1. КИНЕМАТИКА

1.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Кинематикой называют раздел механики, изучающий способы (не причины!) описания движений и связь между величинами, характеризующими эти движения.

МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ:

Материальная точка (МТ) – любой объект, формой и размерами которого в данной задаче (в данных условиях) можно пренебречь;

Набор конечного числа материальных точек – достаточно общая модель произвольной механической системы.

Абсолютно твёрдое тело (АТТ) – тело, форма и размеры которого при наличии тех воздействий, что описаны в условиях задачи, могут считаться неизменными. АТТ можно рассматривать как набор материальных точек с неизменными расстояниями между ними.

Система отсчета - тело отсчёта, жёстко связанная с ним система координат и часы

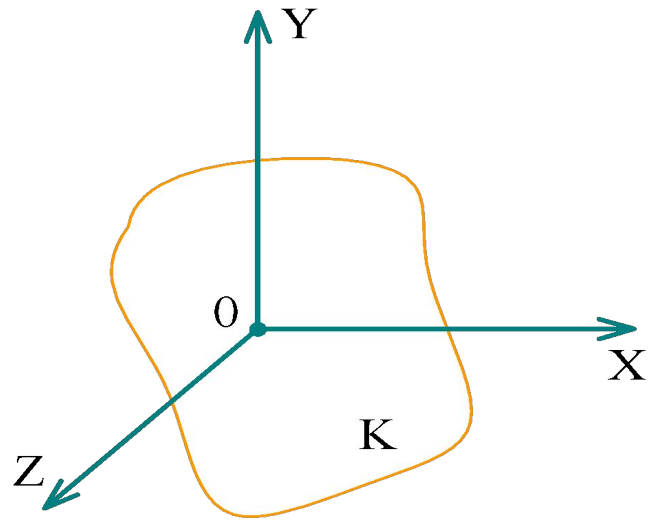

Рис. 1. 1

O – начало координат (начало отсчёта); K – название системы отсчёта

Положение ***МТ*** в пространстве в определённый момент времени задаётся тремя её координатами (например, декартовыми) или радиус-вектором :

$$r_x = x\,,\; r_y = y,\; r_z = z\;. \qquad (1.1)$$

При движении МТ её координаты становятся функциями времени:

$$x = x(t),\; y = y(t),\quad z = z(t). \qquad (1.2\ а,\ б,\ в)$$

Аналогично,

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \qquad (1.3)$$

Закон движения МТ – правило, по которому можно определить её положение в любой момент времени.

P.S. Закон движения (1.2 а, б, в) можно рассматривать как уравнения траектории, заданной в параметрическом виде (в роли параметра t).

ОСНОВНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ДВИЖЕНИЕ МТ (m)

