КИНЕМАТИКА

Описание движения материальной точки

А1. Зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $B = 0{,}01$ м/с, $C = 0{,}14$ м/с^2 и $D = 0{,}01$ м/с^3. Через какое время t после начала движения тело будет иметь ускорение $a_0 = 1$ м/с^2? Найти среднее ускорение $\langle a\rangle$ тела за этот промежуток времени. Какова будет величина скорости тела в этот момент времени?

Решение

Дано:

$\boldsymbol{s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3}$

$\boldsymbol{B = 0{,}01}$ ***м/с***

$\boldsymbol{C = 0{,}14}$ ***м/с***$\boldsymbol{^2}$

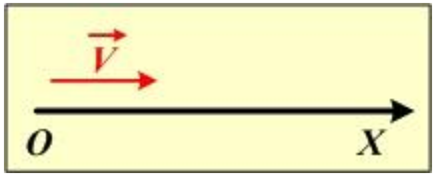
$\boldsymbol{D = 0{,}01}$ ***м/с***$\boldsymbol{^3}$

$\boldsymbol{a = a_0 = 1}$ **м/с**$\boldsymbol{^2}$

v - ?

$\langle a\rangle$ - ?

*М*атериальная точка движется прямолинейно. Выберем ось OX направленной вдоль траектории точки. В этом случае величина пройденного пути равна $s = x(t) - x(t_0)$.



Начало координат выберем так, что $x(t_0) = 0$. Тогда кинематическое уравнение движения имеет вид:

$$x(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3.$$

Проекция скорости на ось OX:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A + Bt + Ct^2 + Dt^3\right) = B + 2Ct + 3Dt^2.$$

Проекция ускорения на ось OX:

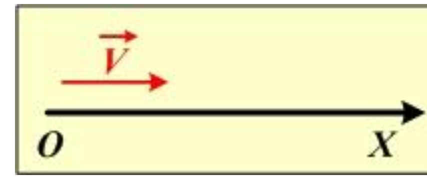
$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(B + 2Ct + 3Dt^2\right) = 2C + 6Dt.$$

По условию $a_x = a_0 = 1$ м/с, поэтому

$$a_x = a_0 = 2C + 6Dt. \qquad t = \frac{a_0 - 2C}{6D} = \frac{1 - 2\cdot 0{,}14}{6\cdot 0{,}01} = 12(c).$$

А1. Зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где B = 0,01 м/с C = 0,14 м/с^2 и D = 0,01 м/с^3. Через какое время t после начала движения тело будет иметь ускорение a =1 м/с^2? Найти среднее ускорение $\langle a \rangle$ тела за этот промежуток времени. Какова будет величина скорости тела в этот момент времени?

Решение (продолжение)



Проекция среднего ускорения на ось OX:

$$< a_x(t) > = \frac{v_x(t) - v_x(t_0)}{t - t_0}.$$

Проекция скорости на ось OX: $$v_x(t) = B + 2Ct + 3Dt^2,$$

$$t_0 = 0.$$

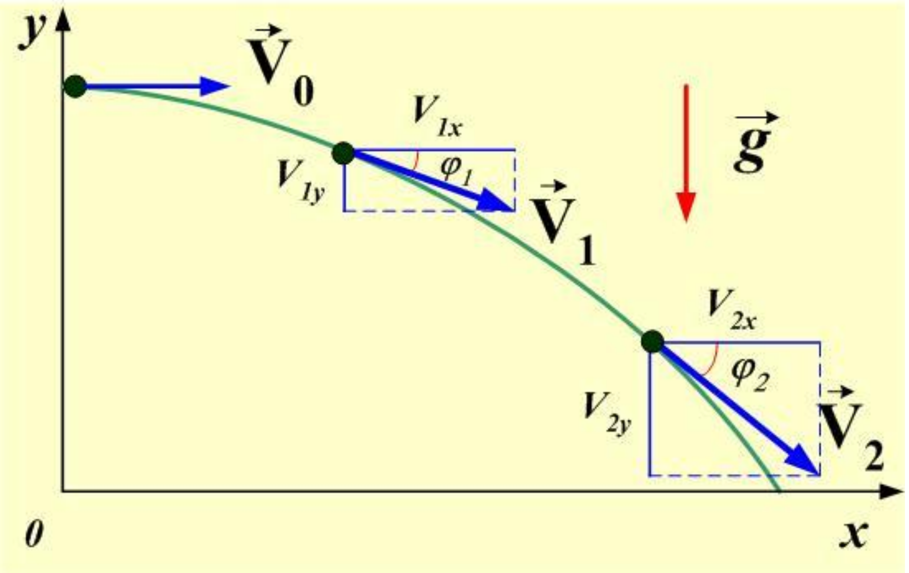
Проекция среднего ускорения:

$$< a_x(t) > = \frac{v_x(t) - v_x(t_0)}{t - t_0} = \frac{B + 2Ct + 3Dt^2 - B - 2Ct_0 - 3Dt_0}{t - t_0} =$$

$$= \frac{B + 2Ct + 3Dt^2 - B}{t} = 2C + 3Dt = 2 \cdot 0,14 + 3 \cdot 0,02 \cdot 12 = 0,64(м/с^2).$$

Ответ: *t = 12 с; $\langle a \rangle$ = 0,64 м/с^2.*

А2. Камень, брошенный горизонтально, упал на землю через время t = 0,5 с на расстоянии l = 5 м по горизонтали от места бросания. С какой высоты h брошен камень? С какой скоростью υ_0 он брошен? С какой скоростью υ он упадет на землю? Какой угол ϕ составит вектор скорости камня с горизонтом в точке его падения на землю.



Решение

Дано:

$t = 0,5$ с

$l = 5$ м

V_0 - ?

h - ?

$\vec{V}$ – ?

ϕ – ?

Если пренебречь силой сопротивления воздуха, то вдоль оси *OX* камень движется равномерно, а вдоль оси *OY* – равноускоренно, с ускорением равным g и направленным вниз. Траектория показана на рисунке (начало координат – под точкой бросания).

