r_1+r_2)/r^2; \\ g_{12} &= g_{21} = -r_3/r^2; \\ g_{13} &= g_{31} = r_2/r^2; \\ g_{23} &= g_{32} = r_1/r^2; \\ r &= \sqrt{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}. \end{aligned}$$

Метод контурных токов

- Положим, что в левом контуре по часовой стрелке течет контурный ток I11, а в правом (также по часовой стрелке) — контурный ток I22. Для каждого из контуров составим уравнения по второму закону Кирхгофа. При этом учтем, что по смежной ветви (с сопротивлением R5) течет сверху вниз ток I11–I22. Направления обхода контуров примем также по часовой стрелке.



Метод контурных токов



Для первого контура

$$(R_1 + R_2)I_{11} + R_5(I_{11} - I_{22}) = E_1 + E_5$$

или

$$(R_1 + R_2 + R_5)I_{11} + (-R_5)I_{22} = E_1 + E_5$$

Для второго контура

$$-R_5(I_{11} - I_{22}) + (R_3 + R_4)I_{22} = -E_5 - E_4$$

или

$$(-R_5)I_{11} + (R_3 + R_4 + R_5)I_{22} = -E_5 - E_4$$

Перепишем эти уравнения следующим образом:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} = E_{11} \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} = E_{22} \end{cases}$$

Здесь

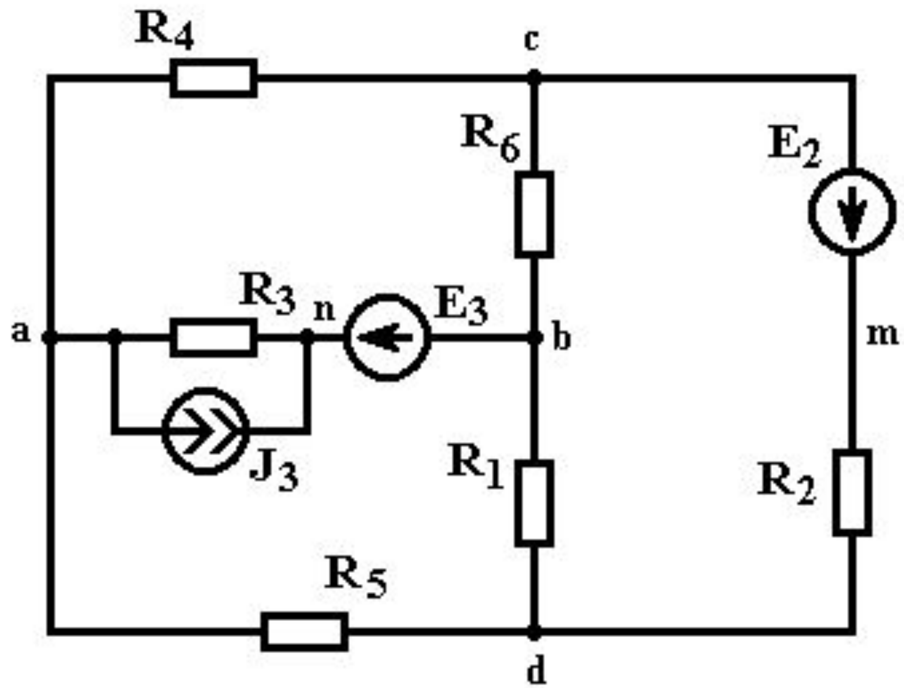
$R_{11} = R_1 + R_2 + R_5$ — полное сопротивление первого контура;
$R_{22} = R_3 + R_4 + R_5$ — полное сопротивление второго контура;
$R_{12} = R_{21} = -R_5$ — сопротивления смежной ветви между первым и вторым контурами, взятые со знаком минус;
$E_{11} = E_1 + E_5$ — контурная ЭДС первого контура;
$E_{22} = -E_4 - E_5$ — контурная ЭДС второго контура.

Метод узловых потенциалов

Задание:

Определить токи во всех ветвях схемы методом узловых потенциалов. Начертить потенциальную диаграмму для любого замкнутого контура, включающего обе ЭДС.