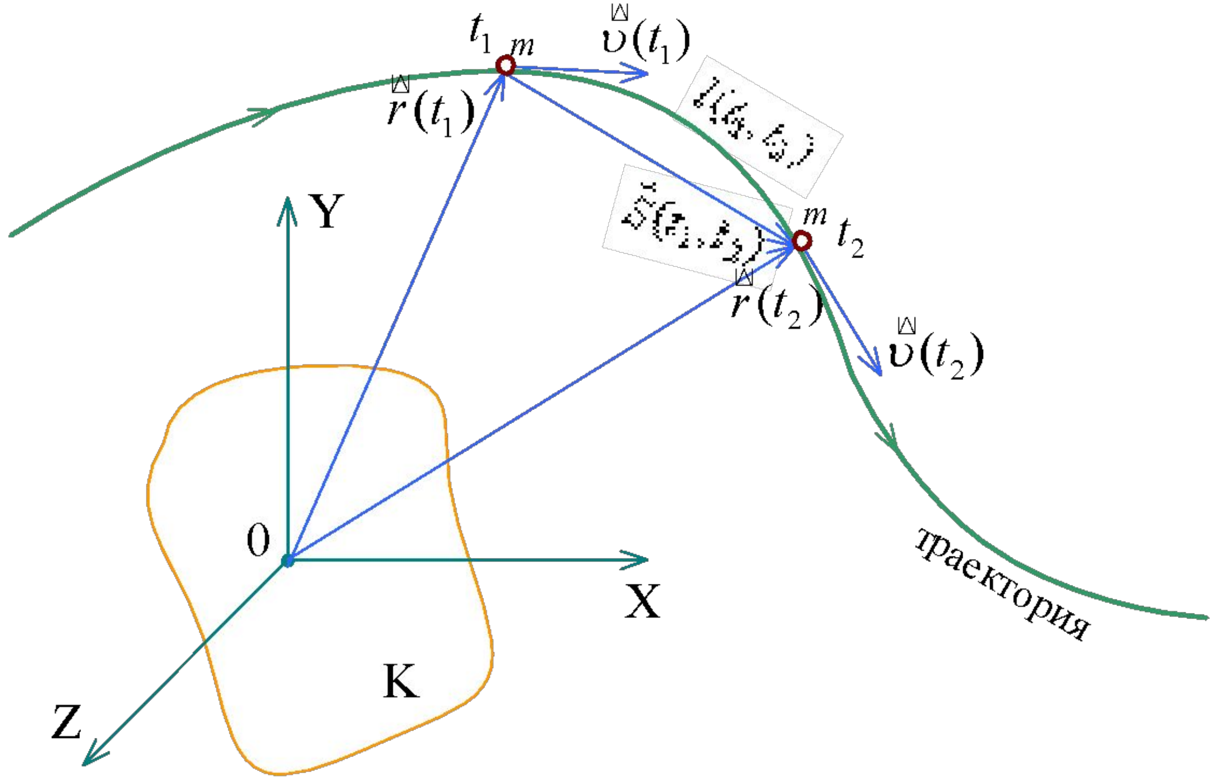

Рис.1.2

$\vec{r}(t_1)$ – радиус-вектор в момент t_1, $\vec{r}(t_2)$ – в момент t_2,

$\vec{s}(t_1, t_2)$ – перемещение за промежуток времени (t_1, t_2)

$l(t_1, t_2)$ – путь за (t_1, t_2) (длина отрезка траектории),

$\vec{\upsilon}(t_1)$ – мгновенная скорость в момент времени t_1,

$\vec{\upsilon}(t_2)$ – мгновенная скорость в момент t_2.

PS. Векторы скорости $\vec{\upsilon}(t_1)$ и $\vec{\upsilon}(t_2)$ – касательные к траектории.

Очевидно:

$$\vec{s}(t_1, t_2) = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \equiv \Delta\vec{r}$$

При малых $\Delta t \equiv t_2 - t_1$ очевидно, что

$$\boxed{|\vec{s}(t_1,t_2)| \approx l(t_1,t_2).}$$

Средняя скорость

$$\boxed{\vec{\upsilon}_{cp}(t_1,t_2) \equiv \frac{\vec{s}(t_1,t_2)}{t_2 - t_1} \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$$

Мгновенная скорость

$$\boxed{\vec{\upsilon}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \vec{\upsilon}_{cp}(\mathrm{t}, \mathrm{t} + \Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$$

PS. Другой вид математической записи («точка» обозначает производную по времени)

$$\boxed{\vec{\upsilon}(t) \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}}$$

Средняя путевая скорость

$$\boxed{\upsilon_{cp}^{(l)} \equiv \frac{l(t_1,t_2)}{t_2 - t_1} \equiv \frac{\Delta l}{\Delta t}}$$

$\Delta l \equiv l(t_2,t_1)$ *– путь, пройденный за* $\Delta t \equiv t_2 - t_1$. При $\Delta t \to 0$ получаем:

Мгновенная путевая скорость (при $\Delta t \to 0$):

$$\boxed{\upsilon^{(l)} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t}} \qquad \boxed{\upsilon^{(l)} \equiv \frac{dl}{dt}}$$

$$\left|\vec{\upsilon}\right| \equiv \upsilon \qquad\qquad \upsilon^{(l)} = \upsilon$$

