


# Абстрактное моделирова ние

# Цель лекции

- Изложение основных понятий и методов моделирования технических процессов.
  - Этапы абстрактного моделирования.
  - Классификация моделей по признаку наличия предварительной информации.
  - Методы построения моделей детерминированного и стохастического типа.
  - Модели с использованием марковских цепей и иммитационные модели.
- 

**Физическая модель** – это копия прибора, приспособления или машины, называемой натуральной, которая подчиняется определенным правилам.

**Цель моделирования** – изучение определенной ситуации для выбора оптимального решения, удовлетворяющего какому-то критерию.

# Этапы абстрактного моделирования

- Информационная модель
- Логико-математическая модель
- Алгоритм и программа
- Исследование на ЭВМ
- Интерпретация результатов, проверка и, если необходимо, корректировка моделей и программ

# Информационная модель

— это конкретное словесное описание ситуации, изучаемого явления, где отвечается на вопросы: что происходит, почему происходит и при каких условиях происходит (при этом очень важно уточнить начальные и граничные условия ).

Информационная модель переводится на логико-математический язык .

Перед построением математических моделей необходимо составить информационную модель.

## Классификация моделей по признаку наличия информации:

- **Первая группа** - модели, в которых информация отсутствует .
- **Вторая группа** - модели, в которых информация достаточна.

# Классификация моделей:

- *детерминированные*, к которым относятся статические (алгебраические) и динамические, представляемые в виде систем дифференциальных уравнений;
- *стохастические* (вероятностные), когда имеем дело с массовыми явлениями.

**Если расчет на модели  
дает результаты такого  
же порядка, как и  
результаты опытных  
исследований, можно  
считать, что модель  
адекватна.**



# Детерминированные процессы:

## 1. Закон сохранения массы:

$$dV=(Q_1-Q_2)\cdot dt$$

при плотности  $Q_1=Q_2=\text{const}$ ,  $dV$  – изменение объема жидкости в резервуаре,  $Q_1$  и  $Q_2$  – входящий и исходящий расход жидкости за время  $dt$ .

# Детерминированные процессы:

## 2. Закон сохранения импульса силы или количества движения:

$$d(mV) = (\Sigma F) \cdot dt,$$

$m$  – масса тела,  $V$  – его скорость,  $\Sigma F$  – внешние силы и  $dt$  – элементарный промежуток времени.

# Детерминированные процессы:

## *3. Закон сохранения момента количества движения.*

Этот закон, как и предыдущий, находит большое применение при построении математических моделей разных явлений, начиная от самых простых, до сложных случаев. Этот закон находит применение в расчетах турбин, компрессоров, насосов и аналогичных лопаточных устройств

# Детерминированные процессы:

## 4. Закон сохранения энергии:

- гидромеханика:

$$\mathcal{E}_n + \mathcal{E}_k = \left( \frac{P}{\gamma} + z \right) + \frac{V^2}{2g} = const$$

$P$  – давление,  $\gamma$  - объемный вес,  $z$  - высота,  $V$  - скорость потока,  $g$  - ускорение силы тяжести.

# Детерминированные процессы:

- *Термодинамика*

$$Э_{\text{п}} + Э_{\text{к}} = U = \text{const}$$

сумма потенциальной, кинетической и внутренней энергии есть величина постоянная.

# Детерминированные процессы:

## • явления переноса:

- диффузия;

- внутреннее трение или вязкость;

- теплопроводность.

Распространение молекул примеси в жидкости или газе при отсутствии макроскопических перемещений подчиняется закону Фюка

$$q = -D \frac{\Delta C}{\Delta Y}$$

где  $q$  — поток диффундирующего вещества;  $D$  — коэффициент диффузии;

$\Delta C / \Delta Y$  — градиент концентрации вещества.

Сила внутреннего трения равна

$$F = -\eta \frac{\Delta V}{\Delta Y}$$

где  $\eta$  - коэффициент вязкости

Через газ, заключенный между параллельными стенками имеющими разные температуры  $T_1$  и  $T_2$  в направлении, нормальном к стенке, будет распространяться поток тепла, описываемый законом Фурье:

$$q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta Y}$$

где  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности,  $\Delta T$  — приращение температуры.



Многие модели в электротехнике строятся на основании закона Ома для постоянного тока:

$$i = \frac{E}{R + r} \quad \text{или} \quad iR + ir = E$$

где  $i$  — сила тока,  $E$  — электродвижущая сила,  $r$  — внутреннее сопротивление источника,  $R$  — нагрузка.

