Таблица жителей – T

0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	1	0	0
0	1	0	0	1
1	1	1	0	1

Вектор Брадобрея – D

1	0	0	1	0

Правило "Брадобрей бреет тех и только тех жителей деревни, которые не бреются сами":

$$\forall\, i\ \mathbf{D}[i] \neq \mathbf{T}\,[i, i] \qquad (*)$$

В нумерации жителей деревни Брадобрей имеет номер. Если его номер *i*, то по правилу построения таблицы T, массив D должен был бы *целиком совпадать* со строкой номер *i* таблицы T, то есть

$$\forall j\ \mathbf{D}[j] = \mathbf{T}[i, j]$$

При *j* равном *i* D[*i*] = T [*i*, *i*] – противоречие с требованием (*).
Из требования (*) следует, что строка D не может совпадать ни с одной из строк таблицы T.

Проблема зацикливания в в МНР и стандартном программировании.

Примером "бесконечного цикла" в программе на Паскале:

```
x:= 1;
repeat
{ какие-то действия, которые не изменяют значение переменной x. };
until x>10;
```

```
if z=0 then
  writeln("Не зациклится")          (A)
else
  writein("зациклится");
```

```
if z=0 then
  repeat until false                (B)
else
    writein("зациклится");
```

Определение 1. Множество X называют ***счетным***, если можно установить взаимно однозначное отображение $f: Z_0 \to X$ между множеством неотрицательных целых чисел Z_0 и множеством X.

Определение 2. Множество называют ***не более чем счетным***, если оно счетно или конечно.

Определение 3. *Перечислением* или *нумерацией* множества X называется отображение $f: Z_0 \to X$ множества Z_0 на множество X.

Перечисление f определяет на множестве X некоторую бесконечную последовательность $x_0, x_1, x_2 \ldots (x_i = f(i))$.

Если отображение f - взаимно однозначно, то f называют ***перечислением*** *или* ***нумерацией без повторений.***

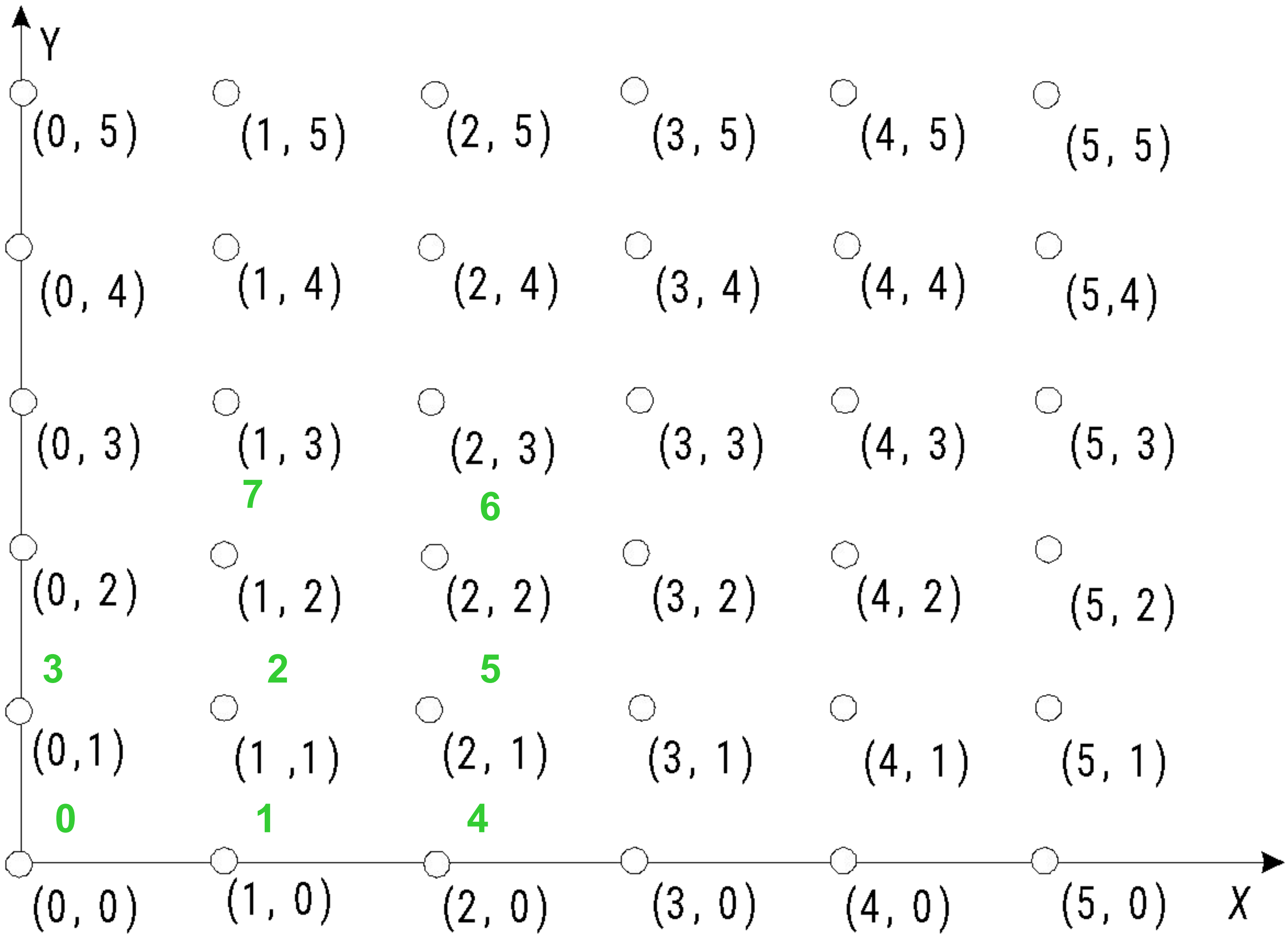
Определение 4. Множество X *называется* ***эффективно счетным***, если существует функция $f: Z_0 \to X$, устанавливающая взаимно однозначное соответствие между множествами Z_0 и X такая, что f и f^{-1} - вычислимые функции.

