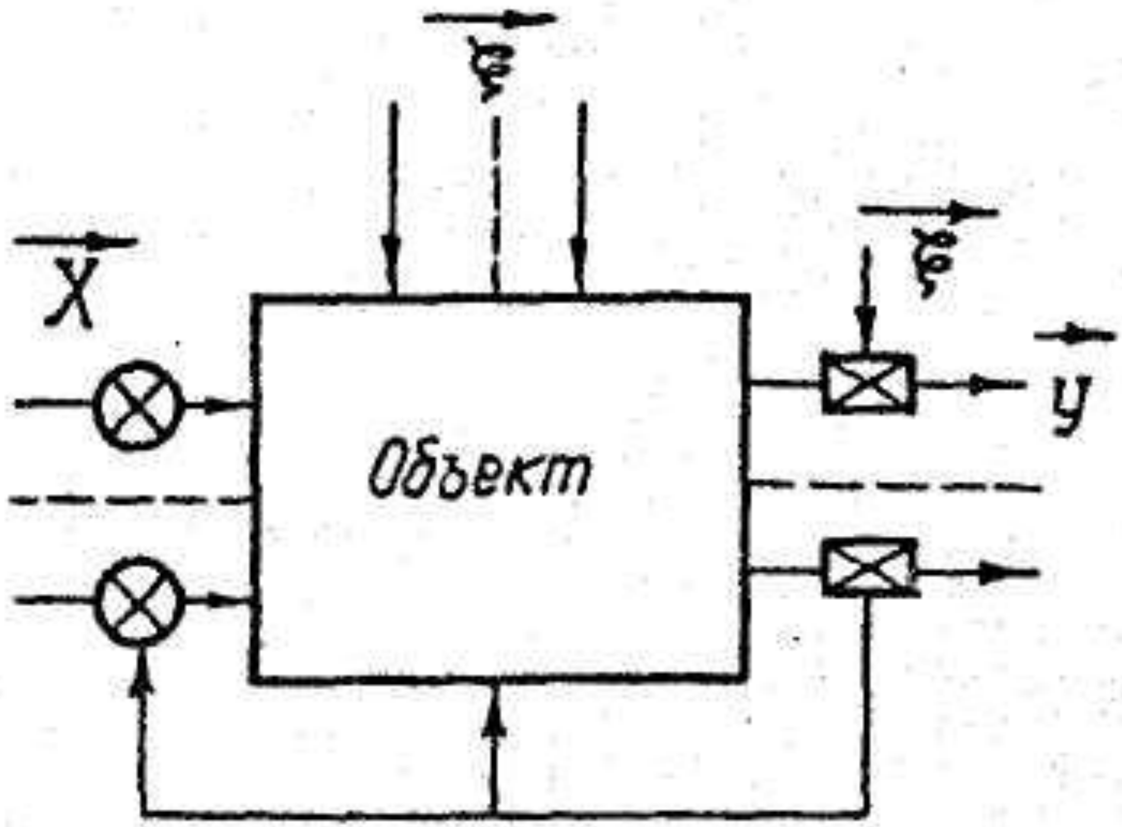
ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ И ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Цель

- Целью данной главы является ознакомление исследователя с основными методами статистической обработки данных, а также с некоторыми приемами современной прикладной математики.

Схема экспериментального исследования и типы обработки результатов

Дана упрощенная схема экспериментального исследования



Обозначая через $\vec{x}$ вектор входа, будем в дальнейшем представлять его массивом $x = x[n_0, n_f]$, представленным в виде матрицы,

- где n_0 — число опытов;

  n_f — число факторов;

  $\vec{y}$ — вектор выхода, чаще всего представляемый в виде единичного вектора $\vec{y}[n_0]$

  а $\vec{\zeta}$ — вектор помех (погрешностей).

На том же рисунке указаны обратные связи, которые следует иметь в виду в любом измерительном процессе, хотя их влияние зависит от конкретных условий.

Например, ясно, что влияние измерительного прибора-термометра на температуру жидкости в большом баке несравнимо мало в сравнении с таким же влиянием на ее температуру, если жидкость находится в стакане.

Перед тем, как приступить к эксперименту, исследователь должен уметь ответить на следующие вопросы:

- что мерить?
- чем мерить?
- где мерить?
- какова точность измерений?
- что делать с результатами измерений?