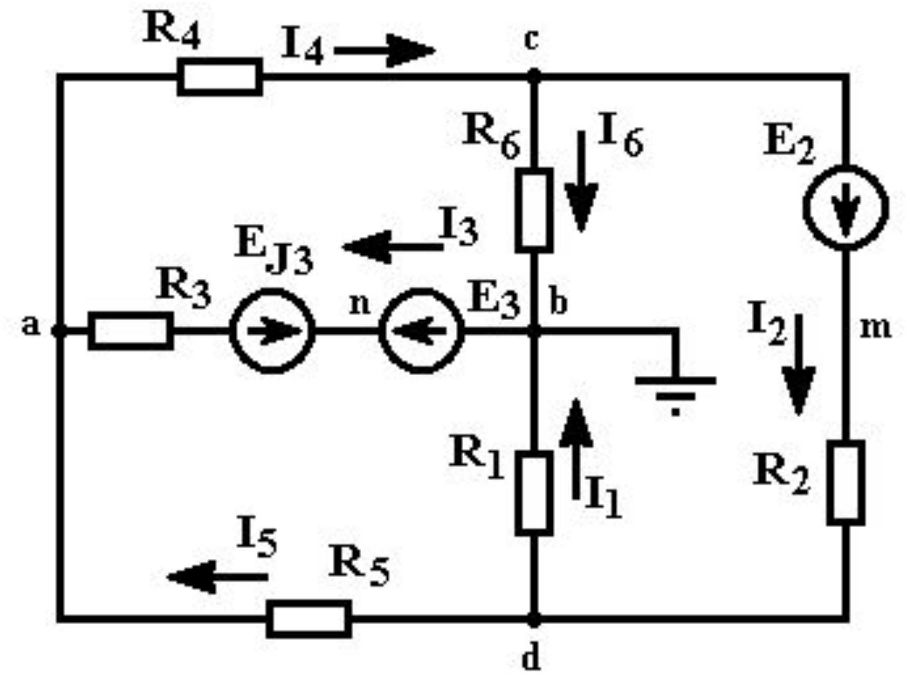
$R_1 = 6$ Ом
$R_2 = 5$ Ом
$R_3 = 8$ Ом
$R_4 = 14$ Ом
$R_5 = 7$ Ом
$R_6 = 8$ Ом
$E_2 = 20$ В
$E_3 = 30$ В
$J_3 = 1$ А



Метод узловых потенциалов

Решение:

1. Преобразовываем источник тока J_3 в источник ЭДС $E_{J3} = J_3 \cdot R_3 = 1 \cdot 8 = 8$ В. Условно заземляем одну из точек цепи (принимаем потенциал $\varphi_b = 0$).



Метод узловых потенциалов

2. Записываем систему узловых уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_a \cdot G_{aa} + \varphi_c \cdot G_{ac} + \varphi_d \cdot G_{ad} = I_{aa} \\ \varphi_a \cdot G_{ca} + \varphi_c \cdot G_{cc} + \varphi_d \cdot G_{cd} = I_{cc} \\ \varphi_a \cdot G_{da} + \varphi_c \cdot G_{dc} + \varphi_d \cdot G_{dd} = I_{dd} \end{cases}$$

здесь G_{kk} – собственные проводимости узлов (сумма проводимостей всех ветвей, подключенных к узлу k).

G_{kh} – взаимные проводимости узлов (сумма проводимостей всех ветвей, соединяющих узлы k и h, взятая с обратным знаком).

I_{kk} – узловые токи (алгебраическая сумма токов всех источников, подключенных к узлу k, при условном отсутствии разности потенциалов между узлами).

3. Находим проводимости и узловые токи:

$G_{aa} = 1/R_3 + 1/R_4 + 1/R_5 = 1/8 + 1/14 + 1/7 = 0{,}3393$ Ом$^{-1}$

$G_{cc} = 1/R_2 + 1/R_4 + 1/R_6 = 1/5 + 1/14 + 1/8 = 0{,}3964$ Ом$^{-1}$

$G_{dd} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_5 = 1/6 + 1/5 + 1/7 = 0{,}5095$ Ом$^{-1}$