Кинематические уравнения движения камня:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t,$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

По условию задачи и в результате выбора системы отсчёта:

$$x_0 = 0,\ y_0 = h,\ v_{0y} = 0,\ a_y = -g.$$

Отсюда:

$$x(t) = v_{0x}t,$$

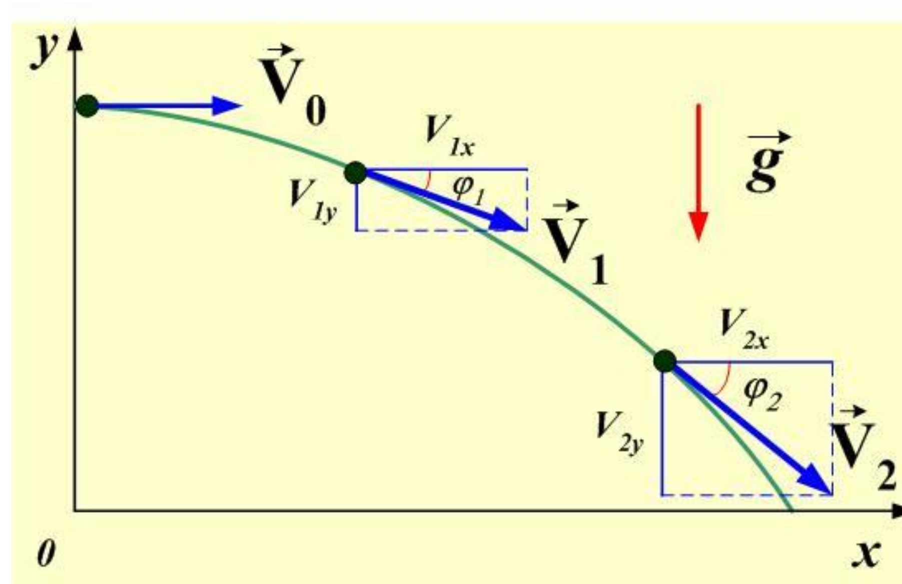
$$y(t) = h - \frac{gt^2}{2}.$$

<u>А2.</u> Камень, брошенный горизонтально, упал на землю через время t = 0,5 с на расстоянии l = 5 м по горизонтали от места бросания. С какой высоты h брошен камень? С какой скоростью υ_0 он брошен? С какой скоростью υ он упадет на землю? Какой угол φ составит вектор скорости камня с горизонтом в точке его падения на землю.

<u>Решение (продолжение)</u>

Итак, кинематические уравнения движения

$$x(t) = v_{0x}t, \qquad y(t) = h - \frac{gt^2}{2}.$$



Когда камень упадёт на землю,
x = l, y = 0 (см. рис.).

$$x(t) = v_{0x}t = l, \qquad v_{0x} = \frac{l}{t}.$$

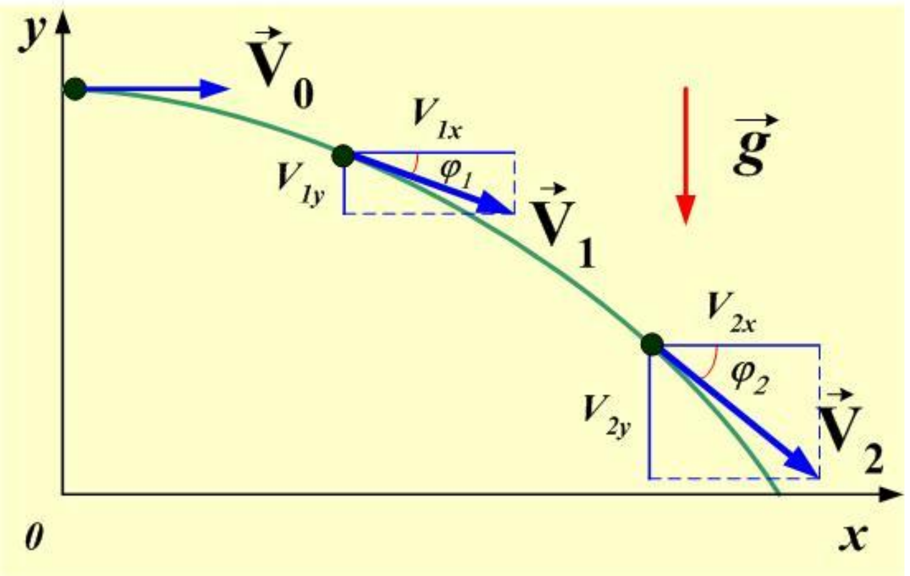
$$v_{0x} = \frac{l}{t} = \frac{5}{0,5}c = 10(c).$$

$$y(t) = h - \frac{gt^2}{2} = 0, \qquad h = \frac{gt^2}{2}, \qquad h = \frac{gt^2}{2} \approx \frac{10\cdot(0,5)^2}{2} = 1,25(\quad).$$

А2. Камень, брошенный горизонтально, упал на землю через время t = 0,5 с на расстоянии l = 5 м по горизонтали от места бросания. С какой высоты h брошен камень? С какой скоростью υ_0 он брошен? С какой скоростью υ он упадет на землю? Какой угол φ составит вектор скорости камня с горизонтом в точке его падения на землю.

Решение (продолжение)

$$x(t) = v_{0x}t, \qquad y(t) = h - \frac{gt^2}{2}.$$



Из уравнений движения определим, как зависят от времени проекции скорости на оси координат.

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_{0x}t\right) = v_{0x} = v_0.$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(h - \frac{gt^2}{2}\right) = -gt.$$

Величина скорости в любой момент времени:

$$|v(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_x^2 + (-gt)^2} = \sqrt{v_x^2 + g^2t^2}.$$

Величина скорости в момент падения (t = 0,5 с):

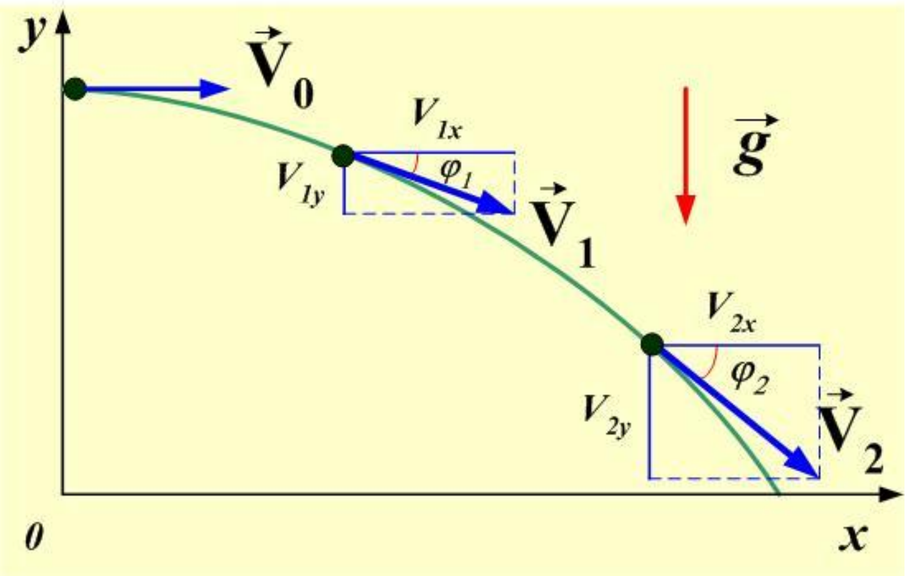
$$|v(t)| = \sqrt{v_x^2 + g^2t^2} \approx \sqrt{10^2 + (10 \cdot 0,5)^2} \approx 11,1(\quad /\quad).$$

А2. Камень, брошенный горизонтально, упал на землю через время t = 0,5 с на расстоянии l = 5 м по горизонтали от места бросания. С какой высоты h брошен камень? С какой скоростью υ_0 он брошен? С какой скоростью υ он упадет на землю? Какой угол φ составит вектор скорости камня с горизонтом в точке его падения на землю.