Измерения

Прямые

Косвенные

Например , измерение температуры термометром или измерение скорости через длину отрезка и времени его прохождения. Ясно, что методы определения погрешностей в этих случаях различные. Это обстоятельство еще осложняется и тем, что измерения могут производиться приборами с различной

точностью (неравноточные измерения).

Погрешности или ошибки в первом приближении классифицируются следующим образом:

1. *Грубые, или промахи. Они относительно легко определяются по их отклонению от среднего значения на основании "правила 3σ".*

2. *Систематические, учитывающие тарировку измерительного прибора.*

3. *Случайные, являющиеся следствием многих мелки факторов. Часто они подчиняются закону нормального распределения (закону Гаусса), хотя в каждом конкретном случае требуется проверка.*

Типы обработки результатов измерений

Задачи обработки опытных данных условно можно разбить на две группы:

1. Определяется значение одной величины x. Для этого производится ряд опытов, в результате которых измеряю значения этой неизвестной величины.

2. Определяется связь между зависимой переменной y и одним или несколькими вектор-факторами x. Эта связь может быть качественной и количественной.

Определение значений одной величины

Пример

В табл. 1 приведены результаты измерения некоторой величины. Требуется определить доверительные интервалы в зависимости от значения принятой вероятности (P=0,95 и P=O,99) и числа степеней свободы ($f = n_0$-1).

№ п\п	x	№ п\п	x	№ п\п	x	№ п\п	x
1	10,5	5	10,4	9	10,3	13	10,5
2	10,8	6	10,6	10	10,8	14	10,7
3	11,2	7	10,9	11	10,6	15	10,8
4	10,9	8	11,0	12	11,3	16	10,9

$$\sum = 172.6$$

Производим вычисления

x = 172,6/16 = 10,76;

$$S_e^2 = \left[\sum_i^{n_0} x_i^2 - \left(\sum_i^{n_0} x_i \right)^2 / n_0 \right] / (n_0 - 1);$$

$$S_e^2 = [1854.44 - (172.2)^2 / 16] / 15;$$

$$S_e^2 = 0.0758; \quad S_e = 0.272;$$

$$S_{\bar{x}}^2 = \sqrt{S_e^2 / n_0} = \sqrt{0.0758 / 16} = 0.069;$$

$$v = S_e / \bar{x} \cdot 100\% = 2.6\%$$

По таблицам Стьюдента-Фишера находим,

что при f = 15 и P = 0,95 t = 1,753 и при f = 15 и P = 0,99 t = 2,947, а доверительные интервалы [10,76-0,12; 10,76+0,12] и [10,76-0,20;10,76+0,20] соответствующим образом накроют истинное значение измеряемой величины x с вероятностями P = 0,95 и P = 0,99 соответственно.

Рассмотрим обратную задачу.

- *Пусть даны доверительные интервалы Д=±10% и Р=0,95. Требуется таким образом определить выборочную среднюю* $\overline{x}$ *, чтобы генеральная средняя величина попадала в интервал х ± Д. При этом желательно произвести минимальное число опытов.*

Составим с этой целью таблицу 2, заполняя ее строки, начиная а второй, по приведенным выше формулам. Далее, по числу степеней свободы $f = n_0 - 1$ и значению t находим вероятность P (по таблице Стьюдента).

№ опыта	y_i	$\sum y_i$	y_i^2	s_{ei}^2	s_{ei}	$s_{\bar{y}i}$	Δi	t_i	P_i
1	9.46	-	-	-	-	-	-	-	-
2	10.42	19.88	198.068	0.461	0.679	0.480	0.994	2.071	0.71
3	9.47	29.35	287.75	0.34	0.551	0.318	0.978	3.073	0.90
4	12.04	41.39	432.71	1.476	1.215	0.607	1.035	1.704	0.81
5	10.84	52.23	550.22	1.155	1.075	0.481	1.045	2.173	0.90
6	10.23	62.46	654.87	0.932	0.965	0.394	1.041	2.64	0.95
7	9.52	71.98	745.5	0.890	0.943	0.357	1.028	2.884	0.96
8	10.16	82.14	848.72	0.765	0.874	0.309	1.027	3.321	0.98

Таблица 2

Из данных таблицы 2 видно, что Р вначале колеблется, а при n_0=6 его значение стабилизируется, достигая значения Р = 0,95. Два последующих опыта подтверждают полученный вывод.

В тех случаях, когда x меняется в больших пределах строят гистограмму и определяют числовые моменты более высокого порядка, по которым судят о типе распределения случайной величины x.