Среднее ускорение за промежуток времени (t_1, t_2):

$$\boxed{\vec{a}_{cp}(t_1, t_2) \equiv \frac{\vec{\upsilon}(t_2)\text{-}\vec{\upsilon}(t_1)}{t_2\text{-}t_1} \equiv \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}}$$

Мгновенное ускорение (в момент t):

$$\boxed{\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \equiv \dot{\vec{\upsilon}}}$$

Очевидно:

$$\vec{a} \equiv \ddot{\vec{r}} \equiv \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

PS.**1.** Если закон движения задан, например, известна зависимость $\vec{r}(t)$, то мы имеем о движении **полную информацию**, и все величины, определённые равенствами (1.6) – (1.14) легко вычисляются, точно так же, как и их проекции на декартовы оси.

PS.**2** Переход $\vec{r}(t) \to \vec{\upsilon}(t)$ и $\vec{\upsilon}(t) \to \vec{a}(t)$ выполняется с помощью дифференцирования.

Обратно: $\vec{\upsilon}(t) \to \vec{r}(t)$, $\vec{a}(t) \to \vec{\upsilon}(t)$ выполняется с помощью интегрирования.

Чтобы найти $\vec{r}(t)$ по заданной $\vec{\upsilon}(t)$, необходимо знать начальное значение $\vec{r}_0 \equiv \vec{r}(0)$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{\upsilon}(t')dt' = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{\upsilon}(t')dt'$$

Аналогично:
$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}(0) + \int_0^t \vec{a}(t')dt' = \vec{\upsilon}_0 + \int_0^t \vec{a}(t')dt'$$

Пример 1.

Пусть МТ движется с $\vec{a} = const$. Тогда можно найти $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t$

Интегрируя ещё раз, получаем закон движения: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \dfrac{\vec{a}t^2}{2}$

Это равенства, связывающие кинематические величины в общем случае, т.е. при произвольном движении МТ.

Пример 2. (из школьной жизни!). Прямолинейное равноускоренное движение.

$$2as = \upsilon^2 - \upsilon_0{}^2;$$
$$s = \upsilon_0 t + at^2/2;$$
$$\upsilon = \upsilon_0 + at;$$
$$a = const.$$

Очевидно, что

$$\upsilon = s'(t);$$
$$a = \upsilon'(t) = s''(t).$$

Векторные равенства можно записать в проекциях на оси координат:

$$(\upsilon_x)_{cp} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \qquad (1.20а,б)$$

$$(a_x)_{cp} = \frac{\Delta \upsilon_x}{\Delta t}, \quad a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt}, \qquad (1.21а,б)$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \upsilon_x(t')dt' \qquad (1.22)$$

$$\upsilon_x(t) = \upsilon_{0x} + \int_0^t a_x(t')dt' \qquad (1.23)$$

и т.д.

1.2. КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ.

УСКОРЕНИЕ ПРИ КРИВОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ: ТАНГЕНЦИАЛЬНОЕ И НОРМАЛЬНОЕ УСКОРЕНИЯ.

$$\boxed{\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \equiv \dot{\vec{\upsilon}}}$$

Очевидно, при криволинейном движении ускорение материальной точки отлично от нуля, т. к. вектор скорости изменяется по ***величине*** и по ***направлению***.

Представим вектор скорости МТ в виде $\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{\tau}$ где $|\vec{\tau}| = 1$

т.е. $\vec{\tau}$ – единичный вектор, направленный по скорости $\vec{\upsilon}$

Продифференцируем уравнение $\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{\tau}$

$$\boxed{\vec{a} \equiv \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt}}$$

Обозначим:

$$\boxed{\vec{a}_\tau \equiv \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}}$$

$$\boxed{\vec{a}_n \equiv \upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt}}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n}$$

Первое слагаемое $\vec{a}_\tau$ – ***касательное*** или ***тангенциальное*** ускорение:

$$\vec{a}_\tau \uparrow\uparrow \vec{\upsilon} \quad \text{при} \quad d\upsilon/dt > 0$$

$$\vec{a}_\tau \uparrow\downarrow \vec{\upsilon} \quad \text{при} \quad d\upsilon/dt < 0$$

Второе слагаемое - $\vec{a}_n$ называется ***нормальной составляющей***

она нормальна, т.е. перпендикулярна, к вектору скорости (см. ниже!).