$G_{ac} = G_{ca} = -1/R_4 = -1/14 = -0{,}07143$ Ом$^{-1}$

$G_{ad} = G_{da} = -1/R_5 = -1/7 = -0{,}1429$ Ом$^{-1}$

$G_{cd} = G_{dc} = -1/R_2 = -1/5 = -0{,}2$ Ом$^{-1}$

$I_{aa} = (E_3 - E_{J3}) \cdot g_3 = (E_3 - E_{J3}) / R_3 = (30 - 8)/8 = 2{,}75$ А

$I_{cc} = -E_2 / R_2 = -20/5 = -4$ А

$I_{dd} = E_2 / R_2 = 20/5 = 4$ А

Метод узловых потенциалов

4. Подставив в уравнения численные значения и решая систему с помощью определителей, находим потенциалы узлов:

$$\begin{cases} \varphi_a \cdot 0,3393 - \varphi_c \cdot 0,07143 - \varphi_d \cdot 0,1429 = 2,75 \\ -\varphi_a \cdot 0,07143 + \varphi_c \cdot 0,3964 - \varphi_d \cdot 0,2 = -4 \\ -\varphi_a \cdot 0,1429 - \varphi_c \cdot 0,2 + \varphi_d \cdot 0,5095 = 4 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,3393 & -0,07143 & -0,1429 \\ -0,07143 & 0,3964 & -0,2 \\ -0,1429 & -0,2 & 0,5095 \end{vmatrix} = 0,04018 \qquad \Delta a = \begin{vmatrix} 2,75 & -0,07143 & -0,1429 \\ -4 & 0,3964 & -0,2 \\ 4 & -0,2 & 0,5095 \end{vmatrix} = 0,4692$$

$$\Delta c = \begin{vmatrix} 0,3393 & 2,75 & -0,1429 \\ -0,07143 & -4 & -0,2 \\ -0,1429 & 4 & 0,5095 \end{vmatrix} = -0,1189 \qquad \Delta d = \begin{vmatrix} 0,3393 & -0,07143 & 2,75 \\ -0,07143 & 0,3964 & -4 \\ -0,1429 & -0,2 & 4 \end{vmatrix} = 0,4004$$

$$\varphi_a = \Delta a / \Delta = 0,4692 / 0,04018 = 11,68 \text{ В}$$

$$\varphi_c = \Delta c / \Delta = -0,1189 / 0,04018 = -2,958 \text{ В}$$

$$\varphi_d = \Delta d / \Delta = 0,4004 / 0,04018 = 9,965 \text{ В}$$

Метод узловых потенциалов

5. Определяем токи в ветвях по формуле: $I_{kh} = (E_{kh} + (\varphi_k - \varphi_h)) \cdot g_{kh} = (E_{kh} + (\varphi_k - \varphi_h)) / R_{kh}$

$$I_1 = (0 + (\varphi_d - \varphi_b)) / R_1 = (0 + (9{,}965 - 0)) / 6 = 1{,}661 \text{ A}$$

$$I_2 = (E_2 + (\varphi_c - \varphi_d)) / R_2 = (20 + (-2{,}958 - 9{,}965)) / 5 = 1{,}415 \text{ A}$$

$$I_3 = ((E_3 - E_{J3}) + (\varphi_b - \varphi_a)) / R_3 = ((30 - 8) + (0 - 11{,}68)) / 8 = 1{,}290 \text{ A}$$

$$I_4 = (0 + (\varphi_a - \varphi_c)) / R_4 = (0 + (11{,}68 + 2.958)) / 14 = 1{,}046 \text{ A}$$

$$I_5 = (0 + (\varphi_d - \varphi_a)) / R_5 = (0 + (9{,}965 - 11{,}68)) / 7 = -0{,}2448 \text{ A}$$

$$I_6 = (0 + (\varphi_c - \varphi_b)) / R_6 = (0 + (-2{,}958 - 0)) / 8 = -0{,}3698 \text{ A}$$

Возвращаясь к исходной схеме с источником тока получаем

$$I_{R3} = I_3 + J_3 = 1{,}290 + 1 = 2{,}290 \text{ A}$$

6. Для построения потенциальной диаграммы выбираем контур b-n-a-d-m-c-b. Потенциалы узлов a, b, c и d уже найдены. Определим потенциалы точек m и n.

