РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА

6.1. Масса материальной точки. Второй закон Ньютона и закон сохранения импульса: необходимость переопределения импульса в релятивистской динамике.

В нерелятивистской механике масса m материальной точки (частицы) является инвариантом преобразования Галилея, т.е. эта величина одна и та же во всех инерциальных системах отсчета (ИСО). Инвариантность массы – постулат (алгоритм определения массы содержит ссылку на опытные данные). В релятивистской механике под массой частицы понимают эту же самую величину: масса – мера инертности, неотрицательный параметр частицы, одну и ту же во всех ИСО, т.е. инвариантную относительно преобразования Лоренца.

Уравнение движения частицы в виде

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{1}$$

(см. лекцию № 5), однако, *в релятивистской области не работает*, и в этом нетрудно убедиться.

Рассмотрим движение электрона в постоянном однородном электростатическом поле напряженностью $\vec{E}$. Заряд электрона равен $(-e)$, где элементарный заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. В соответствии (1) имеем:

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = (-e)\vec{E} \tag{2}$$

Уравнение (2) легко интегрируется:

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 - \frac{e}{m_e}\vec{E}t \qquad (3)$$

Если при $t = 0$ задать, $\upsilon_0 = 0$ то модуль скорости линейно зависит от времени

$$\upsilon(t) = \frac{e}{m_e}Et \qquad (4)$$

При значениях $E = 10^6$ В/м, $t = 2\cdot 10^9$ получаем $\upsilon \approx 3{,}52\cdot 10^8$ м/с, **т.е.** $\upsilon >> c$ **!!!????**

Есть другая версия уравнения движения (см. лекцию № 5),:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \qquad \vec{p} \equiv m\vec{\upsilon}, \qquad (5)$$

где $\vec{p}$ – импульс частицы. Формально уравнение (5) **эквивалентно** (1).

Физика была поставлена перед альтернативой: либо остаемся **без второго закона Ньютона (!)**, либо следует «подправить» определение импульса так, чтобы уравнение движения (5) работало в релятивистской области.

Непригодность определения импульса (5) в релятивистской области проявляется еще и в том, что **фундаментальный закон сохранения импульса** оказывается неинвариантным относительно преобразования Лоренца, т.е. определение (5) создает ситуацию, когда в одной ИСО импульс замкнутой системы сохраняется, а в другой ИСО – нет.

Пример. Пусть в СО *К* материальные точки движутся друг навстречу другу вдоль оси с одинаковыми по величине скоростями υ_0, проекции скоростей на ось равны:

$$\upsilon_{1x} = \upsilon_0, \quad \upsilon_{2x} = -\upsilon_0 \qquad (6)$$

При этих условиях после столкновения они будут покоиться:

$$u_{1x} = 0, \quad u_{2x} = 0 \tag{7}$$

Импульс системы есть векторная сумма импульсов материальных точек, входящих в ее состав. Тогда импульс системы и до и после столкновения равен нулю – в СО K импульс сохраняется.

Рассмотрим этот процесс в СО K', полагая, что она движется относительно K в направлении оси OX со скоростью

$$V = \upsilon_0 \tag{8}$$

Используя релятивистский закон сложения скоростей, для преобразования запишем

$$\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \upsilon_x V / c^2} = \frac{\upsilon_x - \upsilon_0}{1 - \upsilon_x \upsilon_0 / c^2} \tag{9}$$

Отсюда получаем, подставляя в (9) значения (6) и (8):

$$\upsilon'_{1x} = 0, \ \upsilon'_{2x} = -\frac{2\upsilon_0}{1 + \upsilon_0^2 / c^2} \tag{10}$$

$$u'_{1x} = -\upsilon_0, \ u'_{2x} = -\upsilon_0$$

В системе отсчета K' проекция импульса системы на ось OX до столкновения

$$P'_x(\text{до}) = m\upsilon'_{1x} + m\upsilon'_{2x} = -\frac{2m\upsilon_0}{1 + \upsilon_0^2 / c^2}, \tag{11}$$

а после столкновения

$$P'_x(\text{после}) = mu'_{1x} + mu'_{2x} = -2m\upsilon_0. \tag{12}$$

Импульс в системе K' не сохраняется **?!**.