Для переменного тока при наличии индуктивности  $L$  и емкости  $C$  закон Ома представим в виде:

$$iR + V = E - L \frac{di}{dt}$$

Так как  $Q=V \cdot C$  и  $dQ=i \cdot dt$ , имеем  $dV/dt = i/C$ . Подставляя  $dV/dt$  в уравнение и дифференцируя его, получим:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dE}{dt}$$

На основании первого закона Кирхгофа для сходящихся в точке токов имеем  $\sum i = 0$  - как выражение закона сохранения электрического заряда.

По второму закону Кирхгофа для замкнутого контура имеем

$$\sum iR + \sum ir = \sum E,$$

т.е. алгебраическая сумма произведений токов на сопротивление равна алгебраической сумме электродвижущих сил, действующих в замкнутом контуре.

В физике имеется группа уравнений в частных производных, известных под названием уравнений математической физики. Уравнение теплопроводности или диффузии представим в общем виде:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = - \frac{\partial(Ac)}{\partial x} + \frac{\partial^2(Dc)}{\partial x^2}$$

## Явление выделения

Пусть за время  $dt$  выделяется масса  $dm$ , определяемая выражением

$$-dm = p \cdot m \cdot dt,$$

где  $p$  - коэффициент пропорциональности, ( $1/c$ ). Тогда

$$dm/m = -p \cdot dt$$

Интегрируя это выражение, получаем:

$$\ln m = -pt + C$$

при  $t_0 = 0$ ,  $C = \ln m_0$ . Потенцируя выражение получим  $m = m_0 \cdot e^{-pt}$ . Если обозначить  $p$  через  $1/t_0$ , то  $m = m_0 \exp(-t/t_0)$ . В безразмерном виде  $m = m_0 \exp(-\tau)$ , где  $\tau = t/t_0$  или  $\mu = \exp(-\tau)$ .

## *Уравнение движения поплавка*

Будем исходить из уравнения баланса массы. Изменение объема воды в резервуаре за время  $dt$  равно разнице между входом и выходом, что можно представить в виде уравнения

$$S \cdot dH = (Q - q) \cdot dt,$$

где  $Q$  - приток воды,  $q$  - расход воды,  $S$  - площадь сечения резервуара,  $H$  - высота.

Для короткого трубопровода справедливо соотношение:

$$q = \mu \cdot f(y) \sqrt{2gH}$$

где  $f(y)$ ,  $[m^2]$  – функция высоты  $H$ . Можно предположить, что  $f(y) = B \cdot y$  в случае прямоугольного сечения отводящей трубы. При  $\mu = const$ :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{Q}{S} - const \cdot \sqrt{H} \cdot H$$

В установившемся режиме:

$$\frac{dH}{dt} = 0 \text{ или } H^{3/2} = \frac{Q}{const}$$

# Динамические модели на основе модели поплавка

Учет колебаний воды в трубопроводе приводит к сложному явлению «гидравлического удара».

На поплавок действует сила веса  $G$ , подъемная сила

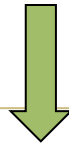
$$F_n = \gamma_B S_n (H - y),$$

А также сила вязкости сопротивления

$$F_c = B \frac{dy}{dt}$$

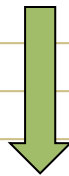


$$F = -G + F_n - F_c$$



$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -G + \gamma_b S_n (H - y) - B \frac{dy}{dt},$$

где  $m$  – масса поплавка,



$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{T} \cdot \frac{dy}{dt} + ay = 0$$

где  $a = \gamma_b S/m$  и  $1/T = B/m$ .

- при  $dE/dt \neq 0$  получаем типичный затухающий "осканка" или затухающий вынужденный колебательный процесс колебаний при большом сопротивлении и  $dE/dt=0$

- при  $dE/dt \neq 0$  получаем типичный вынужденный колебательный процесс

$$T \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt} + kU$$

где

$\varphi$  - угол поворота вала;  $T$  - постоянная, учитывающая момент инерции масс ( $c^2$ );

$U$  - напряжение.

# Вероятностные (стохастические) модели

- *В стохастических моделях участвуют случайные величины.*

*рассмотрим* процесс осаждения группы тяжелых частиц в канале при распределенной скорости воды, являющейся функцией глубины канала.