$$\varphi_m = \varphi_c + E_2 = -2{,}958 + 20 = 17{,}04 \text{ B}$$

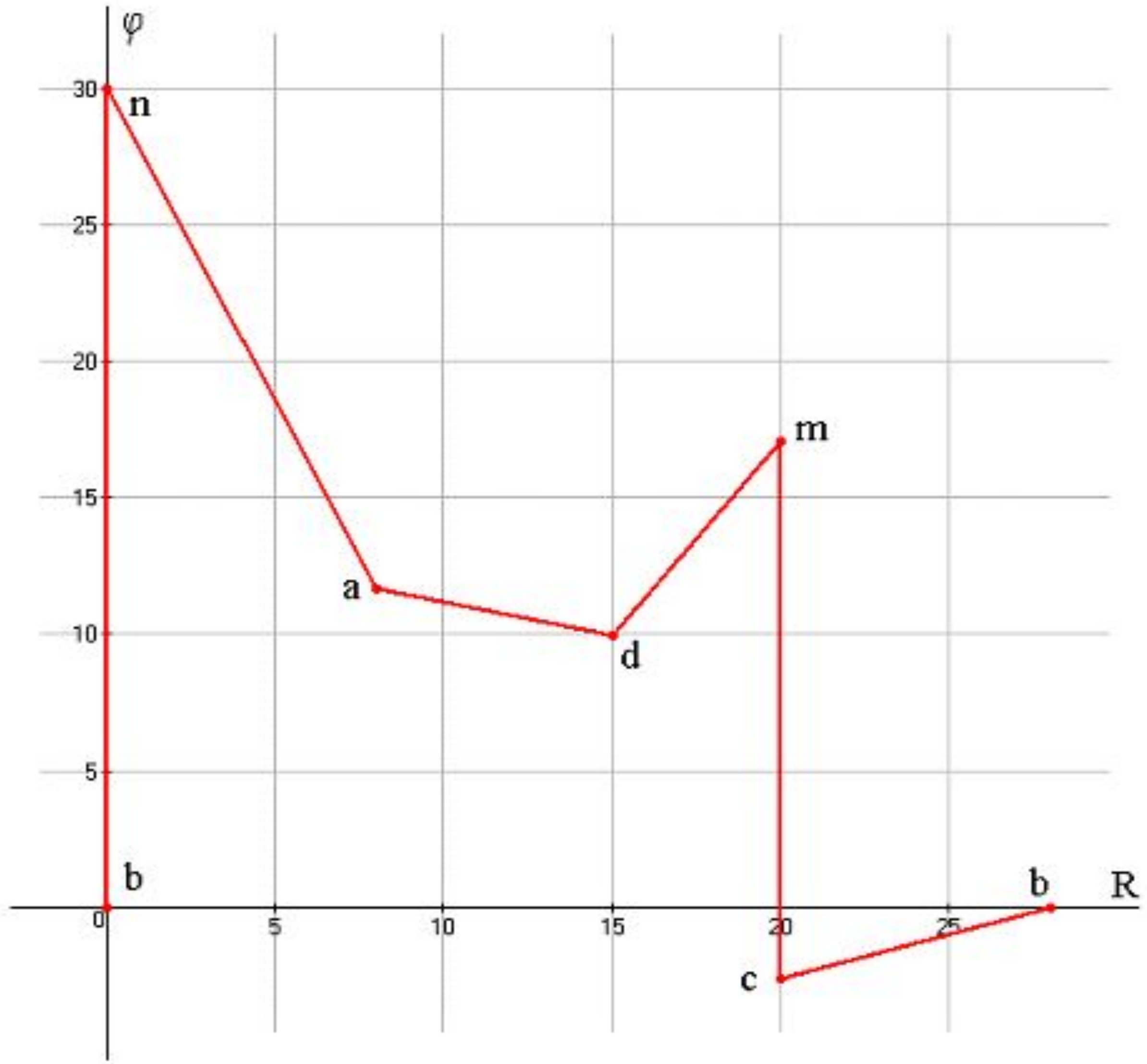
$$\varphi_n = \varphi_b + E_3 = 0 + 30 = 30 \text{ B}$$

7. Для удобства построения составим таблицу изменения потенциалов и сопротивлений по замкнутому контуру:

Узел, точка	b	n	a	d	m	c	b
Соединительный элемент		E_3	R_3	R_5	R_2	E_2	R_6
Сопротивление элемента	0	0	8	7	5	0	8
Потенциал	0	30	11,68	9,965	17,04	-2,958	0
Абсолютное сопротивление (от начала диаграммы)	0	0	8	15	20	20	28

Метод узловых потенциалов

8. Откладывая по вертикальной оси значения потенциала, а по горизонтальной – абсолютное сопротивление, строим потенциальную диаграмму.