Теорема 1. Следующие множества являются эффективно счетными:

$$a) \quad Z_0 \times Z_0$$

$$b) \quad Z_0 \times Z_0 \times Z_0$$

$$c) \quad \boxtimes_{k>0} Z_0^k$$



Y
(0, 5)
(1, 5)
(2, 5)
(3, 5)
(4, 5)
(5, 5)
(0, 4)
(1, 4)
(2, 4)
(3, 4)
(4, 4)
(5,4)
(0, 3)
(1, 3)
(2, 3)
(3, 3)
(4, 3)
(5, 3)
7
6
(0, 2)
(1, 2)
(2, 2)
(3, 2)
(4, 2)
(5, 2)
3
2
5
(0,1)
(1 ,1)
(2, 1)
(3, 1)
(4, 1)
(5, 1)
0
1
4
(0, 0)
(1, 0)
(2, 0)
(3, 0)
(4, 0)
(5, 0)
X

$$\alpha(a_1, a_2, ..., a_k) = 2^{a_1} + 2^{a_1+a_2+1} + 2^{a_1+a_2+a_3+2} + ... + 2^{a_1+a_2+...+a_k+(k-1)} - 1$$

$$\alpha(a_1, a_2, ..., a_k) = 1\underbrace{0\ldots0}_{a_k}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{a_2}1\underbrace{0\ldots0}_{a_1} - 1$$

Однозначность:

$$(a_1, a_2, ..., a_k) \neq (b_1, b_2, ..., b_m) \Rightarrow \alpha(a_1, a_2, ..., a_k) \neq \alpha(b_1, b_2, ..., b_m)$$

$$\alpha^{-1}(x) = \alpha^{-1}((x+1)_2 - 1) = \alpha^{-1}(1\underbrace{0\ldots0}_{a_k}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{a_2}1\underbrace{0\ldots0}_{a_1} - 1) = (a_1, a_2, ..., a_k)$$

Теорема 2. Множество ***K*** команд МНР эффективно счетно.
Множество ***K*** команд МНР включает четыре типа команд *Z*(*n*), *S*(*n*), *T*(*m, n*), *J*(*m, n, q*), где $m, n, q \in N$.

Определим взаимно однозначное отображение $\beta : K \to Z_0$

$$\beta(Z(n)) = 4 \times (n - 1);$$

$$\beta(S(n)) = 4 \times (n - 1) + 1;$$

$$\beta(T(m, n)) = 4 \times \alpha_2(m-1, n-1) + 2$$

$$\beta(J(m, n, q)) = 4 \times \alpha_3(m-1, n-1, q-1) + 3$$

Теорема 3. Множество ***P*** всех программ для МНР эффективно счетно.