Решение (продолжение)

$$x(t) = v_{0x}t, \qquad y(t) = h - \frac{gt^2}{2}.$$

$$v_x(t) = v_0. \qquad v_y(t) = -gt.$$



Тангенс угла, образуемого вектором скорости с осью OX в любой момент времени (см. рис.):

$$tg\varphi = \frac{|v_y|}{|v_x|} = \frac{gt}{v_0}.$$

В момент падения (t = 0,5 с):

$$\varphi = arctg\left(\frac{gt}{v_0}\right) \approx arctg\left(\frac{10 \cdot 0,5}{10}\right) \approx 26^\circ.$$

Ответ: *h = 1,25 м;* $v_0 = 10$ *м/с,* $v = 11,1$ *м/с,* $\varphi = 26^\circ$.

А3. Камень брошен горизонтально со скоростью $\upsilon_0 = 15$ м/с. Найти нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения камня через время $t = 1$ с после начала движения.

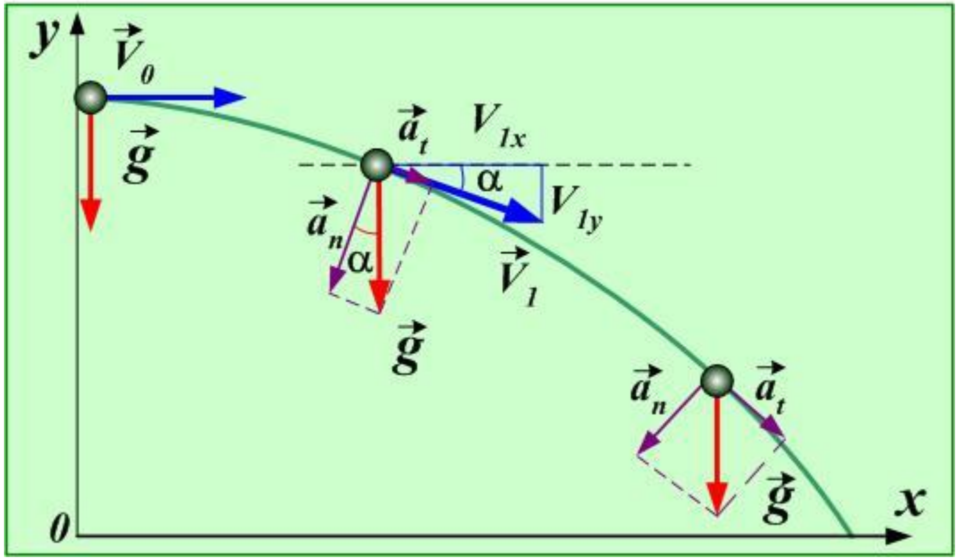
Решение

Дано:
$\upsilon_0 = 15$ *м/с*
$t = 1$ *с*

a_n *- ?*
a_τ *- ?*

Вектор ускорения камня во время полёта всегда направлен вниз, а по величине равен **g** (см.рис.).

Вектор ускорения камня можно представить, как сумму двух векторов, перпендикулярных друг другу



$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t = \vec{g}.$$

Углы между вектором скорости и осью ОХ и векторами полного и нормального ускорения равны, как острые углы со взаимно перпендикулярными сторонами (см.рис.).

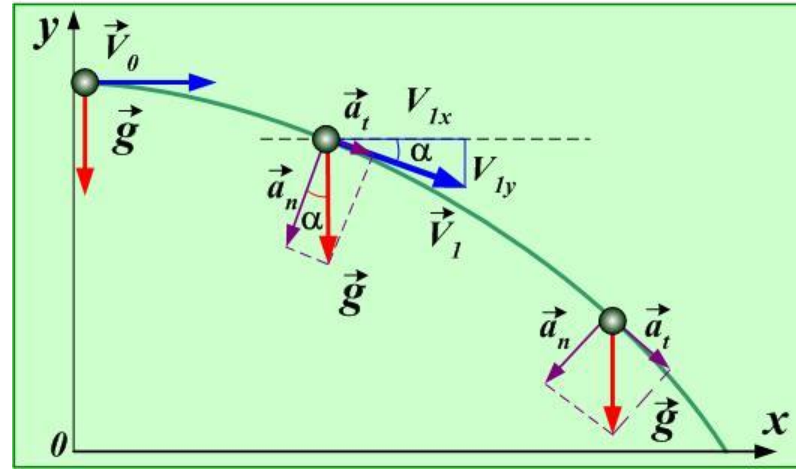
$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{|\vec{a}_n|}{|\vec{g}|}, \qquad \sin\alpha = \frac{v_y}{v} = \frac{|\vec{a}_t|}{|\vec{g}|}.$$

$$a_n = \frac{gv_x}{v} = \frac{gv_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}, \qquad a_t = \frac{gv_y}{v} = \frac{gv_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}.$$

A3. Камень брошен горизонтально со скоростью υ_0 = 15 м/с. Найти нормальное a_n и тангенциальное a_t ускорения камня через время t = 1 с после начала движения.

Решение (продолжение)

$$a_n = \frac{gv_x}{v} = \frac{gv_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}, \quad a_t = \frac{gv_y}{v} = \frac{gv_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}.$$



Камень падает в поле силы тяжести и воль оси OX движется равномерно, а вдоль оси OY – с постоянным ускорением $\boldsymbol{g}$. Проекции скорости камня зависят от времени так (см. решение предыдущей задачи):

$$v_x(t) = v_0, \qquad v_y(t) = -gt.$$

Подставим выражения для модулей проекций скорости в формулы для a_n и a_t:

$$a_n = \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}} \approx \frac{9{,}8 \cdot 15}{\sqrt{15^2 + 9{,}8^2 \cdot 1^2}} \approx 8{,}2(\quad / \quad ^2),$$

$$a_n = \frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}} \approx \frac{9{,}8^2 \cdot 1}{\sqrt{15^2 + 9{,}8^2 \cdot 1^2}} \approx 5{,}4(\quad / \quad ^2).$$

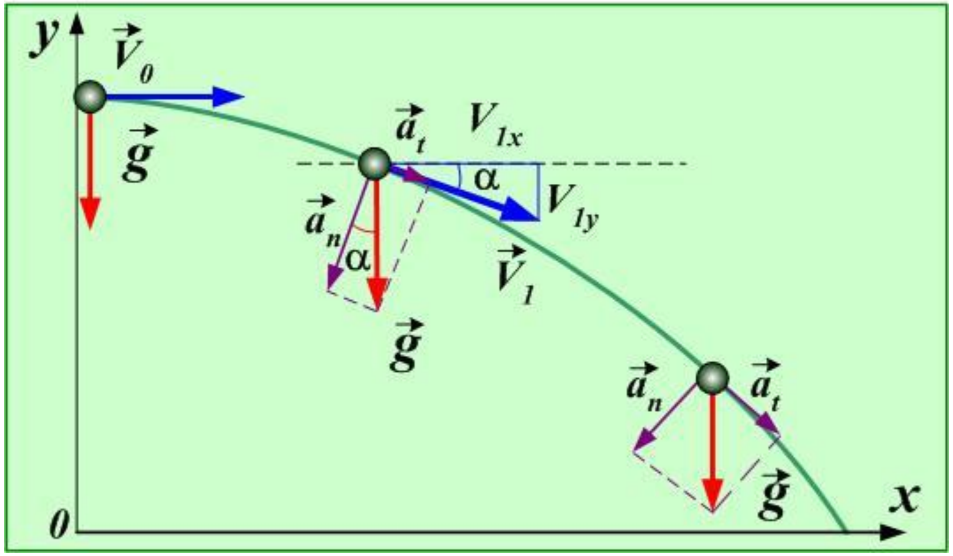
Ответ: $a_n = 8{,}2$ м/с^2; $a_t = 5{,}4$ м/с^2.

