РАБОТА, МОЩНОСТЬ, МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

3.1. Работа силы. Мощности средняя и мгновенная.

Работой постоянной силы $\vec{F} = const$ (над материальной точкой) на перемещении $\vec{S}(t_1, t_2)$ называется величина

$$A \equiv \vec{F} \cdot \vec{S} \quad . \qquad (1\ а)$$

[А]=Н·м ≡ Дж.

Раскрывая скалярное произведение, получим

$$A \equiv \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cos\alpha \quad , \qquad (1\ б)$$

где $\alpha \equiv \left(\vec{F} \,\hat{,}\, \vec{S}\right)$ – угол между силой и перемещением.

PS1. Определение работы **данной** силы, действующей на материальную точку, не зависит от того, сколько вообще сил на нее действуют.

PS2. Если рассматривать перемещение $\vec{S}$ материальной точки как сумму последовательных перемещений $\vec{S}_1, \vec{S}_2, ..., \vec{S}_n$,

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \vec{S}_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta\vec{r}_i \quad (2)$$

то работа на перемещении $\vec{S}$ представится также в виде суммы:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \quad (3)$$

где

$$A_i = \vec{F} \cdot \vec{S}_i = \vec{F}\Delta\vec{r}_i \quad (4)$$

– работа силы $\vec{F}$ на *i*-м перемещении.

Таким образом, ***работа величина <u>скалярная</u> и обладает свойством <u>аддитивности</u>.***

Если сила $\vec{F}$ зависит от положения материальной точки $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, то простое определение работы (1) теряет смысл.