Метод двух узлов

Дано: E1=8В; E5=12В; R1=R3=1 Ом;
R2=R4=2 Ом; R5=3 Ом.
Определить все токи методом узловых напряжений.

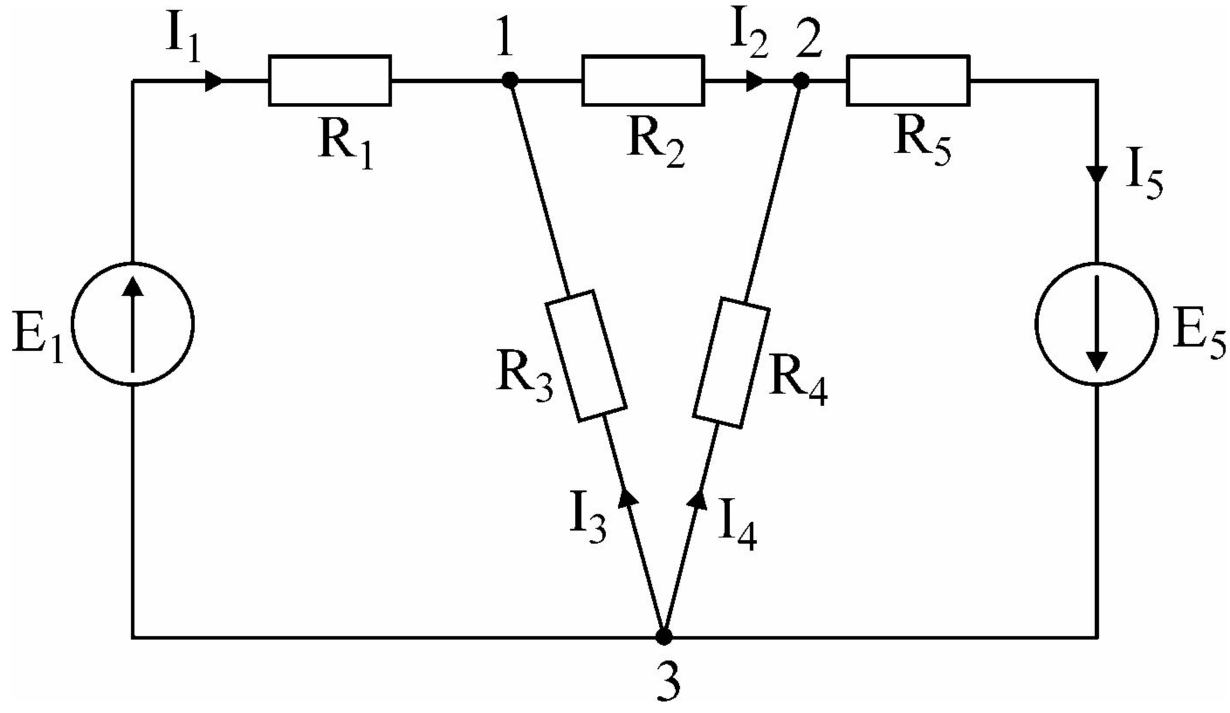


Рис.1

Метод двух узлов

Решение:

Т.к. электрическая цепь содержит три узла и не содержит ветвей с идеальными источниками э.д.с., то число уравнений, составляемых по методу узловых напряжений равно 2.

Узел 3 будем считать базисным.

Тогда $\begin{cases} U_{13}q_{11} - U_{23}q_{12} = I_{y1} \\ -U_{13}q_{21} + U_{23}q_{22} = I_{y2} \end{cases}$

$$q_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = 1 + 0{,}5 + 1 = 2{,}5$$

$$q_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}33 = 1{,}33$$

Где

$$q_{12} = q_{21} = \frac{1}{R_2} = 0{,}5$$

$$I_{y1} = \frac{E_1}{R_1} = 8; \quad I_{y2} = -\frac{E_5}{R_5} = -4$$

В результате решения системы определяем U_{13}=2,8 В; U_{23}=-1,95 В.