А4. Камень брошен горизонтально со скоростью υ_0 = 10 м/с. Найти радиус кривизны R траектории камня через время t = 3 с после начала движения.

Решение

Дано:
$\upsilon_0 = 10$ *м/с*
t = 3 с
R - ?

Вектор ускорения камня во время полёта всегда направлен вниз, а по величине равен **g** (см.рис.).



Вектор ускорения камня можно представить, как сумму двух векторов, перпендикулярных друг другу

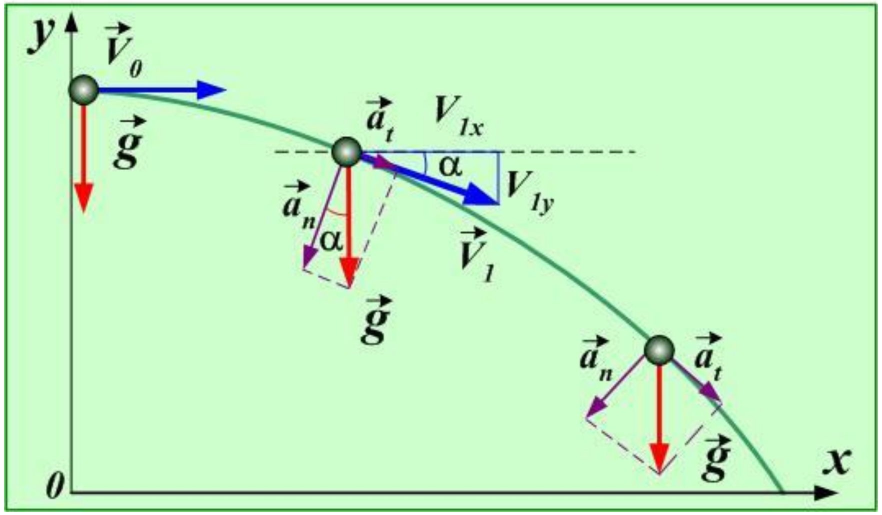
$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t = \vec{g}.$$

Углы между вектором скорости и осью ОХ и векторами полного и нормального ускорения равны, как острые углы со взаимно перпендикулярными сторонами (см.рис.).

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{|\vec{a}_n|}{|\vec{g}|}, \qquad a_n = \frac{g v_x}{v} = \frac{g v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} = \frac{g v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}.$$

А4. Камень брошен горизонтально со скоростью υ_0 = 10 м/с. Найти радиус кривизны R траектории камня через время t = 3 с после начала движения.

Решение (продолжение)



$$a_n = \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}.$$

Согласно определению величина нормального (центростремительного) ускорения равна

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

где R – радиус кривизны траектории.

$$a_n = \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}} = \frac{v^2}{R}. \qquad \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}} = \frac{\left(v_0^2 + g^2t^2\right)}{R}.$$

$$R = \frac{\left(v_0^2 + g^2t^2\right)^{3/2}}{gv_0} = \frac{\sqrt{\left(v_0^2 + g^2t^2\right)^3}}{gv_0} \approx \frac{\sqrt{\left(10^2 + 9,8^2 \cdot 3^2\right)^3}}{9,8 \cdot 10} \approx 305(\quad).$$

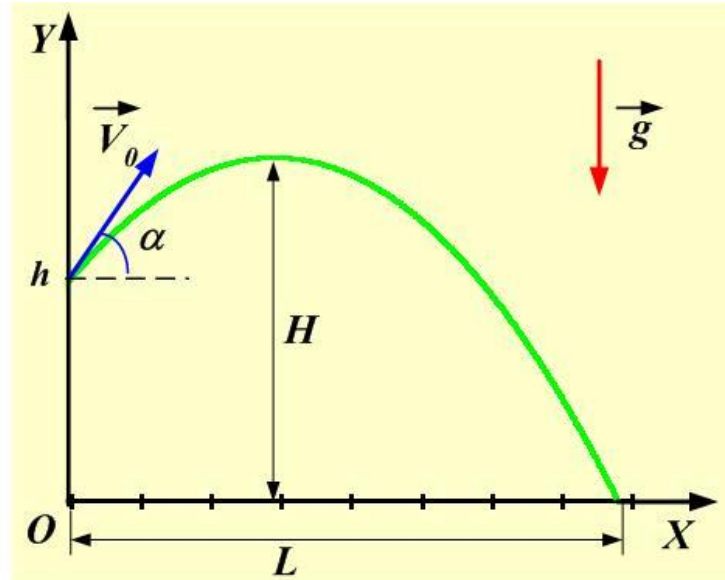
Ответ: *R = 305 м.*

А5. С башни высотой $h = 25$ м брошен камень со скоростью $\upsilon_0 = 15$ м/с под углом $\alpha=30^0$ к горизонту. Какое время t камень будет в движении? На каком расстоянии l от основания башни он упадет на землю? С какой скоростью υ он упадет на землю? Какой угол ϕ составит траектория движения камня с горизонтом в точке его падения на землю?

Дано:
$h = 25$ м
$V_0 = 15$ м/с
$\alpha = 30°$
l - ?
$\vec{V}$ – ?
ϕ – ?
t-?

Решение

Если пренебречь силой сопротивления воздуха, то вдоль оси *OX* камень движется равномерно, а вдоль оси *OY* – равноускоренно, с ускорением равным *g* и направленным вниз. Траектория показана на рисунке (начало координат – под точкой бросания).