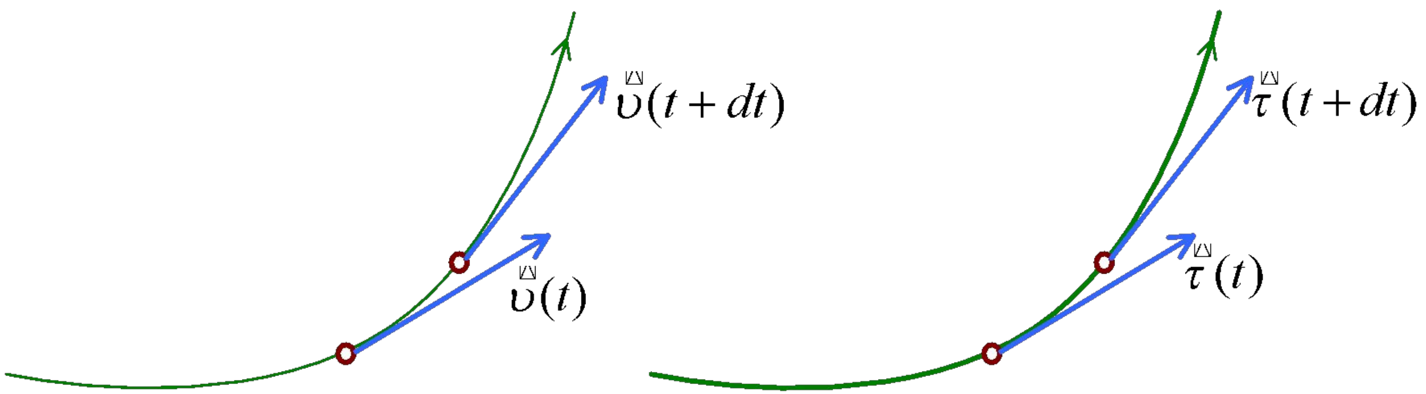

Рис.1.3

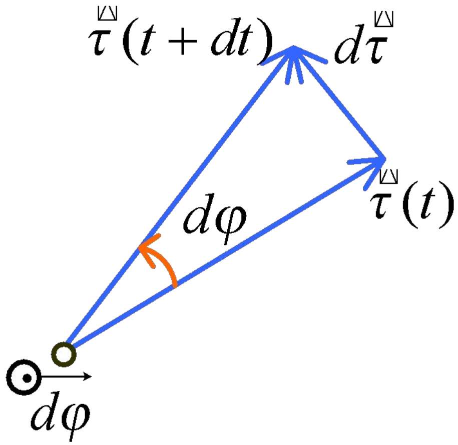

Рис.1.4

Можно считать: $d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}(t)$

Рассматривая этот треугольник как бесконечно малый сектор, имеем $\dfrac{|d\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}|} = |d\varphi|$

Но $|\vec{\tau}| = 1$. Отсюда $|d\vec{\tau}| = |d\varphi|$

Если ввести бесконечно малый вектор поворота $\overrightarrow{d\varphi}$, направление которого указано на рисунке 1.4 – «к нам», – то будем иметь с учётом (1.31) и (1.33):

$$d\vec{\tau} = \left[\overrightarrow{d\varphi}, \vec{\tau}\right] \quad (1.34)$$

Таким образом, (см. (1.31), (1.28)),

$$\vec{a}_n \perp \vec{\upsilon} \quad (1.35)$$

Следовательно, равенство (1.29) – разложение вектора ускорения на две взаимно перпендикулярные составляющие.

Далее, $\vec{a}_n$ можно представить в виде

$$\vec{a}_n = \upsilon\left[\frac{\overrightarrow{d\varphi}}{dt}, \vec{\tau}\right] = \left[\frac{\overrightarrow{d\varphi}}{dt}, \vec{\upsilon}\right] \quad (1.36)$$

Направления $\vec{a}_\tau$, $\vec{a}_n$, $\vec{a}$ в случае $d\upsilon/dt > 0$ показаны на рисунке 1.5.