Определение связи

$$y = f(\bar{x})$$

научные исследования

качественные

количественные

Качественные исследования - анализ влияния некоторых факторов на выходную величину **тогда,** когда эти факторы нельзя представить численно.

Количественные исследования имеют место тогда, когда результаты наблюдения или опытов могут быть представлены в виде зависимости $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_{nf})$.

Рассмотрим сущность МНК на примере линейной функции $y = a_0 + a_1 x$, для которой заданы наборы значений фактора x_i и соответствующие y_i.

- Требуется найти значение коэффициентов многочлена a_0 и a_1, таким образом, чтобы сумма квадратов невязок (отклонений) $\Delta = y_i - y_{ai}$ была минимальной.

Для этого следует минимизировать величину

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n_0} (y_i - y_{ai})^2,$$

необходимо выполнить условия

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_0} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial\, a_1} = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial a_0}\left(y - a_0 - a_1 x\right)^2 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial \mathrm{a}_1}\left(y - a_0 - a_1 x\right)^2 = 0$$

После дифференцирования и упрощения выражений получим систему уравнений

$$
\begin{cases}
n_0 \cdot a_0 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n_0} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n_0} y_i, \\
a_0 \sum\limits_{i=1}^{n_0} x_i + a_i \sum\limits_{i=1}^{n_0} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n_0} x_i y_i.
\end{cases}
$$

Статистическая проверка гипотез.

Критерии оценки качества аппроксимации

Статистическая проверка гипотез

- Рассмотрим этот метод на примере однофакторного дисперсионного анализа.

Пусть имеется ряд значений случайной величины, которая изменяется за счет влияния какого-то признака при следующих обозначениях:

- n_0 — *общее число наблюдений;*
- n_q — *число групп, т.е. число значений признака;*
- n_j — *число значений в каждой группе;*
- $\overline{y}$ — *общее среднее значение;*
- $\overline{y}_j$ — *групповое среднее.*

Сумму квадратов результатов наблюдений SC_t можно представить в виде суммы квадратов SC_i внутри каждой группы вокруг группового среднего

$$SC_i = \sum_{j=1}^{n_q} \sum_{i=1}^{n_i} \left(y_{ij} - \bar{y}_j \right)^2,$$

и суммы квадратов этих средних величин вокруг общего среднего значения

$$SC_e = \sum_{j=1}^{n_0} \left(\bar{y}_j - \bar{y} \right)^2 \cdot n_j.$$

Эти выражения можно представить в другом виде

Для вычисления на компьютере:

$$SC_t = \sum_{i=1}^{n_0} y_{ij}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n_0} y_i \right)^2 / n_0;$$

$$SC_e = \sum_{j=1}^{n_q} \bar{y}_j^2 n_j - \left(\sum_{i=1}^{n_0} y_j \right)^2 / n_0;$$

$$SC_j = \sum_{i=1}^{n_o} y_{ij}^2 - \sum_{j=1}^{n_q} \bar{y}_j^2 n_j;$$

где SC_e — доля общей суммы квадратов, объясняемая гипотезой и возникающая из-за изменения признака; SC_i — сумма квадратов, характеризующая неучтенные факторы и другие причины.

Суммы квадратов сопоставляются с учетом степеней свободы.

Оценки дисперсии равны соответственно

$$S_t^2 = SC_t / f_t, \quad где \qquad f_t = n_0 - 1;$$

$$S_e^2 = SC_e / f_e, \quad где \qquad f_e = n_q - 1;$$

$$S_i^2 = SC_i / f_i, \quad где \qquad f_i = n_0 - n_q.$$

В тех случаях, когда $SC_e \approx SC_t$, ошибок нет и аппроксимация "точная". Если же признак не влияет на значение случайной величины, то $S_e^2 \approx S_i^2$, т.е. это величины одного порядка.

Общий случай

Дано: генеральная совокупность и две выборки объема n1 и n2. Мы хотим проверить гипотезу H0 – являются ли две эти выборки частями одной генеральной совокупности или же верна альтернативная гипотеза H1 о том, что они не принадлежат одной генеральной совокупности.