Кинематические уравнения движения камня:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t,$$
$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

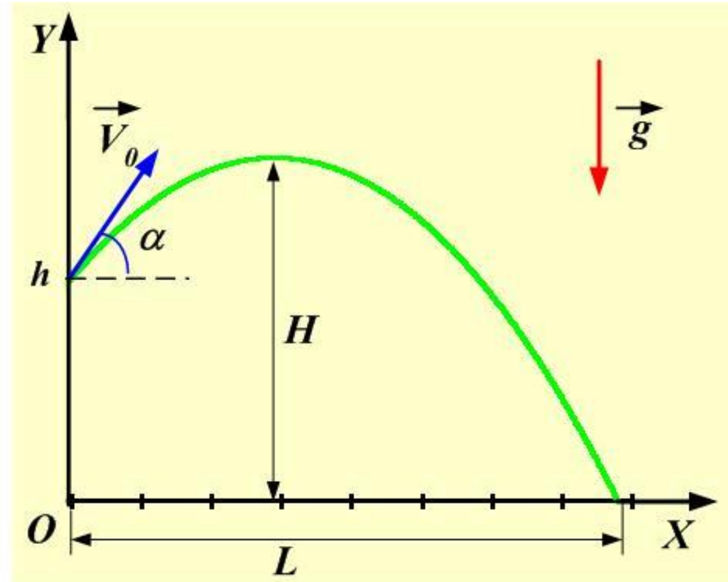
По условию задачи и в результате выбора системы отсчёта:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = h, \quad v_{0x} = v_0 cos\alpha,$$
$$v_{0y} = v_0 sin\alpha, \quad a_y = -g.$$

Отсюда кинематические уравнения движения камня:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 cos\alpha \cdot t, \\ y(t) = h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

A5. С башни высотой $h = 25$ м брошен камень со скоростью $\upsilon_0 = 15$ м/с под углом $\alpha=30^0$ к горизонту. Какое время t камень будет в движении? На каком расстоянии l от основания башни он упадет на землю? С какой скоростью υ он упадет на землю? Какой угол ϕ составит траектория движения камня с горизонтом в точке его падения на землю?



Решение (продолжение)

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t, \\ y(t) = h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Используя эти кинематические уравнения движения, ответим на все поставленные в условии вопросы.

1. Определим время движения.

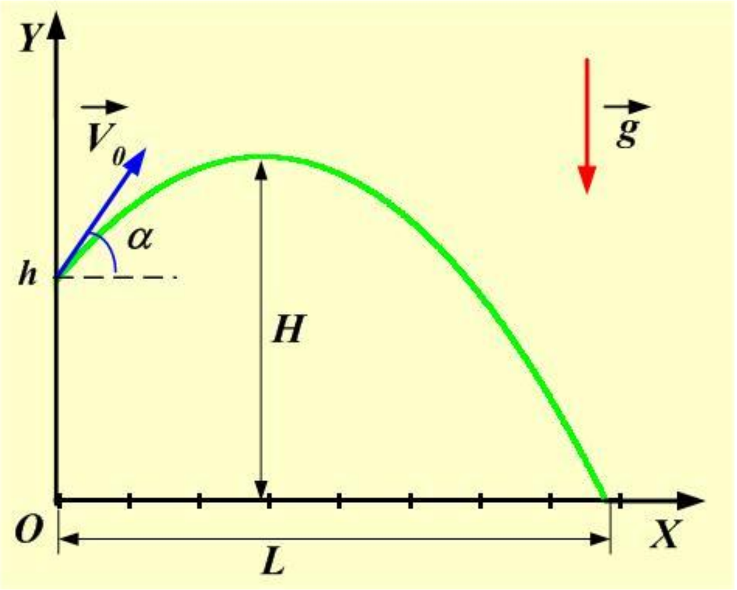
В момент падения координаты камня *x = L, y = 0.* Пусть $t_п$ – момент падения камня.

$$y(t_n) = 0; \qquad h + v_0 \sin\alpha \cdot t_n - \frac{gt_n^2}{2} = 0; \qquad \frac{gt_n^2}{2} - v_0 \sin\alpha \cdot t_n - h = 0;$$

$$t_{n1,2} = \frac{v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{(v_0 \sin\alpha)^2 + 2gh}}{g};$$

Квадратное уравнение имеет 2 корня. Из них следует выбрать положительный, так как за начало отсчёта принят момент бросания.

A5. С башни высотой $h = 25$ м брошен камень со скоростью $\upsilon_0 = 15$ м/с под углом $\alpha=30^0$ к горизонту. Какое время t камень будет в движении? На каком расстоянии l от основания башни он упадет на землю? С какой скоростью υ он упадет на землю? Какой угол ϕ составит траектория движения камня с горизонтом в точке его падения на землю?



Решение (продолжение)

$$t_{n1,2} = \frac{v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{(v_0 \sin\alpha)^2 + 2gh}}{g}.$$

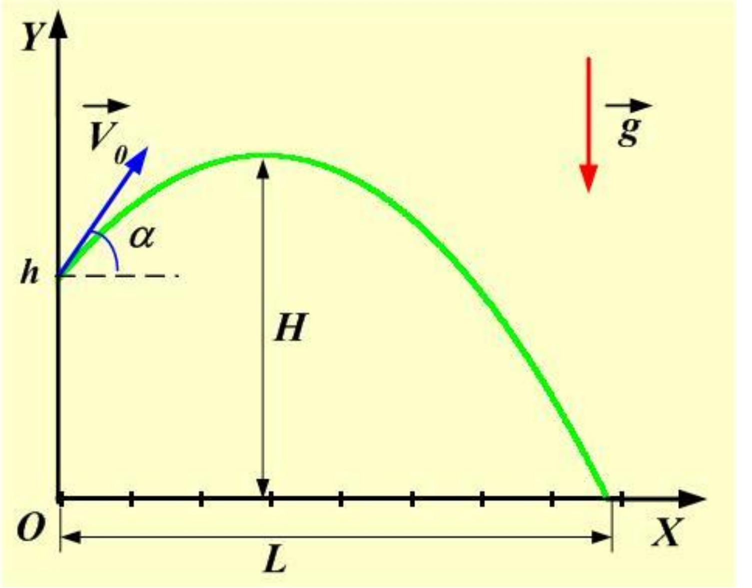
Положительным будет корень, соответствующий знаку «+». Это и будет время полёта.

$$t =_n \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{(v_0 \sin\alpha)^2 + 2gh}}{g};$$

$$t_n = \frac{15\cdot 0,5 + \sqrt{(15\cdot 0,5)^2 + 2\cdot 9,8\cdot 25}}{9,8} \approx 3,2(c)$$

А5. С башни высотой $h = 25$ м брошен камень со скоростью $\upsilon_0 = 15$ м/с под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту. Какое время t камень будет в движении? На каком расстоянии L от основания башни он упадет на землю? С какой скоростью υ он упадет на землю? Какой угол ϕ составит траектория движения камня с горизонтом в точке его падения на землю?

Решение (продолжение)



2. Определим дальность полёта *L*.

$$\begin{cases} x(t) = v_0\cos\alpha\cdot t, \\ y(t) = h + v_0\sin\alpha\cdot t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

В момент падения координаты камня $x = L,\ y = 0.$ L и есть дальность полёта. Эти значения координат достигаются в момент $t = t_n$.

