# ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (СТО).
# РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА

## 5.1. Основные положения нерелятивистской механики (механики Ньютона–Галилея).

*А1.* Ход **времени** во всех системах отсчета **(СО)** одинаков: **время абсолютно.**

*А2.* **Событие** определяется моментом времени (t), когда оно произошло, и местом $\left(\vec{r} = (x, y, z)\right)$, где оно произошло., т.е.событие определяет четверка величин $(t, x, y, z)$.

*А3.* Из **первого закона Ньютона (**закон инерции**)** следует существование бесконечного множества инерциальных систем отсчета (ИСО), а механическая эквивалентность всех ИСО утверждается **фундаментальным постулатом** – **принципом относительности Галилея:** «Законы механики во всех ИСО имеют один и тот же вид».

*А4.* **Преобразования Галилея.** Если имеется две ИСО: $K$ и $K'$, – и $K'$ движется относительно $K$ со скоростью $\vec{V} = const$, а начала отсчета в $K$ и $K'$ при $t = t' = 0$ совпадают, то переход $(t', x', y', z') \to (t, x, y, z)$ или $(t', \vec{r}\,') \to (t, \vec{r})$ определяется законом

$$t = t' \qquad (1)$$

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}t' \qquad (2)$$

(2) можно записать и в проекциях на координатные оси. В частном случае, когда оси $OX$ и $O'X'$ сонаправлены и совпадают, а $OY$ и $O'Y'$, $OZ$ и $O'Z'$ . сонаправлены, вместо (2) имеем (под $V_x$ понимается $V$ .):

$$x = x' + Vt' \; ; \quad y = y' \; ; \quad z = z' \; ; \qquad (3)$$

Системy уравнений (1) или (3) называют **частным преобразованием Галилея.**

*__А5.__* Для двух СО $K$ и $K'$, движущихся друг относительно друга **поступательно**, имеет место (нерелятивистский) **закон сложения скоростей.** Продифференцируем по времени (2) с учетом (1).

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{V} \qquad (4)$$

где $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\upsilon}'$– скорости материальной точки относительно систем отсчета $K$ и $K'$ соответственно.

*__А6.__* **Второй закон Ньютона**.

$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad (5)$$

Уравнение (5) называют также **уравнением движения материальной точки**, которое инвариантно относительно преобразования Галилея , поскольку $\vec{a} = \vec{a}'$ .

*__А7.__* **Третий закон Ньютона.** При взаимодействии двух тел (материальных точек) силы $\vec{F}$ и $\vec{F}'$, которыми они действуют друг на друга, равны по величине и противоположны по направлению:

$$\vec{F}' = -\vec{F} \qquad (6)$$

*A8.* **Импульс** МТ

$$\vec{p} \equiv m\vec{\upsilon} \tag{7}$$

**Импульс механической системы** (набор конечного числа материальных точек):

$$\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i \tag{8}$$

где $\vec{p}_i \equiv m_i\vec{\upsilon}_i$, $i$ – номер материальной точки, пробегающий значения от 1 до $n$.

*A9.* **Закон сохранения импульса**: импульс замкнутой системы сохраняется.

*A10.* Второй закон Ньютона можно записать как в форме (5), так и в форме (равноправной!):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{9}$$

## 5.2. Опыт Майкельсона-Морли. Принцип относительности Эйнштейна.

Многочисленные эксперименты (прежде всего оптические – в силу наибольшей достигнутой здесь точности), выполненные на рубеже XIX–XX веков, преследовали цель изучения эффектов, которые должны иметь место в любой инерциальной СО, движущейся относительно эфира. **В частности**, проводилось измерение скорости света в ИСО, сопровождающей Землю, которая движется по круговой орбите вокруг Солнца. Указанная ИСО считается, таким образом, движущейся относительно эфира. Предполагалось, что закон сложения скоростей для светового сигнала аналогичен закону сложения скоростей (5.5) для материальной точки. Если скорость света относительно эфира равна *c*, то при измерении этой скорости аппаратурой, неподвижной относительно земной поверхности, при различных направлениях распространения света должны получаться различные значения скорости. Это связано с тем, как говорят, что «эфирный ветер» сносит световую (электромагнитную) волну точно так же, как атмосферный ветер сносит волну акустическую. *Ключевым экспериментом считается **опыт Майкельсона** (1881г.), с высокой точностью показавший, что скорость света относительно Земли не зависит от его направления распространения.* Все выглядит таким образом, как будто никакого эфира (и соответственно эфирного ветра) в природе нет. Пытаясь примирить результат опыта Майкельсона с **общепризнанной** концепцией эфира, Лоренц на основе электронной теории сформулировал **гипотезу** о сокращении длин движущихся предметов в продольном (по скорости) направлении (т.н. **лоренцево сокращение**).

Как было выяснено позже Эйнштейном, лоренцево сокращение действительно имеет место, но является эффектом **элементарным**, не требующим для его объяснения ни гипотезы эфира, ни привлечения электронной теории.