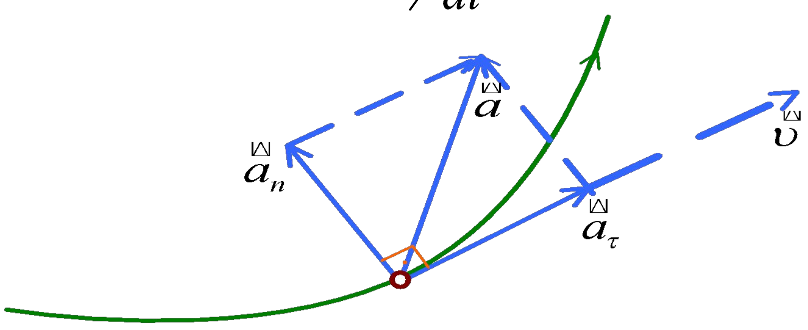

Рис.1.5

Если считать малый отрезок криволинейной траектории частью окружности, то величина

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \qquad (1.37)$$

называется **вектором угловой скорости**.

Вектор $\vec{\omega}$ определяет как направление поворота, так и величину угла поворота радиуса-вектора за единицу времени.

Направление движения МТ по окружности и направление $\vec{\omega}$ связаны **правилом буравчика**.

1.3 НЕРАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПО ОКРУЖНОСТИ. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ И УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЛИНЕЙНЫМИ И УГЛОВЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ. РАДИУС КРИВИЗНЫ ПЛОСКОЙ ТРАЕКТОРИИ.

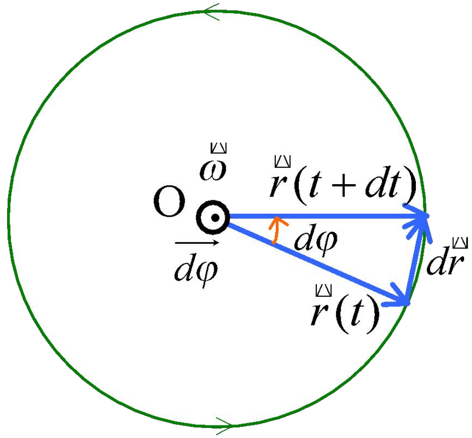

Рис.1.6

PS. $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t) \neq const.$

При движении против часовой стрелки $\vec{\omega}$ направлена «к нам»

по часовой – «от нас»

За время dt радиус-вектор $\vec{r}$ изменится на $d\vec{r}$: $\boxed{\vec{r}(t)} \Rightarrow \boxed{\vec{r}(t+dt)}$

Используя аналогию треугольников: $\boxed{d\vec{r} = \left[\overrightarrow{d\varphi}, \vec{r}\right]}$

Поделив обе части на dt, будем иметь

$$\boxed{\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}, \vec{r}]}$$

Дифференцируя, находим ускорение:

$$\boxed{\vec{a} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}\right] + [\vec{\omega}, \vec{\upsilon}]}$$

Второе слагаемое есть нормальное ускорение:

$$\boxed{[\vec{\omega}, \vec{\upsilon}] = \vec{a}_n}$$

Тогда первое, очевидно, равно : $\vec{a}_\tau$

$$\boxed{\vec{a}_\tau = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}\right]}$$

Введём новое определение: **угловым ускорением** МТ назовём величину

$$\boxed{\vec{\varepsilon} \equiv \frac{d\vec{\omega}}{dt}}$$

Теперь ускорение:

$$\boxed{\vec{a} = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}, \vec{r}]]}$$

Двойное векторное произведение вычислим по известной математической формуле

, $$[\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$$

что даёт $$[\vec{\omega}[\vec{\omega}, \vec{r}]] = \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega}, \vec{\omega})$$

Учитывая, что $\vec{\omega} \perp \vec{r}$, получаем: $$[\vec{\omega}[\vec{\omega}, \vec{r}]] = -\omega^2 \vec{r}$$

Таким образом, в разложении: $$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

слагаемые имеют вид: $$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] \qquad \vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r}$$

Нормальная составляющая ускорения – это хорошо известное из школьного курса **центростремительное ускорение**.