$P = (I_1, I_2, ..., I_s)$ - произвольная программа для МНР.

Определим взаимно однозначное отображение $\gamma : P \to Z_0$

$$\gamma(P) = \gamma(I_1, I_2, ..., I_s) = \alpha(\beta(I_1), \beta(I_2), ..., \beta(I_s))$$

Определение 5. Пусть *f* – *n*-местная функция, вычислимая по программе *P* с геделевым номером *m* = γ (*P*). Число *m* будем называть *индексом* функции *f*. Вычислимую функцию от *n* переменных с индексом *m* будем обозначать символом f_m^n.

Каждая *n*-местная вычислимая функция *f* представлена в перечислении

$f_0^n, f_1^n, f_2^n, ...$

Теорема 4. Существует невычислимая всюду определенная функция.

Доказательство. Пусть C_1 – некоторое перечисление всех вычислимых функций:

$$f_0, f_1, f_2, \dots$$

Положим

$$g(n) = \begin{cases} f_n(n)+1, & \text{если значение } f_n(n) \text{ определено}, \\ 0, & \text{если значение } f_n(n) \text{ не определено}. \end{cases}$$

Функция g отличается от любой вычислимой функции f_n в точке n. Действительно, если функция f_n определена в точке n, то $g(n) \neq f_n(n)$. Если f_n не определена в точке n, то g отличается от f_n тем, что значение $g(n)$ определено. Таким образом, $g \notin C_1$ и, следовательно, g – невычислимая всюду определенная функция.

Определение 6. ***Универсальной функцией*** для n-местных вычислимых функций называется $(n+1)$-местная функция

$$\psi_U^{(n)}(m, x_1, \ldots, x_n) = f_m^{(n)}(x_1, \ldots, x_n).$$

Для примера рассмотрим функцию $\psi_U^{(1)}$. Эта функция реализует все одноместные вычислимые функции $f_0, f_1, f_2, \cdots$. Действительно, для произвольного неотрицательного целого числа m функция $g(x) = \psi_U^{(1)}(m, x)$ совпадает с функцией $f_m^{(1)}(x)$. Таким образом, название функции $\psi_U^{(1)}$ вполне соответствует классу вычисляемых ею одноместных функций.

Вместо $\psi_U^{(1)}$ будем писать ψ_U.

Теорема 5. Для каждого натурального числа n универсальная функция $\psi_U^{(n)}$ вычислима.

Доказательство. Покажем, как можно вычислить значение функции $\psi_U^{(n)}(m, x_1, \ldots, x_n)$ для заданного числа m и фиксированного набора $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$. Неформальная процедура вычисления значения $\psi_U^{(n)}(m, x_1, \ldots, x_n)$ состоит в следующем: «Декодируйте число m и восстановите программу P_m. Затем имитируйте вычисление по этой программе. Если вычисление по программе заканчивается, требуемое значение $\psi_U^{(n)}(m, x_1, \ldots, x_n)$ содержится в регистре $\boldsymbol{R}_1$». По тезису Черча заключаем, что функция $\psi_U^{(n)}$ вычислима.

Теорема 6. Проблема «функция f_x всюду определена» неразрешима.

Доказательство. Пусть g - характеристическая функция этой проблемы

$$g(x)=\begin{cases}1, \text{ если } f_x \text{ – всюду определена,}\\ 0, \text{ если } f_x \text{ – не всюду определена.}\end{cases}$$

Нам надо показать, что функция g невычислима.

От противного, предположим, что g – вычислимая функция. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases}f_x(x)+1, \text{ если } f_x \text{ – всюду определена,}\\ 0, \text{ если } f_x \text{ – не всюду определена.}\end{cases}$$

Функция f всюду определена и отличается от каждой вычислимой функции f_x.

Применяя g и универсальную функцию ψ_U, запишем f в виде:

$$f(x)=\begin{cases}\psi_U(x,x)+1, \text{ если } g(x)=1,\\ 0, \text{ если } g(x)=0.\end{cases}$$

Из вычислимости функций g и ψ_U по тезису Черча следует вычислимость функции f.

Полученное противоречие доказывает невычислимость функции g. Таким образом, проблема «функция f_x всюду определена» неразрешима.

Теорема 7. Проблема «$x \in W_x$» неразрешима.