Общий случай

σ^2 - дисперсия S_1^2 и S_2^2 - выборочные дисперсии 1 и 2

В математической статистике рассматриваются случайные величины

$S_1^2 n_1 / \sigma^2$ и $S_2^2 n_2 / \sigma^2$, которые распределены по закону χ^2

соответственно с $f_1 = n_1 - 1$ и $f_2 = n_2 - 1$ степенями свободы

Вводится критерий F (Фишера), определяемый соотношением:

$$F = (n_2 / n_1) \cdot (S_1^2 n_1 / \sigma^2)/(S_2^2 n_2 / \sigma^2) = S_1^2 / S_2^2$$

Оценка адекватности аппроксимации эмпирического выражения

Как известно, при линейной аппроксимации $y=a_0+a_1x$ для оценки ее качества используют коэффициент корреляции

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n_0}\left(x_i y_i - \overline{xy}\right)^2}{S_x S_y}$$

или $r = a_1 S_x / S_y$.

Существуют и более эффективные критерии оценки аппроксимации.

- Например, выдвигая гипотезу H_0 о той что ошибка аппроксимации S_a и ошибка эксперимента S_e величины одного порядка, т.е. взяты из одной генеральной совокупности, а также учитывая, что

$$S_a^2 = \sum_{i=1}^{n_0} \left(y_i - y_{a_i}\right)^2 / \left(n_0 - n_k\right),$$

а величина S_e определяется из опыта, где n_k число коэффициентов аппроксимирующего выражения, для принята гипотезы или отказа от нее применяют F-критерий Фишера

$$F = S_a^2 / S_e^2$$

Второй критерий базируется на использовании выражении

$$I^2 = \frac{SC_e}{SC_t} = \frac{SC_t - SC_i}{SC_t} = 1 - \frac{SC_i}{SC_t}$$

характеризующего относительное уменьшение неопределенности при аппроксимации статистических данных эмпирческой формулой.

Величина критерия I^2 находится в диапазоне 0÷1 и чем ближе к единице это значение, тем меньше разногласие между статистическими данными и аппроксимацией. На практике используют критерии

$$I_k^2 = 1 - \frac{SC_i}{SC_t} \cdot \frac{f_t}{f_i},$$

в котором поправка $\mathbf{f_t / f_i = (n_0 - 1) / (n_0 - n_k)}$ указывает на то, что имеем дело с небольшим числом степеней свободы. Благодаря этому оценка становится несмешанной.

Отметим, что дисперсия аппроксимации

$$S_a^2 = SC_i / f_i = \sum_{i=1}^{n_0} \left(\mathrm{y}_\mathrm{i} - y_{a_i} \right)^2 / (n_0 - n_k),$$

при малых $\boldsymbol{f_i = n_0 - n_k}$ *может стать больше, чем* S_t^2 *, и тогда его величина определяется алгоритмически:*

Применение относительной ошибки для оценки аппроксимации

Часто возникает вопрос о целесообразности многократного повторения опытов для нахождения экспериментальной дисперсии. В этой связи может возникнуть вопрос о том, не лучше ли дополнительные опыты проводить, равномерно распределяя их по экспериментальному полю? Таким образом, иногда можно еще получить данные об экстремальных областях по зависимому параметру.

Применение относительной ошибки для оценки аппроксимации

Обозначим через V_{∞} (%) допустимую вариацию или относительную ошибку (2, 3 или 8%). При обработке данных находим относительную ошибку данного эксперимента или наблюдения по формуле