Ускорение материальной точки , движущейся по окружности, называют также **полным ускорением**.

Рассмотрим **аналогию** между ускоренными **прямолинейным** и **криволинейным** движениями (на примере МТ, движущейся по окружности)

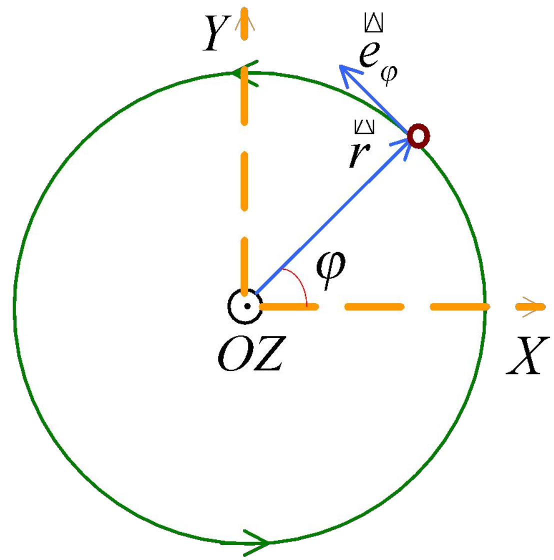

Рис.1.7

Ось OZ направлена «к нам», $\vec{e}_\varphi$ *– единичный вектор, указывающий направление отсчёта положительных углов, которое связано с направлением OZ правилом буравчика*

Для движения вдоль оси *OX* имеем

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} \qquad a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Для движения по окружности: $\boxed{\omega_z = \dfrac{d\varphi}{dt}}$ $\boxed{\varepsilon_z = \dfrac{d\omega_z}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}}$

Равнопеременное движение вдоль оси описывается равенствами:

$$\boxed{a_x = const}$$

$$\boxed{\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t}$$

$$\boxed{x = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}}$$

$$\boxed{\Delta x = \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}}$$

Равнопеременное движение по окружности:

$$\boxed{\varepsilon_z = const}$$

$$\boxed{\omega_z = \omega_{0z} + \varepsilon_z t}$$

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2}}$$

$$\boxed{\Delta\varphi = \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2}}$$

где $\Delta\varphi$ – угловое перемещение материальной точки

Таблица соответствия линейных и угловых величин

линейные	$d\vec{r}$	$\vec{\upsilon}$	$\vec{a}_\tau$	x	υ_x	a_x
угловые	$\overrightarrow{d\varphi}$	$\vec{\omega}$	$\vec{\varepsilon}$	φ	ω_z	ε_z

Уравнения, связывающие линейные и угловые переменные, характеризующие движение МТ по окружности $(|\vec{r}| = R)$:

$$d\vec{r} = \left[\overrightarrow{d\phi}, \vec{r}\right], \quad |d\vec{r}| = \left|\overrightarrow{d\varphi}\right| \cdot R \qquad (1.55а, б)$$

$$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}, \vec{r}], \quad \upsilon = \omega R; \quad \upsilon_\varphi = \omega_z R \qquad (1.56а, б, в)$$

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}], \quad a_\tau = \varepsilon R; \quad a_\varphi = \varepsilon_z R \qquad (1.57а, б, в)$$

Здесь $\upsilon_\varphi, a_\varphi$ – проекции скорости и ускорения на вектор $\vec{e}_\varphi$,

$$|\upsilon_\varphi| = \upsilon; \quad |a_\varphi| = |\vec{a}_\tau| \qquad (1.58 а, б)$$

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r}, \quad a_n = \omega^2 R = \frac{\upsilon^2}{R} \qquad (1.59 а, б)$$

Малую окрестность точки плоской криволинейной траектории материальной точки можно рассматривать как малую дугу некоторой окружности. Радиус этой окружности – **радиус кривизны траектории** в окрестности данной точки, $R_{кр}$. Эта величина удовлетворяет равенству аналогичному (1.59 б).

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R_{кр}}. \qquad (1.60)$$