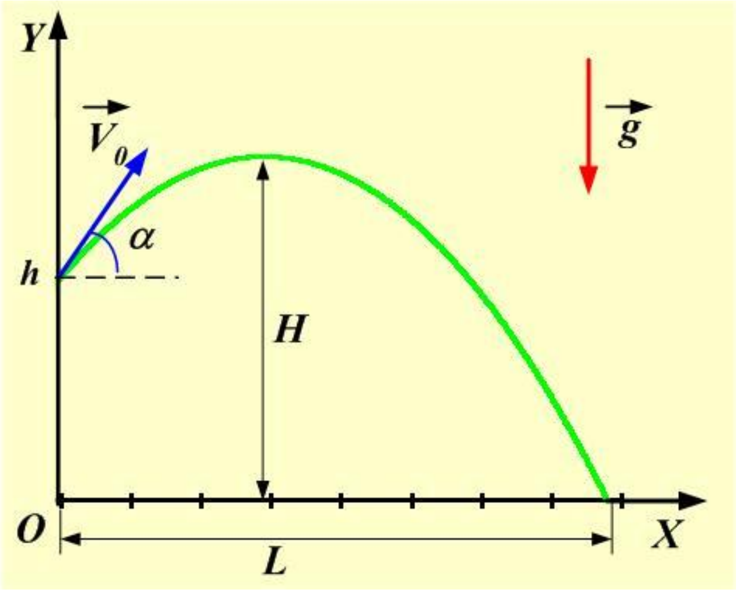
$$x(t_n) = L; \qquad L = v_0\cos\alpha\cdot t_n; \qquad t_n = \frac{v_0\sin\alpha + \sqrt{(v_0\sin\alpha)^2 + 2gh}}{g} \approx 3,2(c);$$

$$L = v_0\cos\alpha\cdot t_n = 15\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3,2 \approx 42(\quad).$$

A5. С башни высотой $h = 25$ м брошен камень со скоростью $\upsilon_0 = 15$ м/с под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту. Какое время t камень будет в движении? На каком расстоянии l от основания башни он упадет на землю? С какой скоростью υ он упадет на землю? Какой угол ϕ составит траектория движения камня с горизонтом в точке его падения на землю?

Решение (продолжение)

3. Определим максимальную высоту подъёма *H*.



$$\left[\begin{aligned} x(t) &= v_0 cos\alpha \cdot t, \\ y(t) &= h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}\right.$$

В наивысшей точке вертикальная компонента скорости равно нулю, $v_y = 0$.

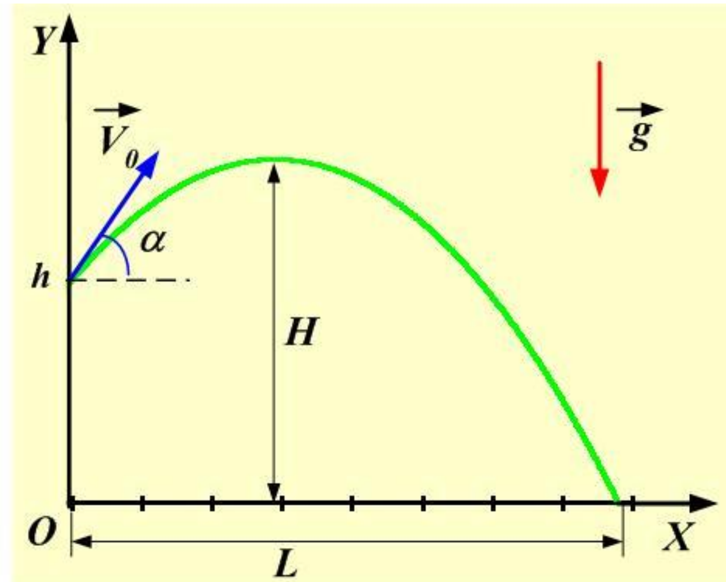
v_y определим из второго уравнения:

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}\right) = v_0 \sin\alpha - gt.$$

$$v_y(t) = 0; \qquad v_0 \sin\alpha - gt = 0;$$

$t_1 = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$ – время подъёма на максимальную высоту.

<u>А5.</u> С башни высотой $h = 25$ м брошен камень со скоростью $\upsilon_0 = 15$ м/с под углом $\alpha=30^0$ к горизонту. Какое время t камень будет в движении? На каком расстоянии l от основания башни он упадет на землю? С какой скоростью υ он упадет на землю? Какой угол ϕ составит траектория движения камня с горизонтом в точке его падения на землю?



<u>Решение (продолжение)</u>

$$\left[\begin{aligned} &x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t, \\ &y(t) = h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}\right.$$

$$H = y(t_1);$$

$$H = y(t_1) = h + v_0 \sin\alpha \cdot t_1 - \frac{gt_1^2}{2} =$$

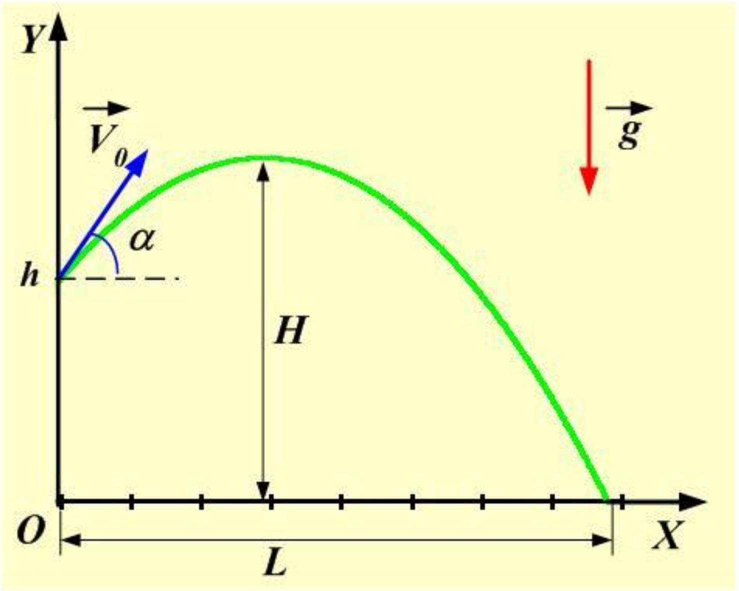
$$= h + v_0 \sin\alpha \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} =$$

$$= h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

$$H = h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 25 + \frac{225 \cdot 0,25}{2 \cdot 9,8} \approx 28(\quad).$$

А5. С башни высотой h = 25 м брошен камень со скоростью υ_0 = 15 м/с под углом $\alpha=30^0$ к горизонту. Какое время t камень будет в движении? На каком расстоянии l от основания башни он упадет на землю? С какой скоростью υ он упадет на землю? Какой угол ϕ составит траектория движения камня с горизонтом в точке его падения на землю?