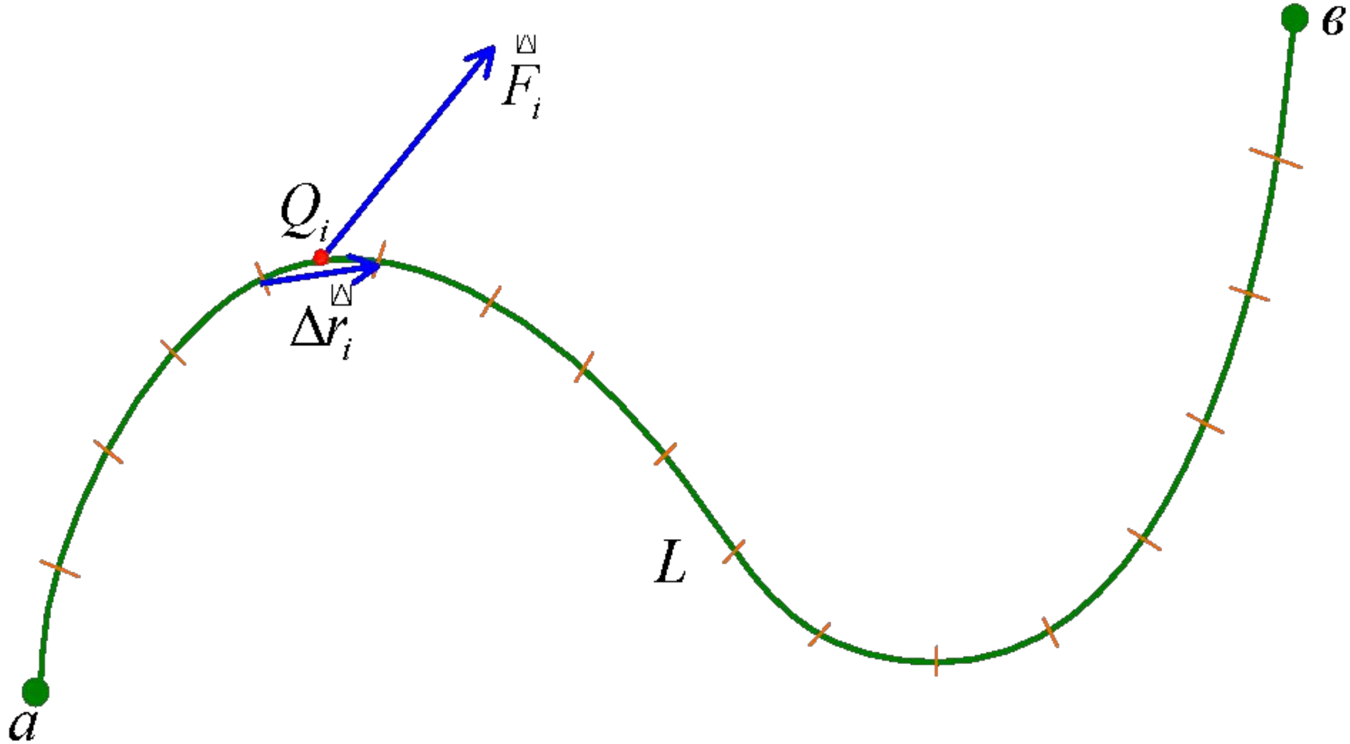

Рис. 3.1

Точное **определение работы неоднородной силы** $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ может быть записано через криволинейный интеграл вдоль кривой L между точками ***а*** и ***в***.

$$A \equiv \int_L \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r} \quad (5)$$

Под знаком интеграла в (5) $\vec{F}(\vec{r})$ – сила, действующая на материальную точку в точке Q кривой L с радиусом-вектором $\vec{r}$, $d\vec{r}$ – бесконечно малое перемещение материальной точки из точки Q за бесконечно малый промежуток времени – dt (см. рис. 3.1).

Отметим, что при $\vec{F} = const$ из (5) получается выражение (1).

Средней за промежуток времени ($\Delta t = t_2 - t_1$ **) мощностью силы** называется величина

$$N_{ср} \equiv \frac{A}{\Delta t}, \quad (6)$$

где *A* – работа любой силы за промежуток времени ($\Delta t = t_2 - t_1$).

Мгновенной мощностью любой силы называется величина

$$N \equiv \frac{\delta A}{dt}. \qquad (7)$$

Физический смысл мощности – работа, совершаемая за единицу времени, *[N]= Дж/с = Вт*.

Используя выражение (7) и (1), можно получить

$$N = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}. \qquad (8)$$

Отсюда, в частности, видно, что **сила, перпендикулярная скорости**, **имеет нулевую мощность и работы не совершает**. Поэтому центростремительная сила работы не совершает. К ней относится и сила Лоренца.

Если на материальную точку действуют две или несколько сил и $\vec{F}$ – сумма действующих сил,

$$\vec{F} = \sum_{\kappa} \vec{F}_{\kappa} \quad , \qquad (9)$$

то из определения (5) следует, что работа силы $\vec{F}$ должна вычисляться как сумма работ сил $\vec{F}_{\kappa}$:

$$A_F = \sum_{\kappa} A_{F\kappa} \quad . \qquad (10)$$

Мощности сил также складываются:

$$N_F = \sum_{\kappa} N_{F\kappa} \quad . \qquad (11)$$

3.2. Кинетическая энергия системы. Теорема о кинетической энергии.

Кинетической энергией материальной точки называется величина

$$k \equiv \frac{m\upsilon^2}{2} \quad , \qquad (12)$$

где m – масса МТ, υ – модуль скорости материальной точки; *[k] = Дж*.
Кинетической энергией механической системы (набор материальных точек) называется величина

$$K \equiv \sum k_i \qquad (13)$$

где k_i – кинетическая энергия *i*-й материальной точки; *i*=1, 2,…, *n*.

Найдем связь между изменением кинетической энергии материальной точки за некоторый промежуток времени и работой, действующих на нее сил.

Перепишем уравнение движения МТ в виде

$$m d\vec{\upsilon} = \vec{F} dt \quad , \tag{14}$$

где $\vec{F}$ – сумма сил, действующих на МТ.

Умножим уравнение (14) на вектор скорости $\vec{\upsilon}$ скалярно:

$$m\vec{\upsilon} d\vec{\upsilon} = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon} dt \quad . \tag{15}$$

Рассмотрим левую и правую части (15) отдельно.