$$V = S_a / Y_{ср} \cdot 100\%,$$

где дисперсия аппроксимации

$$S_a^2 = \sum_{i=1}^{n_0} \left(y_i - y_{a_i}\right)^2 / f_a,$$

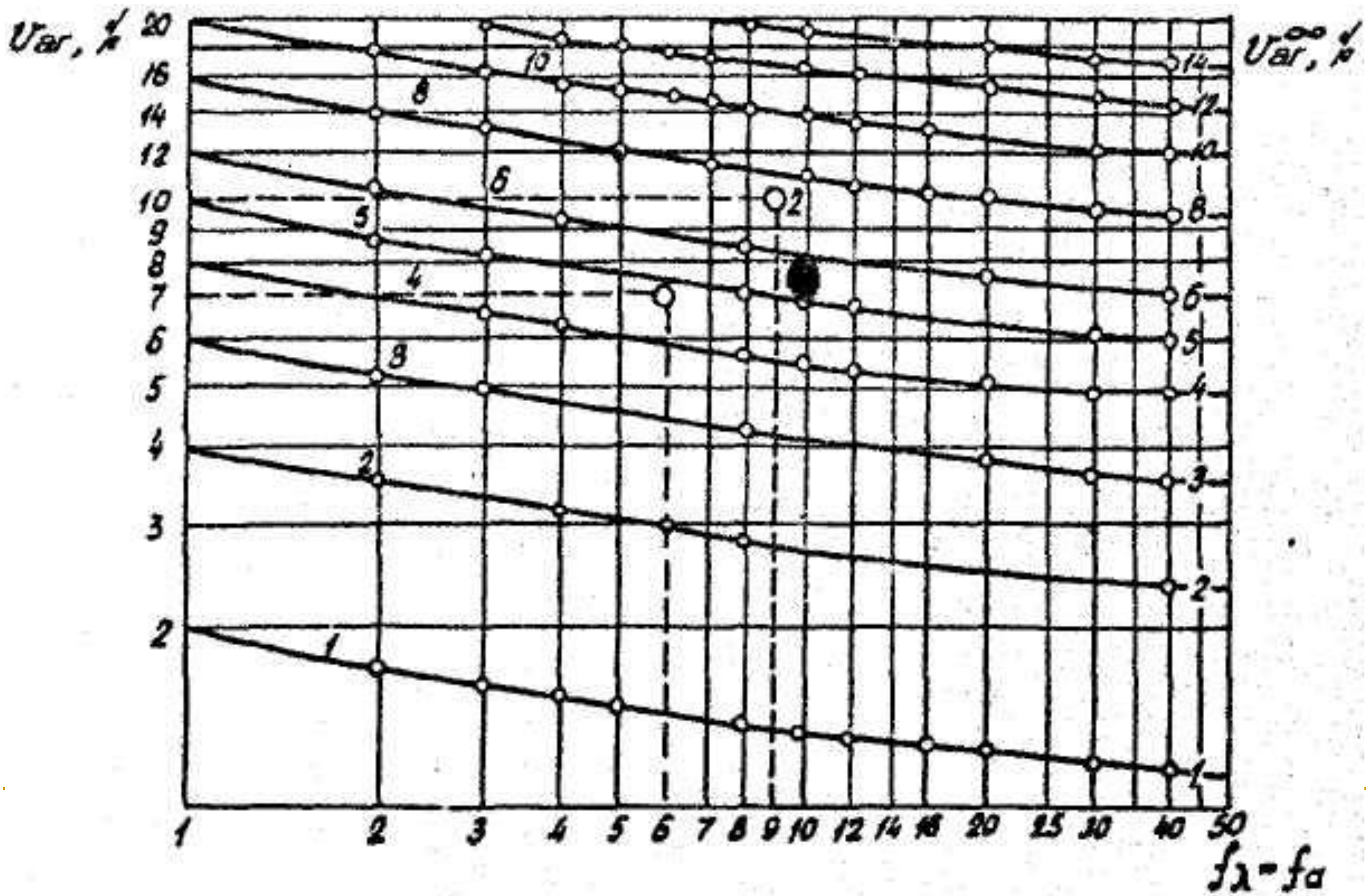
а величины y_i и y_{ai} выражают соответственно опытные и расчетные значения зависимой величины.

При числе степеней свободы $f = n_0 - n_k \to \infty$, т.е. исходя из предположения, что символ ∞ является результатом многочисленных ранее проводимых опытных исследований, имеем

$$V_\infty = S_\infty / Y_{cp},$$

$$F = S_a^2 / s_\infty^2 = \left(S_a / Y_{cp}\right)^2 / \left(S_\infty / Y_{cp}\right)^2 = V^2 / V_\infty^2.$$

Для удобства пользования зависимость $F=V^2/V^2_\infty$ можно представить графически.



На рисунке приведен график критерия Фишера, где по оси абсцисс $f_1=f_a$ откладывается число степеней свободы числителя аппроксимации, а по оси ординат — вариация аппроксимации V(%).

Кривые V(%) соответствуют верхнему пределу области $V \leq \sqrt{F_t} V_\infty$, в которой гипотеза принимается.

Математическое обеспечение для обработки результатов наблюдений и экспериментов

В пределах настоящего курса не ставилась цель показать все множество формул, процедур и программ современной прикладной математики для обработки результатов экспериментов. Ограничимся некоторыми программами, которые на практике оказались очень эффективными для решения широкого класса задач.