Доказательство. Характеристическая функция этой проблемы задается следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in W_x, \\ 0, & \text{если } x \notin W_x. \end{cases}$$

Предположим, что функция g вычислима, и приведем это предположение к противоречию. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin W_x \text{ (т.е. если } g(x) = 0), \\ \text{не определена}, & \text{если } x \in W_x \text{ (т.е. если } g(x) = 1). \end{cases}$$

Так как функция g вычислима, то по тезису Черча функция f также вычислима. С другой стороны, для любого x область определения $Dom(f)$ функции f отлична от области определения W_x, и, следовательно, $f \neq f_x$. Таким образом, предположение о вычислимости характеристической функции g неверно. Поэтому проблема «$x \in W_x$» неразрешима.

s-m-n-теорема

Допустим, что $f(x, y)$ - вычислимая функция. Для каждого фиксированного значения a переменной x функция f порождает одноместную вычислимую функцию $g_a(y) = f(a, y)$. Из вычислимости функции g_a следует существование индекса b такого, что $f(a, y) = f_b(y)$. Оказывается индекс b можно эффективно вычислить по параметру a.

Теорема 8.(*s-m-n-теорема*, простая форма). Пусть $f(x, y)$ - вычислимая функция. Существует всюду определенная вычислимая функция $s(x)$, такая, что $f(x, y) = f_{s(x)}(y)$.

Доказательство. Из вычислимости функции $f(x, y)$ следует существование МНР-программы P, которая, исходя из начальной конфигурации $(x, y, 0, 0, ...)$, вычисляет значение функции f от двух аргументов x и y. Изменим программу P, добавив команды, преобразующие начальную конфигурацию

R_1	R_2	R_3	R_4	...	
y	0	0	0	...	

(*)

в конфигурацию

R_1	R_2	R_3	R_4	...	
a	y	0	0	...	

следующим образом:

$$\begin{array}{l} T(1,2) \\ Z(1) \\ \left.\begin{array}{c} \mathbf{S(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{S(1)} \end{array}\right\} a \text{ раз} \end{array}$$

Новая программа P_1, примененная к начальной конфигурации (*), вычисляет значение функции $g_a(y) = f(a, y)$ от одного аргумента y.

Теперь рассмотрим функцию $s(a) = \gamma(P_1)$, сопоставляющую произвольному неотрицательному целому числу a геделев номер программы P_1. Функция s всюду определена и по тезису Черча вычислима. Кроме того, по построению $f_{s(a)}(y) = f(a, y)$ для каждого $a \in Z_0$.

s-m-n-теорему называют также *теоремой параметризации*, поскольку она позволяет по заданной вычислимой функции $f(x, y)$ и фиксированному параметру a найти геделев номер $s(a)$ программы, вычисляющей функцию $f_{s(a)}(y) = f(a, y)$.

Теорема 8. (*s-m-n-теорема*). Пусть m, n – натуральные числа, $f_a(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ - вычислимая функция с геделевым номером a. Существует всюду определенная вычислимая функция $s_n^m(a, x_1, \ldots, x_m)$ такая, что

$$f_a(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = f_{s_n^m(a, x_1, \ldots, x_m)}(y_1, \ldots, y_n).$$

Доказательство сформулированного утверждения аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Название теоремы связано с обозначением s_n^m для функций в формулировке теоремы.

МЕТОД СВОДИМОСТИ

Пусть в результате некоторых рассуждений удалось показать, что решение проблемы Pr_1 приводит к решению другой проблемы Pr_2. В этом случае говорят, что проблема Pr_2 *сводится* к проблеме Pr_1. Таким образом, если проблема Pr_2 сводится к проблеме Pr_1, то из разрешимости Pr_1 следует разрешимость Pr_2 и, наоборот, из неразрешимости Pr_2 следует неразрешимость Pr_1.

Теорема 9. Проблема «$y \in W_x$» неразрешима.

Доказательство. Если бы проблема «$y \in W_x$» была разрешима, то была бы разрешима более простая проблема «$x \in W_x$», что противоречит доказанной выше теореме.