Во-первых, отметим математический факт:

$$d(\upsilon^2) = d(\vec{\upsilon} \cdot \vec{\upsilon}) = 2\vec{\upsilon} d\vec{\upsilon} \quad .$$

Отсюда следует, что изменение кинетической энергии МТ выражается так:

$$d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = m\vec{\upsilon} d\vec{\upsilon} \quad . \tag{16}$$

Таким образом, левая часть (15) – это величина dk

Правую же часть равенства можно записать в виде

$$\vec{F} \cdot \vec{\upsilon} dt = N dt \quad , \tag{17}$$

где N – мощность силы $\vec{F}$ (сумма мощностей всех сил, действующих на МТ).

Равенство (15) перепишем в форме

$$dk = \delta A \qquad . \qquad (18)$$

Здесь δA – сумма работ любых сил, действующих на МТ, за промежуток времени dt .

Проинтегрировав (18) по промежутку (t_1, t_2), получаем

$$\Delta k(t_1, t_2) = A(t_1, t_2) \qquad . \qquad (19)$$

Равенство (19) называют ***теоремой о кинетической энергии*** *для материальной точки: изменение кинетической энергии МТ за некоторый промежуток времени равно сумме работ действующих на МТ сил.*

Записав равенство (19) для каждой материальной точки, входящей в состав механической системы,

$$\Delta k_i(t_1, t_2) = A_i(t_1, t_2) \qquad (20)$$

и просуммировав *n* равенств (20), получаем для системы:

$$\Delta K(t_1, t_2) = A_\Sigma(t_1, t_2) \qquad , \qquad (21)$$

т.е. **изменение кинетической энергии механической системы** (за некоторый промежуток времени **равно сумме работ всех сил, действующих на систему.**

3.3. Консервативные и неконсервативные силы. Потенциальная энергия. Примеры консервативных сил.

Пусть в некоторой области существует статическое силовое поле. На МТ в этой области действует сила $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, зависящая от положения материальной точки.

Сила $\vec{F}$ называется **консервативной**, если работа силы над материальной точкой при ее перемещении из точки ***а*** в точку ***в*** не зависит от формы траектории, соединяющей ***а*** и ***в***, а определяется только начальным (***а***) и конечным (***в***) положениями материальной точки (см. рис. 3.3).

Математически это свойство записывается в виде

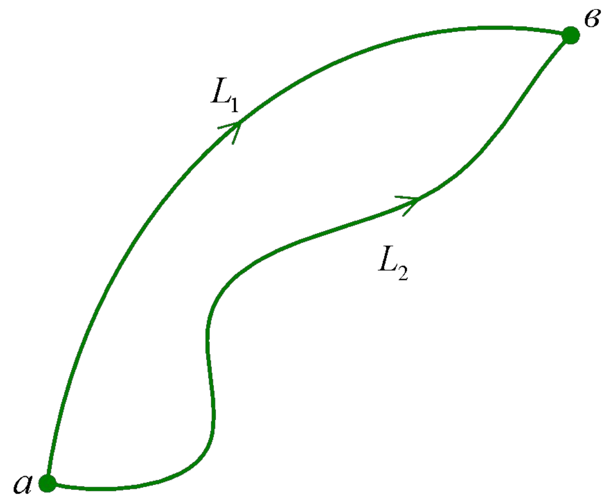

Рис. 3.3

$$\int_{L_1} \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = \int_{L_2} \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = A(\vec{r}_a, \vec{r}_в) \qquad . \qquad (22)$$

Работа силы $\vec{F}(\vec{r})$ при движении МТ вдоль кривой из ***а*** в ***в*** и работа на той же кривой при движении из ***в*** в ***а*** отличаются знаками,

$$\int_{L_1(в \to a)} \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = -\int_{L_1(a \to в)} \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} \qquad . \qquad (23)$$

С учетом этого, сила $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ называется **консервативной**, если ее **работа** над материальной точкой **на любом замкнутом контуре** L **равна нулю**, т.е.

$$\oint_L \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = 0 \qquad (24)$$

Любой замкнутый контур отмечен кружком на интеграле.

Интеграл (24) называется **циркуляцией** вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру L.