Для качественного анализа предлагается небольшая программа ***"ДИСПЕРСИЯ",*** *в которой решается задача дисперсионного анализа при одном признаке. Программы* ***ТОЛИНОМ"***, ***"МИНИ"***, ***"ФКВ"*** *и* ***"ФИЛЬТР"*** *служат для обработки числовых данных, а программа* ***"УРАВНЕНИЕ"*** *- для решения уравнений.*

Программа "ПОЛИНОМ"

Программа "Полином" предназначена для получения статистических (регрессионных) зависимостей $y_a=F(x_1,...,X_{HF})$ величины y_a ряда независимых величин-факторов, Эта зависимость чаще всего имеет вид многочлена

$$y_a = a_0 + \dots a_k x_k + a_{11} x_1^2 + \dots + a_{jk} x_j x_k +$$

$$+ a_{kk} x_k^2 + \dots + a_{111} x_1^3 + \dots,$$

где искомые коэффициенты a_{ij} (входящие линейно) определяются по методу наименьших квадратов.

Программа может быть использована и для нелинейных случаев при соответствующей линеаризации.

Особенность программы заключается в том, что вид многочлена (количество и тип членов) задается пользователем путем введения матрицы индексов MI.

Работа программы определяется четырьмя исходными параметрами:

числом факторов - $n_f \geq 0$

числом опытов (или наблюдений) – $n_o > 0$

числом определяемых коэффициентов - $n_k \geq 1$

числом индексов в каждом члене полинома - $n_i \geq 1$

Программа "Мини"

Программа предназначена для поиска минимума функции любого типа: линейной или нелинейной, с ограничениями или без. В программу "МИНИ" включена подпрограмма "ГРАДИЕНТ", которая позволяет решать простые случаи поиска экстремума (минимума).

Подпрограмма "Шаг"

Эта подпрограмма является основным элементом детерминированного метода, в котором происходит поиск локального минимума функции φ .

"ФКВ" - программа фильтрации исходных данных, корреляции между независимыми факторами и оценки их влияния

Часто при обработке наблюдений или экспериментальных результатов необходимо провести фильтрацию исхоных данных - элементов массива факторов x (no, nf) зависимой величины y (no). Фильтрация данных обозначает определение грубых ошибок или промахов, которые не следует учитывать при дальнейшей обработке.

Иногда при проведении наблюдений или при неправильно спланированном эксперименте имеет место сильная корреляция между "независимыми факторами. Не учет этой корреляции может привести к получению плохо обусловленной матрицы при использовании программы "ПОЛИНОМ" и искаженным выводам при любом методе обработки.

Наконец, часто бывает полезным оценивать влияние независимых переменных x (no , nf) на зависимую y (no) до подробной их обработки. Такую оценку можно осуществить при помощи дисперсионного анализа.

Таким образом, программа "ФКВ" позволяет решать задачи дисперсионного анализа и состоит из трех основных частей.

Программа «Дисперсия»

Дисперсионный анализ служит для оценки влияния на какой-то процесс факторов, которые не могут быть представлены числами.

Например, если требуется оценить точность измерения одной и той же величины различными аппаратами A, B, C,… и т.д., тогда

$$\mathbf{SC=SC_t+SC_e},$$

т.е. общая сумма квадратов отклонений равна внутригрупповой сумме квадратов сложенной с межгрупповой суммой квадратов отклонений между расчетными значениями и опытными

При помощи этой программы определяются эти суммы и критерии Фишера F

Программа "УРАВНЕНИЕ"

Эта программа служит для решения линейных или нелинейных уравнений методом половинного деления. Предлагаемый вариант построен по следующей схеме. Даны пределы области, где имеются один или более корней уравнения. Начиная с нижнего предела с заданным шагом решается уравнение на примере

y=1/x + LOC(x)-2=O.

Если знак двух последующих значений y одинаковый, ход действия продолжается еще на одни шаг. Если знак меняется, программа переходит к подпрограмме, где происходит деление шага пополам и дальнеший ход производится согласно операторам 300-400. Операция деления интервала заканчивается тогда, когда абсолютное значение величины y становится меньше допустимой ошибки.

Решаемое уравнение вводится в оператор в форме **DEF FNY = f(x)**

Программа "Фильтр"

Эта программа предназначена для решения следующей задачи. Дана запись некоторой величины у (например, траектория элемента машины в движении). Выписываем ряд значений у через равные интервалы. Этот выбор значения у назовем экспериментальными точками. Из-за вибрации ряд у имеет скачки и неровности, что требует сглаживания данных.

После сглаживания вычислить скорость и ускорения, необходимые для расчета усилий, действующих на данный элемент машины. Программа имеет два варианта сглаживания по методу наименьших квадратов.