Токи в ветвях определяем по закону Ома:

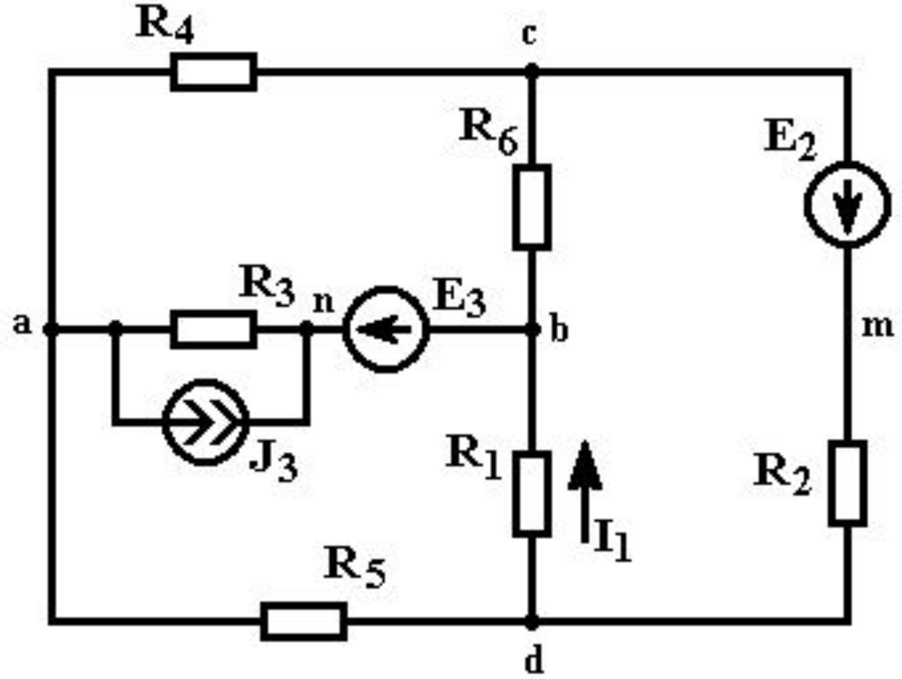
$$I_1 = \frac{E_1 - U_{13}}{R_1} = 5{,}19\text{А} \quad I_3 = \frac{-U_{13}}{R_3} = -2{,}81\text{А} \quad I_5 = \frac{U_{23} + E_5}{R_5} = 3{,}35\text{А}$$

$$I_2 = \frac{U_{12} - U_{23}}{R_2} = 2{,}38\text{А} \quad I_4 = \frac{-U_{23}}{R_4} = 0{,}97\text{А}$$

Метод эквивалентного генератора

Определить ток I_1 в схеме, используя метод эквивалентного генератора.

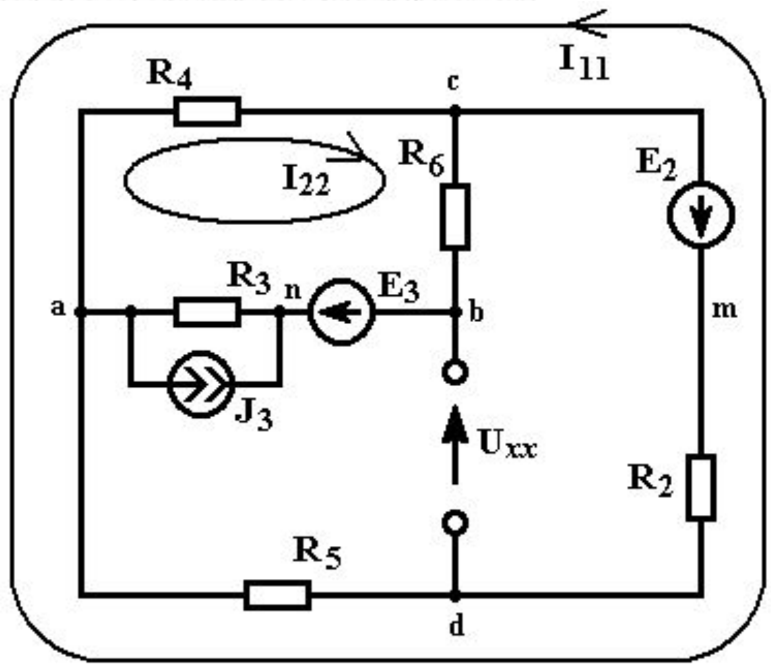
$R_1 = 6$ Ом
$R_2 = 5$ Ом
$R_3 = 8$ Ом
$R_4 = 14$ Ом
$R_5 = 7$ Ом
$R_6 = 8$ Ом
$E_2 = 20$ В
$E_3 = 30$ В
$J_3 = 1$ А