- частицы в канале имеют нулевую скорость в точке  $X=0$  и  $h = h_0 = 2\text{м}$
- скорость воды в канале соответствует  $v = (1 - 0,25h) \cdot h$
- при  $h = h_{\text{max}} = 2\text{м}$  максимальная скорость составляет величину  $v_{\text{max}} = 1\text{м/с}$

частицы имеют скорость опускания

$$U = f(d)$$

- частицы испытывают воздействия турбулентных пульсаций скорости потока  $f_x$  и  $f_y$
- пульсации имеют нормальное распределение со средним значением  $f_x = f_y = 0$  и средним квадратическим отклонением  $S_e = qv$ , где  $q$  - коэффициент пропорциональности.

*Таким образом, величина пульсации пропорциональна скорости потока.*

вычисляют два случайных числа,  
равномерно распределенных в пределах

$$0 \leq p \leq 1$$

вычисляют уже нормально распределенные числа

при  $\mu_{\text{ср}} = 0$  и  $\sigma^2 = 1$ , где

$\sigma^2$  - дисперсия,

$\mu_{\text{ср}}$  - среднее квадратичное отклонение

скорости перемещения частиц будут следующими:

по высоте (вниз) —  $(u + f_v)$

по длине —  $(v + f_x)$ .

За время  $dt$  имеем перемещения частиц по высоте и длине соответственно:

$$h = h - (u + f_v) \cdot dt,$$

$$X = X + (v + f_x) \cdot dt.$$

Опускание частицы заканчивается при  $h=0$ . При этом отмечается расстояние  $x$  опускания частиц.

**Численный эксперимент состоит в последовательном опускании частиц и регистрации расстояния опускания  $L_x$ . Целью эксперимента может быть, например, изучение распределения частиц по дну канала в зависимости от глубины, скорости воды и ее градиента по высоте, а также анализ влияния крупности частиц или пульсаций скорости**



# Пример построения математической модели с последующим усложнением

Необходимо построить математическую модель смесителя в виде резервуара, в который поступает тяжелая жидкость с плотностью -

$\rho_1$  (кг/м<sup>3</sup>) и расходом  $Q_1$  (м<sup>3</sup>/с).

Растворителем служит вода с плотностью -

$\rho_2 = 1000$  (кг/м<sup>3</sup>) и расходом  $Q_2$  (м<sup>3</sup>/с)

соответственно. Из резервуара вытекает смесь с расходом  $Q_3$  (м<sup>3</sup>/с) при заданной плотности  $\rho_3$  (кг/м<sup>3</sup>).

При равновесии систем — имеем уравнение

баланса количества жидкости

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

а также уравнение баланса массы

$$\rho_1 Q_1 + \rho_2 Q_2 = \rho_3 Q_3$$

откуда

$$\rho_3 = (Q_1 \rho_1 + Q_2 \rho_2) / (Q_1 + Q_2)$$

Например,  $\zeta_3 = 1500 \text{ кг/м}^3$  при  
 $\zeta_2 = -1800 \text{ кг/м}^3$ , откуда

$$Q_2 = Q_1 \cdot (\rho_1 - \rho_3) / (\rho_3 - \rho_2) = 0,6 \cdot Q_1$$

В динамике также будем исходить из уравнения сохранения массы - массового баланса за время  $dt$ .

Изменение массы в системе:

$$dm = (Q_1 \rho_1 + Q_2 \rho_2 - Q_3 \rho) \cdot dt$$

однако

$$dm = d(V \rho) = \rho \cdot dV + V \cdot d\rho$$

$$dV = d(Fh) = h \cdot dF + F \cdot dh$$

Введем первое ограничение, что резервуар цилиндрический, и тогда

$$dV = F \cdot dh \quad \text{и} \quad dm = \rho F \cdot dh + V \cdot d\rho.$$

Пусть резервуар заполнен водой до уровня, при котором

$$Q_3 = Q_1 + Q_2$$

следовательно

$$dV = 0, \quad \text{так как} \quad V = \text{const}$$

**Тогда**  $V d\rho = (Q_1\rho_1 + Q_2\rho_2 - Q_3\rho) dt$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{V} (Q_1\rho_1 + Q_2\rho_2 - Q_3\rho) = \frac{Q_3}{V} (\rho_\infty - \rho), \text{ где}$$

$$\rho_\infty = (Q_1\rho_1 + Q_2\rho_2) / Q_3$$

**получаем**

$$\frac{dy}{dx} = a - by$$

**Решение**

$$-1/b \cdot \ln(a - by) = x + c \quad \text{или} \quad -\ln(\rho_\infty - \rho) = t/T + C, \text{ где}$$
$$T = V/Q_3$$