Решение (продолжение)



4. Определим скорость камня в любой момент времени.

$$\left|\vec{v}\right| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2};$$

v_x и v_y определим из уравнений:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 cos\alpha \cdot t, \\ y(t) = h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_0 \cos\alpha \cdot t\right) = v_0 \cos\alpha.$$

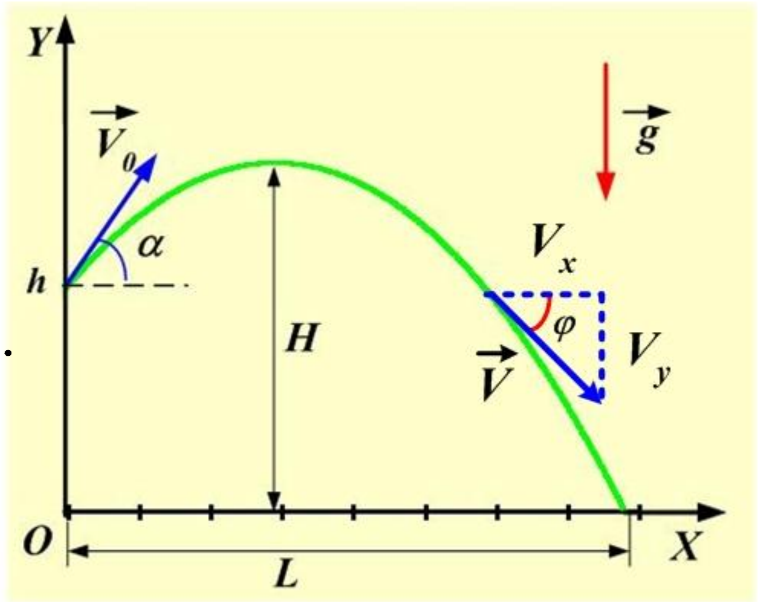
$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}\right) = v_0 \sin\alpha - gt.$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + \left(v_0 \sin\alpha - gt\right)^2}.$$

Подставляя различные значения времени t, определим величину скорости.

A5. С башни высотой $h = 25$ м брошен камень со скоростью $\upsilon_0 = 15$ м/с под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту. Какое время t камень будет в движении? На каком расстоянии l от основания башни он упадет на землю? С какой скоростью υ он упадет на землю? Какой угол ϕ составит траектория движения камня с горизонтом в точке его падения на землю?

Решение (продолжение)



Подставляя значение времени $t = t_n$, определим величину скорости в момент удара о землю.

$$v = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + \left(v_0 \sin\alpha - g t_n\right)^2} \approx 27\left(\frac{м}{c}\right).$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории (см. рис.). Направление вектора можно задать, указав угол, который образует вектор с осью *OX*.

$$tg\varphi = \frac{v_y(t)}{v_x(t)} = \frac{v_0 \sin\alpha - gt}{v_0 \cos\alpha}.$$

Подставляя различные значения времени *t*, определим величину угла φ в любой момент времени. В момент удара

$$tg\varphi_1 = \frac{v_y(t\ )}{v_x} = \frac{v_0 \sin\alpha - g t_n}{v_0 \cos\alpha}.$$

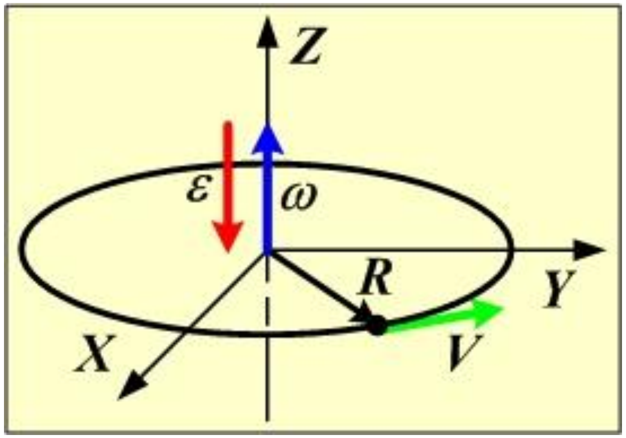
$$\varphi_1 = arctg\frac{v_0 \sin\alpha - g t_n}{v_0 \cos\alpha} \approx 61^\circ.$$

А6. Вентилятор вращается с частотой ν = 900 об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки N = 75 об. Какое время t прошло с момента выключения вентилятора до полной его остановки?

Дано:
ν = 900 об/мин
ω = 0
N = 75 об
t - ?

Решение

Выберем систему отсчёта, как показано на рисунке. Направления векторов скорости, угловой скорости и углового ускорения – на рисунке. Перейдём к полярным координатам.



Вентилятор движется замедленно. Кинематическое уравнение движения:

$$\varphi_z(t) = \varphi_{0z} + \omega_{0z}t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2}.$$

Определим значения параметров уравнения:

$$\varphi_{0z}(t) = 0; \qquad \omega_{0z} = +\omega_0; \qquad \varepsilon_z = -\varepsilon.$$

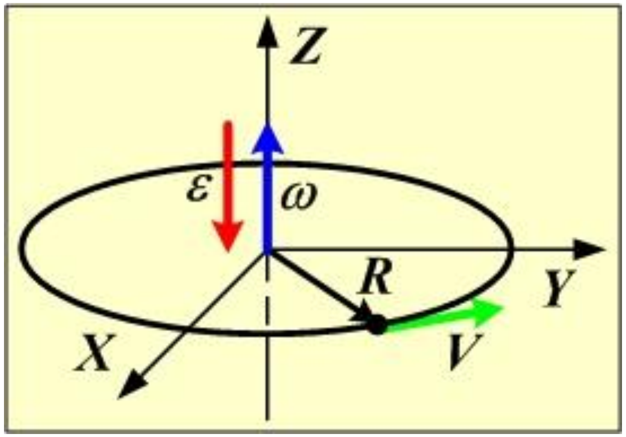
$$\varphi_z(t) = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Проекция угловой скорости вентилятора:

$$\omega_z(t) = \frac{d\varphi_z}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}\right) = \omega_0 - \varepsilon t.$$

А6. Вентилятор вращается с частотой ν = 900 об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки N = 75 об. Какое время t прошло с момента выключения вентилятора до полной его остановки?

Решение (продолжение)



Уравнения движения в полярных координатах:

$$\begin{cases} \varphi_z(t) = \omega_0 t - \dfrac{\varepsilon t^2}{2}. \\ \omega_z(t) = \omega_0 - \varepsilon t. \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим ε :

$$\varepsilon = \frac{\omega_0 - \omega_z(t)}{t}.$$ Когда вентилятор остановится, $\omega_z(t) = 0.$

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t}.$$

$$\varphi_z(t) = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} = \omega_0 t - \frac{\omega_0}{t}\frac{t^2}{2} = \frac{\omega_0 t}{2}.$$

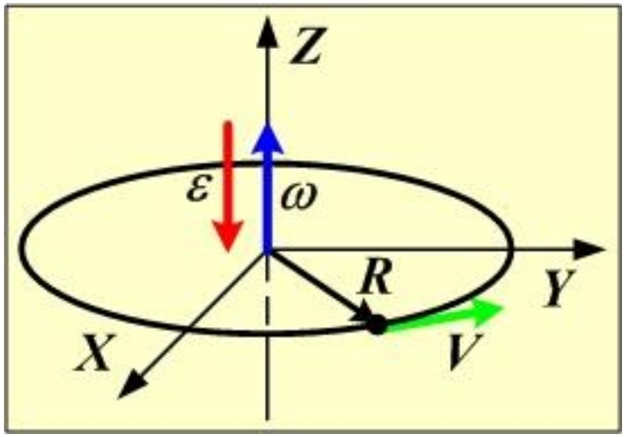
$$\omega_0 = 2\pi \nu_0.$$

Когда вентилятор остановится, проекция углового перемещения составит

$$\varphi_z = 2\pi N.$$

А6. Вентилятор вращается с частотой ν = 900 об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки N = 75 об. Какое время t прошло с момента выключения вентилятора до полной его остановки?