6.2. Релятивистский импульс.

Для переопределения импульса МТ заменим (без вывода!) определение (5) в виде

$$\vec{p} = \frac{m_0 \cdot \vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \quad (13)$$

Это есть определение **релятивистского импульса** МТ**.**

Проекции релятивистского импульса на координатные оси имеют вид:

$$p_x = \frac{m_0 \cdot \upsilon_x}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \quad p_y = \frac{m_0 \cdot \upsilon_y}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \quad p_z = \frac{m_0 \cdot \upsilon_z}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \quad (14)$$

где $\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2$

С выражениями для импульса (13), (14) **закон сохранения импульса инвариантен относительно преобразования Лоренца,** уравнение движения (5) работает при любых $\upsilon < c$

Вернемся к примеру с ускоряющимся электроном. Запишем (5):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\vec{E} \quad (15)$$

Отсюда, после интегрирования, получаем

$$\vec{p} = \vec{p}_0 - e\vec{E}t \quad (16)$$

При начальном условии $\vec{p}_0 = 0$ для величины импульса имеем

$$p(t) = eEt \quad (17)$$

так что зависимость величины скорости электрона от времени выражается равенством

$$\frac{m_e \upsilon(t)}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2(t)}{c^2}}} = eEt \tag{18}$$

откуда находим:

$$\upsilon(t) = c\frac{eEt}{\sqrt{(eEt)^2 + (m_e c)^2}} \tag{19}$$

Из формулы (19) видно, что при всех конечных t получается $\upsilon(t) < c$, как и должно быть. Сравните этот результат с (4).

6.3. Релятивистская энергия частицы. Энергия покоя. Связь между энергией и импульсом. Эквивалентность массы и энергии.

Величина, определяемая равенством

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \qquad (20)$$

называется **релятивистской энергией** частицы (материальной точки).
Особо отметим то обстоятельство, что **покоящаяся частица** (материальная точка) обладает отличной от нуля энергией

$$E_0 = m_0 c^2 \qquad (21)$$

Эта величина называется **энергией покоя**. Формула (21) – **формула Эйнштейна**, она определяет внутреннюю энергию частицы (материальной точки), не связанную с ее движением.

Отметим, что соотношения (20) и (21) говорят об эквивалентности массы и энергии, имея в виду связь между релятивистской энергией и релятивистской массой.

Физический смысл энергии покоя, скажем, для элементарной частицы определяется так: это минимальная энергия, необходимая для создания (рождения) частицы. Если в каких-то процессах освобождаются энергии, меньшие E_0, то в таких процессах частицы не рождаются.

Пример. Масса покоя ядра меньше суммы масс составляющих его нуклонов (**дефект массы**). Энергия покоя ядра равна сумме энергий покоя нуклонов плюс энергия их взаимодействия; последняя отрицательна и равна энергии связи, взятой со знаком «–».

Из сказанного следует что, **масса целого, вообще говоря, не равна сумме масс составляющих его элементов, и закон сохранения массы в природе отсутствует.** Это касается и энергии покоя.

Простая взаимосвязь между массой и энергией покоя, выражаемая формулой Эйнштейна (21), трактуется как **эквивалентность массы и энергии**.
PS. Формула (21) применима и к неэлементарным физическим объектам: атомам, телам, состоящим из большого числа атомов и т.д

Рассмотрим **связь релятивистской энергии и импульса**. Нетрудно убедиться в том, что из них можно составить очень простую комбинацию, являющуюся **лоренц-инвариантом**:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = (m_0 c)^2 = inv \qquad (22)$$

Связь между скоростью $\vec{\upsilon}$ частицы, ее импульсом $\vec{p}$ и энергией E определяется (см. (13), (20)):

$$\vec{p} = \frac{\mathrm{E}}{c^2}\vec{\upsilon} \qquad (23)$$

6.4. Кинетическая энергия частицы.