**при  $t=0$**

$$C = -\ln(\rho_\infty - \rho_2)$$

**И окончательно**

$$\rho = (\rho_\infty - \rho_2) \cdot e^{-t/T} \text{ (кг/м}^3\text{)}$$

# Рассмотрим более общую МОДЕЛЬ

$$dV = F \cdot dh + h \cdot dF = (Q_1 + Q_2 - Q_3) \cdot dt, \text{ где}$$

$$Q_3 = \mu f \sqrt{2gh}$$

При  $F = \text{const}$ ,  $dV = F \cdot dh$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{F} \left( Q_1 + Q_2 - \mu f \sqrt{2gh} \right)$$

# Баланс массы

$$\rho \cdot dV + V \cdot d\rho = (Q_1 \rho_1 + Q_2 \rho_2 - \mu f \sqrt{2gh} \cdot \rho) \cdot dt$$

или

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{V} (Q_1 \rho_1 + Q_2 \rho_2 - \mu f \sqrt{2gh} \cdot \rho - \rho \frac{dV}{dt}) \cdot dt$$

где

$$\frac{dV}{dt} = F \frac{dh}{dt}$$



## Подставим вместо $dv/dt$

$$F \frac{dh}{dt} = Q_1 + Q_2 - \mu f \sqrt{2gh}$$

тогда

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{F} (Q_1 + Q_2 - \mu f \sqrt{2gh}),$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{V} [Q_1 \rho_1 + Q_2 \rho_2 - (Q_1 + Q_2) \rho]$$

# Марковские цепи

Для описания многих явлений, которые можно представить как совокупность ряда состояний, в современной вычислительной математике находит применение теория цепей Маркова. Очень эффективно эта теория используется в случае явлений, описываемых моделями с

*рассмотрим* диффузионное осаждение тяжелых частиц в жидкости, приняв одномерную модель.

- *Частица, находящаяся в  $i$ -м слое, в результате случайных блужданий может перейти за время  $dt$  в прилегающие соседние слои, один из которых расположен выше, а другой – ниже данного слоя с вероятностью соответственно  $P_{i,i-1}$  и  $P_{i,i+1}$  или остаться в данном слое с вероятностью  $P_{i,i}$ . Первый индекс вероятностей указывает, из какого слоя переходит данная частица, а второй — в какой слой.*

Частицы могут переходить и на более удалённые слои, то есть  $P_{i,i-j}, \dots, P_{i,i+1}$ .

	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$
$U_1$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$
$P = U_2$	$P_{21}$	$P_{22}$	$P_{23}$	$P_{24}$
$U_3$	$P_{31}$	$P_{32}$	$P_{33}$	$P_{34}$
$U_4$	$P_{41}$	$P_{42}$	$P_{43}$	$P_{44}$

$$\sum_{j=1}^k P_{i,j} = 1 \quad i \in (1, \dots, k)$$

Пользуясь матричным исчислением, можно представить переход из одной временной совокупности состояний

$$\overset{\Delta}{a}_t = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$$

в совокупность состояний для момента времени

$$\overset{\Delta}{a}_{t+1} = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$$

при помощи умножения вектора  $a_t$  на матрицу  $P$  в виде

$$\overset{\Delta}{a}_{t+1} = \overset{\Delta}{a}_t \cdot P.$$

Например, при размерности матрицы, равной трем, имеем:

$$\boxed{a}_{t+1} = \{U_1, U_2, U_3\} \cdot \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix}$$

Тогда

$$U_1^{t+1} = U_1^t P_{11} + U_2^t P_{21} + U_3^t P_{31}$$

$$U_2^{t+1} = U_1^t P_{12} + U_2^t P_{22} + U_3^t P_{32}$$

$$U_3^{t+1} = U_1^t P_{13} + U_2^t P_{23} + U_3^t P_{33}$$

Если речь идет о количестве частиц в замкнутом резервуаре, то соблюдается закон сохранения

$$\sum U_j^{t+1} = \sum U_j^t = \textit{const.}$$

# Связь между дифференциальным уравнением в частных производных параболического типа и цепями Маркова

- уравнения Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -A \frac{\partial y}{\partial x} + D \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