Метод эквивалентного генератора

Решение:

1. Любой участок электрической цепи, имеющий два вывода (полюса), называется двухполюсником. Если двухполюсник содержит источники питания, он называется активным. Согласно теореме об эквивалентном генераторе любой активный двухполюсник можно заменить эквивалентным ему генератором с $E_{экв}=U_{хх}$ и $R_{0экв}=R_{вх}$ двухполюсника. Представляем всю цепь, за исключением первой ветви, как активный двухполюсник. Так как первая ветвь теперь разомкнута, все токи, кроме J_3, отличаются от токов в исходной схеме.



Метод эквивалентного генератора

2. Для определения напряжения холостого хода двухполюсника U_{xx} достаточно найти токи во второй и шестой ветвях, или в пятой и третьей ветвях. Это удобно сделать методом контурных токов

$$\begin{cases} I_{11}\cdot(R_5 + R_2 + R_4) - I_{22}\cdot R_4 = -E_2 \\ -I_{11}\cdot R_4 + I_{22}\cdot(R_4 + R_6 + R_3) + J_3\cdot R_3 = E_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{11}\cdot(7 + 5 + 14) - I_{22}\cdot 14 = -20 \\ -I_{11}\cdot 14 + I_{22}\cdot(14 + 8 + 8) + 1\cdot 8 = 30 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 26 & -14 \\ -14 & 30 \end{vmatrix} = 26\cdot 30 - (-14)\cdot(-14) = 584$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -20 & -14 \\ 22 & 30 \end{vmatrix} = -292 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 26 & -20 \\ -14 & 22 \end{vmatrix} = 292$$

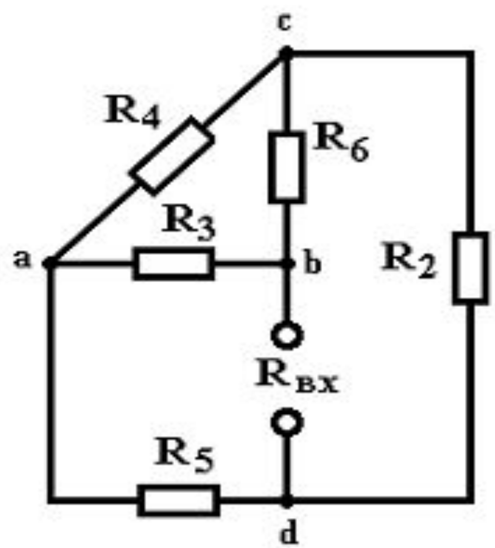
$$I_{11} = \Delta_1 / \Delta = -292 / 584 = -0{,}5 \text{ А}$$

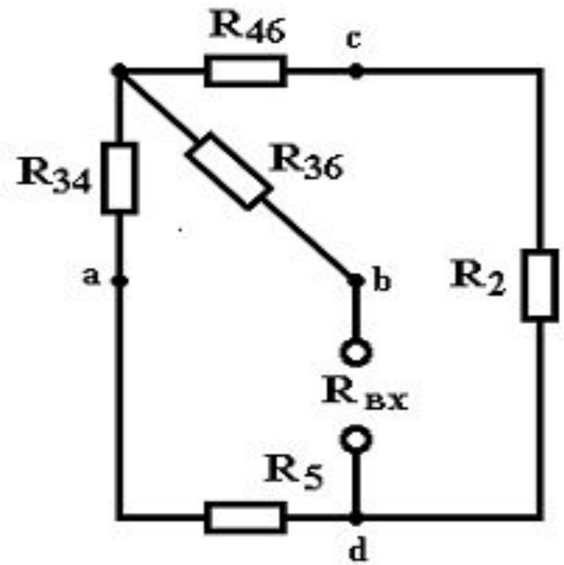
$$I_{22} = \Delta_2 / \Delta = 292 / 584 = 0{,}5 \text{ А}$$