Анализ результатов экспериментов и теоретических работ, прежде всего работ Лоренца и Пуанкаре, позволил Эйнштейну сформулировать в 1905 г. основные положения специальной теории относительности (СТО).

**Нерелятивистская** физика, включающая механику Ньютона-Галилея, с хорошей точностью описывает процессы с характерными скоростями, малыми по сравнению со скоростью света в вакууме,

$$\upsilon << c \tag{10}$$

При этом скорость распространения взаимодействий по умолчанию считалась бесконечно большой.

**Специальная теория относительности (СТО)** – это, в широком смысле, физика рассматриваемых в ИСО процессов с произвольными возможными характерными скоростями, подчиненными **единственному физическому ограничению** (см. ниже)

$$\upsilon \le c \tag{11}$$

причем скорость распространения взаимодействий этому ограничению также подчинена!

***PS.*** **Релятивистская механика**, – в которой действует лишь ограничение (11) является обобщением ньютоновой (нерелятивистской) механики. Все результаты механики Ньютона-Галилея соответственно должны получаться из результатов механики СТО переходом к нерелятивистскому пределу (10).

## ПОСТУЛАТЫ СТО

*I.* *Принцип относительности*. Все законы природы инвариантны по отношению к переходу из одной ИСО в другую.

*Следствие*. Никакими опытами внутри данной инерциальной системы нельзя обнаружить покоится ли она или движется равномерно.

*II. Принцип инвариантности скорости света*. Скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источника или наблюдателя и одинакова во всех ИСО.

## 5.3. Преобразование Лоренца.

**Постулат.** Скорость света постоянна во всех ИСО.

Рассмотрим систему *К* в которой источник света неподвижен. Его координаты (*x,y,z* ), а время в *К* обозначим *t.*

Уравнение сферического волнового фронта в *К*:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \qquad (12)$$

Уравнение (12) описывает сферическую поверхность, радиус которой ( $c \cdot t$ ) увеличивается со временем со скоростью света *с.*

Рассмотрим систему *К’* , движущуюся со скоростью $\upsilon$ относительно *К* (в положительном направлении оси *ОХ*).

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \qquad (13)$$

Попробуем установить взаимосвязь *К* и *К’* исходя из *преобразований Галилея*.

$$x' = x - \upsilon t \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t \qquad (14)$$

Подставляя (14) в уравнение (13) получаем:

$$x^2 - 2x \cdot \upsilon \cdot t + \upsilon^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \qquad (15)$$

т.е. не согласуется с уравнением (12)!!!???

Таким образом, преобразования Галилея не соответствуют идее равноправия всех ИСО.

Рассмотрим *преобразования Лоренца* применительно к переходу из К в К'
(К' движется относительно *К* со скоростью $\upsilon$ )

$$x' = \frac{x - \upsilon t}{\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{1/2}} \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \frac{t - \upsilon \frac{x}{c^2}}{\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{1/2}} \qquad (16)$$

Это преобразование линейно относительно *x* и *t*, и переходит в преобразования Галилея при $\frac{\upsilon}{c} \to 0$ (*принцип соответствия*). При подстановке (16) в уравнение (13) получаем уравнение (12)!!!!

Вывод. Уравнение волнового сферического фронта инвариантно относительно *преобразований Лоренца* .

**PS.** Можно ввести обозначения:

$$\beta = \frac{\upsilon}{c}, \qquad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

## 5.4 Следствия преобразования Лоренца. Сокращение длин. Замедление движущихся часов. Релятивистский закон сложения скоростей. Относительность понятия одновременности.

### 1. Сокращение длин (лоренцево сокращение).

Рассмотрим стержень, покоящийся в системе $K'$ и расположенный на оси $O'X'$ (или параллельно ей). Координаты концов стержня – $x_1'$ и $x_2'$, причем (будем считать) $x_2' > x_1'$. В системе К стержень движется со скоростью $V$ и в некоторый момент времени $t$ его концы имеют координаты $x_1$ и $x_2$ соответственно. Связь между координатами концов в $K$ и $K'$ определяется равенством (16). Запишем его для двух концов стержня:

$$x_1' = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2' = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (17)$$

Откуда, получим

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad (18)$$

Но $(x'_2 - x'_1)$ – это длина стержня в $K'$, относительно которой он покоится, а $(x_2 - x_1)$ – длина стержня, измеренная в некоторый момент времени $t$ в системе отсчета $K$, т.е. длина стержня, движущегося со скоростью $V$. Обозначив первую через $l_0$ а вторую через $l$, вместо (18) получаем

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

(19), где $l_0$ принято называть собственной длиной стержня.

Формула (19) описывает сокращение движущихся предметов (тел) в направлении их движения (лоренцево сокращение). Поперечные размеры тела в $K$ и $K'$ одинаковы, поэтому объем движущегося тела сокращается в соответствии с тем же законом (19), что и его продольные размеры.