Кинетической энергией частицы (МТ) в релятивистской механике называется величина

$$T = E - E_0 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - 1 \right) \tag{24}$$

Разложение скобки в правой части (24) в степенной ряд по малому параметру $\delta = \upsilon^2 / c^2$ дает:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\delta}} - 1 = \frac{1}{2}\delta + \frac{3}{8}\delta^2 + \ldots \tag{25}$$

Если ограничиться первым слагаемым в разложении (25), то из (24) получаем известное нерелятивистское выражение

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2} \tag{26}$$

6.5. Релятивистская масса частицы. Частицы с нулевой массой.

В некоторых разделах физики удобно использовать *так называемую* **релятивистскую массу** m:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} \qquad (27)$$

Выражения для релятивистского импульса и релятивистской энергии при использовании m оказываются совсем простыми:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon} \qquad (28)$$

$$E = m \cdot c^2 \qquad (29)$$

Та инвариантная масса, которую мы ввели с самого начала, называется **массой покоя** и обозначается m_0 Релятивистская масса m не инвариантна относительно преобразования Лоренца.

В природе существуют очень интересные объекты – **частицы с нулевой массой**. Примером такой частицы является **фотон** – квант электромагнитного излучения. Выражение для релятивистской энергии

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} \qquad (30)$$

показывает, что она может быть отличной от нуля при $m_0 = 0$ только в том случае, если скорость частицы (всегда, относительно любой инерциальной системы отсчета!) равна *c*.

На это обстоятельство указывает и выражение для релятивистского импульса. Итак, делаем вывод:

Частицы с нулевой массой движутся со скоростью *c* **относительно любой инерциальной системы отсчета**.

Связь между импульсом и энергией для таких частиц имеет очень простой вид (см. (29)):

$$p = \frac{\mathrm{E}}{c} \tag{31}$$

Энергия фотона определяется известной формулой Планка:

$$\mathrm{E} = \hbar\omega \tag{32}$$

где $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж.с – постоянная Планка, ω – циклическая частота излучения. Импульс фотона определяется равенством

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \tag{33}$$

где $\vec{k}$ – так называемый волновой вектор; направление $\vec{k}$ совпадает с направлением движения фотона (направление распространения излучения), а его модуль выражается через длину волны излучения λ:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{34}$$

Величины ω и k связаны равенством

$$\frac{\omega}{k} = c \tag{35}$$

Нетрудно убедиться в том, что энергия E (32) и импульс $\vec{p}$ (33) фотона удовлетворяют равенству (31), поэтому можно, например, написать:

$$p = \hbar\omega / c \tag{36}$$

Иногда вводят в рассмотрение релятивистскую массу фотона

$$m_r = \mathrm{E}/c^2 = \hbar\omega/c^2 \tag{37}$$

PS. Известны эффекты: отклонения светового луча в гравитационном поле и уменьшение частоты излучения при распространении света противоположно направлению гравитационного поля. Их можно объяснить так. В силу **принципа эквивалентности** фотон обладает отличной от нуля гравитационной массой, равной его инертной массе (37):

$$m_g = m_r \tag{38}$$

Поэтому гравитационное поле на него действует: в первом из рассмотренных эффектов – изменяет направление импульса, во втором – уменьшает его по величине, «тормозит» фотон, что приводит к уменьшению энергии (а не скорости!) и – соответственно – частоты.

Особую роль в СТО играют инвариантные величины – лоренц – инварианты, т.е. величины, имеющие одно и то же значение во всех ИСО. Примеры таких величин (напомним): скорость света в вакууме, интервал между двумя событиями, масса покоя частицы; добавим в этот список электрический заряд частицы. В конечном счёте закон преобразования физической величины при переходе в другую систему отсчёта, в частности, факт её инвариантности, устанавливается на основе той информации о физической величине, которая получена **опытным путём**.

Отметим в заключение следующее. Третий закон Ньютона в релятивистской механике не выполняется: он запрещен постулатом СТО о конечности скорости распространения взаимодействий.