3. Находим эквивалентную ЭДС (напряжение холостого хода):

$$U_{xx} = \varphi_{dxx} - \varphi_{bxx} = I_{22}\cdot R_6 + E_2 + I_{11}\cdot R_2 = 0{,}5\cdot 8 + 20 - 0{,}5\cdot 5 = 21{,}5 \text{ В}$$

Метод эквивалентного генератора





$$R_{34} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_6 + R_3 + R_4} = \frac{8 \cdot 14}{8+8+14} = 3{,}733 Ом$$

$$R_{46} = \frac{R_4 \cdot R_6}{R_6 + R_3 + R_4} = \frac{14 \cdot 8}{8+8+14} = 3{,}733 Ом$$

$$R_{63} = \frac{R_6 \cdot R_3}{R_6 + R_3 + R_4} = \frac{8 \cdot 8}{8+8+14} = 2{,}133 Ом$$

$$R_{534} = R_5 + R_{34} = 7 + 3{,}733 = 10{,}73 \text{ Ом}$$

$$R_{246} = R_2 + R_{46} = 5 + 3{,}733 = 8{,}733 \text{ Ом}$$

$$R_{вх} = \frac{R_{534} \cdot R_{246}}{R_{534} + R_{246}} + R_{63} = \frac{10{,}73 \cdot 8{,}733}{10{,}73 + 8{,}733} + 2{,}133 = 6{,}949 Ом$$

5. Определяем ток первой ветви по закону Ома.

$$I_1 = U_{хх}/(R_1 + R_{вх}) = 21{,}5/(6 + 6{,}949) = 1{,}660 \text{ А}$$

Баланс мощностей

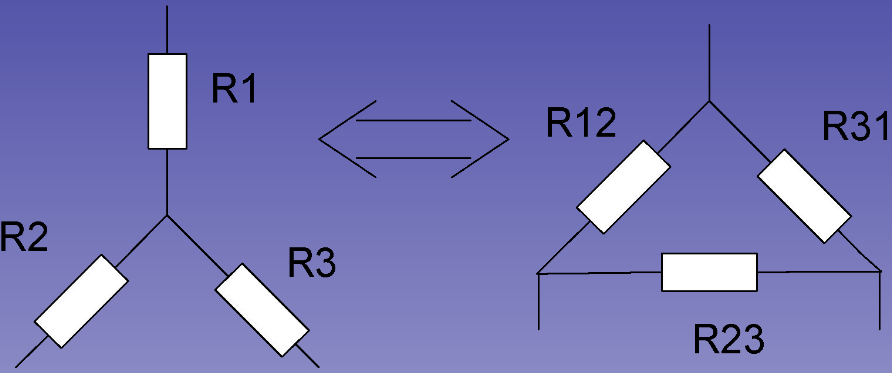
$$\sum IU_{ab} + \sum_{k=1}^{m} E_k I_k = \sum_{k=1}^{m} I_k^2 R_k$$

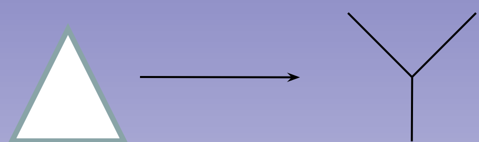
Мощность источника ЭДС $P = \pm EI$

Мощность источника тока $P = \pm IU_{источника}$

Мощность в сопротивлении цепи $I^2 R$

Преобразование треугольника в звезду и наоборот

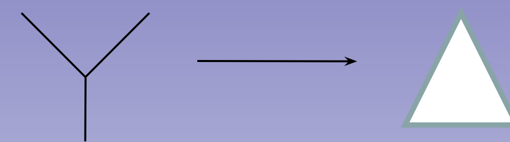




$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}$$



$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{\sum R} \qquad R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{\sum R}$$

$$R_3 = \frac{R_{23} R_{31}}{\sum R}$$

$$\sum R = R_1 + R_2 + R_3$$