- где в общем случае  $A, D = \text{const.}$



## производные в виде конечных разностей

$$\frac{\partial y}{\partial t} \approx \frac{y_0^{t+1} - y_0}{\Delta t}; \quad \frac{\partial y}{\partial x} \approx \frac{y_{+x} - y_{-x}}{2\Delta x};$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \approx \frac{y_{+x} - 2y_0 + y_{-x}}{\Delta x^2}$$

# Конечно-разностный аналог уравнения

$$\frac{y_0^{t+1} - y_0}{\Delta t} = -A \frac{y_{+x} - y_{-x}}{2\Delta x} + D \frac{y_{+x} - 2y_0 + y_{-x}}{\Delta x^2}.$$

$$y_0^{t+1} = y_0 \left( 1 - 2D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) + y_{+x} \left\{ -A \frac{\Delta t}{2\Delta x} + D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right\} +$$
$$+ y_{-x} \left\{ A \frac{\Delta t}{2\Delta x} + D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right\}$$

Обозначая

$$b = A \frac{\Delta t}{2\Delta x}, \quad c = D \frac{\Delta t}{\Delta x^2},$$

имеем

$$y_0^{t+1} = y_0 (1 - 2c) + y_{+x} (-b + c) + y_{-x} (b + c)$$

$$P_{i+1,i} = -b+c$$

Так как  $b > 0$  и  $c > 0$ , то для устойчивости решения требуется лишь, чтобы  $P_{i,j} \geq 0$ . Отметим также, что здесь имеет место закон сохранения величины (массы, импульса и т.д.)

$$\sum_{i,j} P_{i,j=1}$$

Расчет марковской цепи

$$U_i^{t+1} = P_{i-1,i} U_{i-1} + P_{i,i} U_i + P_{i+1,i} U_{i+1}.$$

Формы для вычисления шага  
интегрирования или, точнее,  
дискретного шага расчета марковской  
цепи.

Формулы вычислений имеют вид

$$\begin{aligned} a_{t+1} &= a_t \cdot P[n, n], \\ a_t &= a_{t+1} \end{aligned}$$

# Имитационное моделирование

*Имитационное моделирование является перспективным направлением моделирования явлений и процессов в природе и технике. Оно возникло с появлением ЭВМ и получит еще более широкое применение по мере развития вычислительной техники.*

*рассмотрим* модель, в которой волк преследует зайца. Пусть в момент времени  $t=t_0$

заяц находится в точке  $x=x_z, y=0$ , а волк — в точке  $x=x_v, y=y_y$ . Заяц

может перемещаться лишь вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $V_z$ .

Составим - дифференциальное уравнение, описывающее движение волка. Пусть за время  $dt$  заяц переместился на  $dx_z = V_z dt$ , а волк — на  $V_v dt$ .

В проекции на оси координат имеем

$$\begin{aligned} dx &= V_v dt \cdot \sin\Theta, \\ -dy &= V_v dt \cdot \cos\Theta, \end{aligned}$$

где

$$\sin\Theta = \frac{x_z - x}{\sqrt{y^2 + (x_z - x)^2}} \quad \text{и} \quad \cos\Theta = \frac{-y}{\sqrt{y^2 + (x_z - x)^2}}$$

Отсюда

$$\frac{dx}{dt} = V_v \frac{x_z - x}{\sqrt{y^2 + (x_z - x)^2}}, \quad \frac{dy}{dt} = V_v \frac{-y}{\sqrt{y^2 + (x_z - x)^2}}$$



Так как при  $t=0$  заяц находится в начале координат, то  $x_z = V_z \cdot t$ . Таким образом, в качестве модели преследования имеем систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = V_v \frac{V_z t - x}{\sqrt{y^2 + (V_z t - x)^2}}, \quad \frac{dy}{dt} = V_v \frac{-y}{\sqrt{y^2 + (V_z t - x)^2}}$$

Рассмотрим теперь модель, когда заяц бежит, прыгая случайно вперед-налево с вероятностью  $P=0,40$ , а вперед-направо — с вероятностью  $P=0,60$ . Его скорость увеличивается по мере уменьшения расстояния  $d$  между преследователем и преследуемым по закону

$$V_z = (1 - \exp(-100/d)) \cdot V_{z0}.$$

В то же время скорость волка растет по аналогичному закону

$$V_v = (1 - \exp(-60/d)) \cdot V_{v0}.$$