**2. Замедление хода движущихся часов.**

Пусть два события происходят в одной точке $(x', y', z')$ в системе $K'$ в моменты времени $t'_1$ и $t'_2$ $t'_2 > t'_1$ В системе К эти события происходят в моменты $t_1$ и $t_2$. Связь между событиями в системах К и $K'$ определяется равенством

$$t_1 = \frac{t'_1 + \dfrac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \qquad t_2 = \frac{t'_2 + \dfrac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \tag{20}$$

Откуда, получим

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad (21)$$

где $\Delta t' = t_2' - t_1'$ – интервал времени между событиями в ИСО $K'$, а $\Delta t = t_2 - t_1$ – временной интервал между теми же событиями в системе $K$; промежуток времени $\Delta t'$ показывают часы, неподвижные относительно $K'$ и **движущиеся** относительно системы $K$. Очевидно,

$$\Delta t' < \Delta t \qquad (22)$$

и, как говорят, движущиеся часы идут медленнее неподвижных.

Интервал времени, измеренный часами, неподвижными относительно некоторого физического объекта $\Delta t'$, т.е. движущимися вместе с физическим объектом, называется **собственным временем физического объекта**.

## 3. Релятивистский закон сложения скоростей.

Для вывода закона сложения скоростей в релятивистской кинематике рассмотрим два бесконечно близких события, связанных с движущейся материальной точкой (частицей). В системе $K'$ в некоторый момент $t'$ частица проходит точку с координатами $(x', y', z')$, а в следующий момент $t' + dt'$ она, совершив бесконечно малое перемещение, оказывается в точке $x' + dx'$, $y' + dy'; z' + dz';$. В системе отсчета $K$ имеем соответственно $t$, $t + dt$ и $(x, y, z)$, $(x + dx, y + dy, z + dz)$.

Перепишем преобразование Лоренца (16) для второго события:

$$t+dt=\frac{t'+dt'+\frac{V}{c^2}\left(x'+dx'\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad x+dx=\frac{x'+dx'+V\left(t'+dt'\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \tag{23}$$

$$y+dy=y'+dy',\quad z+dz=z'+dz' \tag{24}$$

Вычитая из равенств (23) соответствующие равенства (16), получим:

$$dt=\frac{dt'+\frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad dx=\frac{dx'+Vdt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad dy=dy',\quad dz=dz' \tag{25}$$

Используя определение скорости

$$\upsilon_x=\frac{dx}{dt},\ \upsilon_y=\frac{dy}{dt},\ \upsilon_z=\frac{dz}{dt} \tag{26}$$

относительно системы $K$ и аналогичное определение для $K'$ поделив на (26) равенства (25), получаем соответственно

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon'_x + V}{1 + \frac{V\upsilon'_x}{c^2}}, \quad \upsilon_y = \frac{\upsilon'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V\upsilon'_x}{c^2}}, \quad v_z = \frac{\upsilon'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V\upsilon'_x}{c^2}} \tag{27}$$

Это и есть искомый **закон сложения скоростей** – закон преобразования скорости $\vec{\upsilon}' \to \vec{\upsilon}$ при переходе от одной ИСО к другой, $K' \to K$.

Отметим, следующие свойства закона (27).

1) При $V > c$ закон теряет смысл (в соответствии с постулатом).

2) В нерелятивистском приближении $V \ll c$, $\upsilon \ll c$ получаем нерелятивистский закон сложения скоростей (соответствующий частному преобразованию Галилея):

$$\upsilon_x = \upsilon'_x + V, \; \upsilon_y = \upsilon'_y, \; \upsilon_z = \upsilon'_z$$

3) Если скорость физического объекта в системе $K'$ равна $c$ ( $\upsilon'_x = c$, $\upsilon'_y = 0$, $\upsilon'_z = 0$ ) то из (27) получаем: $\upsilon_x = c$; $\upsilon_y = 0$, $\upsilon_z = 0$ ; т.е. скорость объекта в $K$ также равна $c$ (как и должно быть – по постулату).

4) Преобразование, обратное (27), получается заменой штрихованных величин на нештрихованные с одновременной заменой $V$ на $(-V)$.

## 4. Относительность понятия одновременности.

Пусть в *K* в точках $x_1$ и $x_2$ в моменты $t_1$ и $t_2$ происходит два события. В *K'* им соответствуют точки $x_1'$ и $x_2'$ и моменты $t_1'$ и $t_2'$.

1) если в К эти события происходят в одной и той же ($x_1$=$x_2$) и одновременно ($t_1$=$t_2$) то по Лоренцу: $x_1' = x_2'$, $t_1' = t_2'$ т.е. эти события являются одновременными и пространственно совпадающими для любой ИСО.

2) если в К эти события происходят в разных местах ($x_1 \neq x_2$), но одновременны ($t_1 = t_2$) то по Лоренцу в *K'*:

$$x_1' = \frac{x_1 - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad x_2' = \frac{x_2 - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad t_1' = \frac{t - \frac{\upsilon x_1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad t_2' = \frac{t - \frac{\upsilon x_2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{28}$$

т.е. $x_1 \neq x_2$, $t_1' \neq t_2'$.

Таким образом,. эти события оставаясь пространственно разнесёнными, становятся и неодновременными.