Проблему *«$x \in W_x$»* называют также ***проблемой самоприменимости***. Такое название связано с формулировкой проблемы в форме: «Остановится ли МНР, работая по программе с начальной конфигурацией (x)?». Другими словами: «Применима ли программа к своему кодовому номеру?».
Теорему 9 часто интерпретируют как утверждение о неразрешимости ***проблемы остановки***, в которой говорится, что не существует общего метода, устанавливающего, остановится ли некоторая конкретная программа, запущенная с некоторым конкретным набором начальных данных.
Смысл этого утверждения для теоретического программирования очевиден: ***не существует общего метода проверки программ на наличие в них бесконечных циклов.***

Теорема 10. Проблема «$f_x = 0$» неразрешима.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } \ x \in W_x, \\ \text{не определена , если } x \notin W_x \end{cases}$$

По тезису Черча функция $f(x, y)$ вычислима. Отсюда по *s-m-n*-теореме вытекает существование всюду определенной вычислимой функции *s(x)* такой, что $f(x, y) = f_{s(x)}(y)$. По определению функции $f(x, y)$ имеем:

$$x \in W_x \Leftrightarrow f_{s(x)}(y) = 0 .$$

Следовательно, истинность условия $x \in W_x$ можно установить, определив справедливость равенства $f_{s(x)}(y) = 0$. Тем самым мы свели проблему «$x \in W_x$» к проблеме «$f_x = 0$». Поскольку первая из них неразрешима, то неразрешима и вторая.

Теорема 11. Проблема $f_x = f_y$ неразрешима.

Доказательство. Допустим, что проблема $f_x = f_y$ разрешима. Тогда разрешима и проблема $f_x = f_c$, где c – индекс 0-функции $(f_c = 0)$. Однако, это противоречит теореме 10. Таким образом, проблема $f_x = f_y$ неразрешима.

Из теоремы 11 следует, что ***вопрос о том, вычисляют ли две программы одну и ту же одноместную функцию, неразрешим.***

Теорема 12 (*теорема Райса*). Пусть B - непустое множество одноместных вычислимых функций, не совпадающее со всем множеством C_1 одноместных вычислимых функций. Тогда проблема « $f_x \in B$ » неразрешима.

Доказательство. Очевидно, что проблема « $f_x \in B$ » разрешима тогда и только тогда, когда разрешима проблема « $f_x \in C_1 \setminus B$ ». Поэтому без потери общности можно считать, что нигде не определенная функция $f_{\varnothing}$ не принадлежит B.

Выберем некоторую функцию $g \in B$ и рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} g(y), & \text{\textit{если} } x \in W_x, \\ \text{\textit{не определена}}, & \text{\textit{если} } x \notin W_x. \end{cases}$$

По тезису Черча функция $f(x, y)$ вычислима. Поэтому существует (по *s-m-n*-теореме) всюду определенная вычислимая функция $s(x)$ такая, что $f(x,y) = f_{s(x)}(y)$.

По определению функции $f(x, y)$ имеем:

$$x \in W_x \Rightarrow f_{s(x)} = g, \text{т.е. } f_{s(x)} \in B,$$

$$x \notin W_x \Rightarrow f_{s(x)} = f_{\varnothing}, \text{т.е. } f_{s(x)} \notin B. \cdot$$

Таким образом, с помощью вычислимой функции $s(x)$ мы свели проблему «$x \in W_x$» к проблеме «$f_x \in B$». Следовательно, проблема «$f_x \in B$» неразрешима.

Содержательная формулировка теоремы Райса.

Пусть Q некоторое свойство одноместных вычислимых функций. Свойство Q назовем *нетривиальным*, если существуют функции, обладающие свойством Q, и функции, не обладающие этим свойством.

Примеры нетривиальных свойств:

- функция тождественно равна нулю;
- функция нигде не определена;
- функция всюду определена;
- функция взаимно однозначна;
- функция определена при $x = 0$.

Теорема 12а. Каково бы ни было нетривиальное свойство Q одноместных вычислимых функций, задача распознавания этого свойства алгоритмически неразрешима.

Доказательство. Пусть B - множество одноместных вычислимых функций, обладающих свойством Q. Множество B не пусто и не совпадает со всем множеством одноместных вычислимых функций. По теореме Райса проблема «$f_x \in B$» неразрешима.

Из последней теоремы следует неразрешимость многих задач, связанных с программированием. Если имеется некоторая программа, то по ней ничего нельзя сказать о функции, реализуемой программой. По двум программам нельзя установить, реализуют ли они одну и ту же функцию, а это приводит к неразрешимости многих задач, связанных с эквивалентными преобразованиями и минимизацией программ. В любом алгоритмическом языке, какие бы правила синтаксиса там ни применялись, всегда будут иметься «бессмысленные» программы, задающие функции не определенные ни в одной из точек (эти программы нельзя обнаружить).