Интегрирование (24) в конечных пределах изменения консервативной силы позволяет ввести понятие изменения $\Pi(\vec{r})$ потенциальной энергии МТ

$$\Pi(\vec{r}_a) - \Pi(\vec{r}_в) = \int_a^в \vec{F}d\vec{r} \qquad (25)$$

Понятие (25) можно переписать в упрощенной форме

$$A_{конс} = -\Delta\Pi \qquad (26)$$

Работа консервативных сил совершается только за счёт убыли потенциальной энергии.

Для бесконечно малых величин имеем соответственно

$$dA_{конс} = -d\Pi \quad . \qquad (27)$$

Равенство (27) имеет смысл только в консервативных полях.
Равенство (27), представленное в форме

$$dA_{конс} = -d\Pi = \vec{F}d\vec{r} \quad , \qquad (28)$$

используется при построении выражений для потенциальной энергии МТ в консервативных силовых полях.

В декартовых координатах:

$$d\Pi = -\vec{F}d\vec{r} \quad . \qquad (29)$$

$$\vec{F} = -grad\ \Pi$$

$$grad\ \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z}\vec{k}$$

Силы, не являющиеся консервативными, называются неконсервативными силами.

<u>Консервативные силы:</u> сила тяжести, сила упругости, квазиупругая сила, кулоновская сила.

<u>Неконсервативные силы:</u> все виды сил трения.

Рассмотрим пример постоянной однородной консервативной силы и вычислим её потенциальную энергию.

Однородная постоянная сила консервативна, так как для любого замкнутого контура

$$\oint_L \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \oint_L d\vec{r} = 0 \quad . \qquad (30)$$

Положив

$$\Pi(\vec{r}) = -\vec{F} \cdot \vec{r} \quad , \qquad (31)$$

убеждаемся в том, что равенство (30) удовлетворяется. Потенциальная энергия в (31) определяется так, что она обращается в нуль в начале системы отсчета.

Примеры постоянных однородных сил – $\vec{F}_1 = q\vec{E}$, $\vec{F}_2 = m\vec{g}$, – где $\vec{E}$ – напряженность однородного электростатического поля, $\vec{g}$ – напряженность однородного гравитационного. В табл. 3.1. помещены виды потенциальных энергий известных в механике консервативных сил.

Таблица 3.1.

Потенциальная энергия	Консервативная сила
$\Pi = -\vec{F} \cdot \vec{r}$	$\vec{F} = const$
$\Pi_1 = -q\vec{E} \cdot \vec{r}$	$\vec{F} = q\vec{E}$
$\Pi_2 = mgy$	$\vec{F} = m\vec{g}$
$\Pi_3 = \frac{kx^2}{2}$	$F_x' = -kx$
$\Pi = -\int f(r)dr$	$\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$
$\Pi_4(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$	$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$
$\Pi_5(r) = k_0\frac{q_1 q_2}{r}$	$\vec{F} = k_0\frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$
$\Pi_6(r) = æ\frac{r^2}{2}$	$\vec{F}' = -æ\vec{r}$

.

3.4. Механическая энергия системы. Закон сохранения механической энергии. Принцип минимума потенциальной энергии.

Механической энергией системы называется сумма ее кинетической и потенциальной энергий:

$$E \equiv K + \Pi \quad . \qquad (32)$$

Изменение механической энергии за некоторый промежуток времени:

$$\Delta E = \Delta K + \Delta \Pi \quad . \qquad (33)$$

Закон сохранения механической энергии: если все силы, действующие в механической системе, консервативны, то механическая энергия системы сохраняется:

$$\Delta E = 0 \Rightarrow \Delta K = -\Delta \Pi \ .$$

При наличии сил трения в системе механическая энергия убывает

$$\Delta E < 0 \Rightarrow \Delta E = E_2 - E_1 = A_{mp} \ .$$

Принцип минимума потенциальной энергии. Движение тела в консервативной механической системе происходит таким образом, что тело стремиться занять такое положение в пространстве, в котором его потенциальная энергия минимальна. (Пример)