Решение (продолжение)



$$\varphi_z(t) = \frac{\omega_0 t}{2}. \qquad \omega_0 = 2\pi\nu_0. \qquad \varphi_z = 2\pi N.$$

$$2\pi N = \frac{2\pi\nu_0 t}{2}.$$

Время до остановки:

$$t = \frac{2N}{\nu_0}.$$

$$\nu_0 = 900\,\frac{об}{мин} = \frac{900}{60}\,\frac{об}{с} = 15\,\frac{об}{с}.$$

$$t = \frac{2N}{\nu_0} = \frac{2\cdot 75}{15} = 10(\ \ ).$$

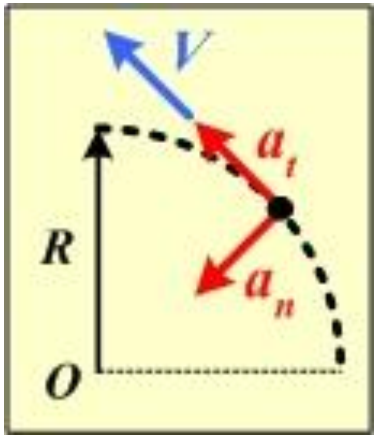
Ответ: t = *10 с.*

А7. Точка движется по окружности радиусом R = 20 см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. Найти тангенциальное ускорение a_τ точки, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения линейная скорость точки υ = 79,2 см/с.

Решение

Дано:
R = 20 см
a_τ = const.
υ = 79,2 см/с
a_τ - ?

Тангенциальная составляющая ускорения направлена, как и вектор скорости, по касательной к траектории. Поэтому она «ответственна» за изменение модуля линейной скорости. Тангенциальная составляющая ускорения постоянна по величине.



$$\begin{cases} S = v_0 t + \dfrac{a_t t^2}{2}, \\ v(t) = v_0 + a_t t. \end{cases}$$

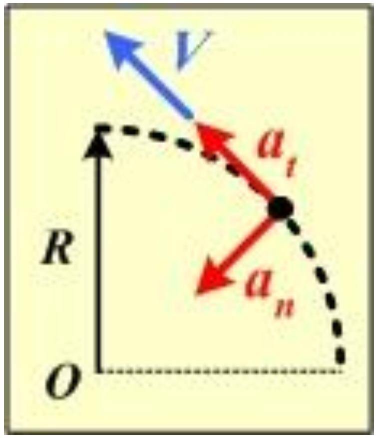
(S – путь, пройденный материальной точкой)

$$t = \frac{v(t) - v_0}{a_t}, \qquad v_0 = 0, \qquad t = \frac{v(t)}{a_t} = \frac{v}{a_t},$$

$$S = v_0 t + \frac{a_t t^2}{2} = \frac{a_t t^2}{2} = \frac{a_t v_0^2}{2a_t^2} = \frac{v_0^2}{2a_t}.$$

А7. Точка движется по окружности радиусом R = 20 см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. Найти тангенциальное ускорение a_τ точки, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения линейная скорость точки υ = 79,2 см/с.

Решение (продолжение)



$$S = \frac{v_0^2}{2a_t}. \qquad a_t = \frac{v_0^2}{2S}.$$

Путь, пройденный точкой, $S = 2\pi R \cdot N.$

N – число оборотов.

$$a_t = \frac{v_0^2}{2S} = \frac{v_0^2}{2 \cdot 2\pi R \cdot N} = \frac{v_0^2}{4\pi R \cdot N}.$$

$$a_t = \frac{v_0^2}{4\pi R \cdot N} = \frac{0,792^2}{4 \cdot 3,14 \cdot 0,2 \cdot 5} \approx 0,05\left(\frac{м}{2}\right).$$

Ответ: $a_t \approx 0,05\left(\frac{м}{с^2}\right).$

A8. Колесо радиусом R=10 см вращается с угловым ускорением ε =3,14 рад/с^2. Найти для точек на ободе колеса к концу первой секунды после начала движения: а) угловую скорость ω; б) линейную скорость υ; в) тангенциальное ускорение a_τ ; г) нормальное ускорение a_n ; д) полное ускорение a; е) угол α, составляемый вектором полного ускорения с радиусом колеса.

Дано:

R=10 см

ε =3,14 рад/с²

t = 1 с

ω - ?

υ - ?

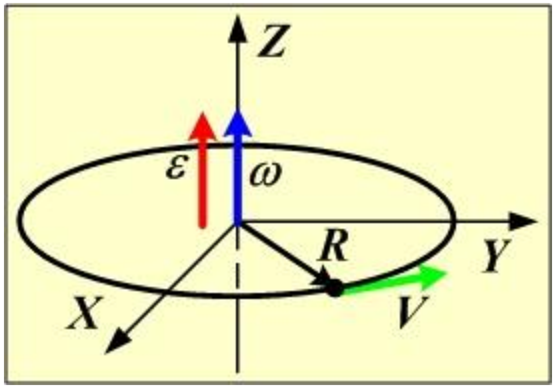
a_τ - ?

a_n - ?

a - ?

Решение

Направления векторов скорости, угловой скорости и углового ускорения – на рисунке. Перейдём к полярным координатам. Колесо движется с постоянным угловым ускорением. Кинематическое уравнение движения:



$$\varphi_z(t) = \varphi_{0z} + \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2}.$$

Определим значения параметров уравнения:

$$\varphi_{0z}(t) = 0; \qquad \omega_{0z} = 0; \qquad \varepsilon_z = +\varepsilon.$$

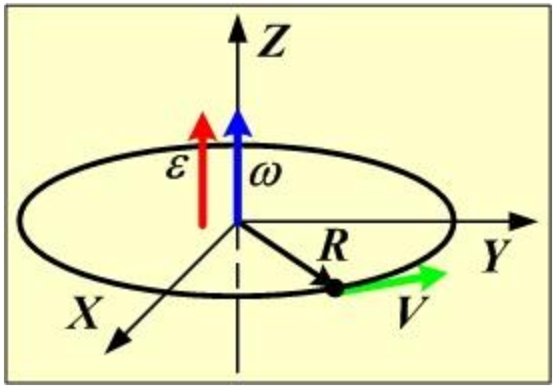
$$\varphi_z(t) = \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Проекция угловой скорости колеса:

$$\omega_z(t) = \frac{d\varphi_z}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon t^2}{2}\right) = \varepsilon t.$$

А8. Колесо радиусом R=10 см вращается с угловым ускорением ε =3,14 рад/с^2. Найти для точек на ободе колеса к концу первой секунды после начала движения: а) угловую скорость ω; б) линейную скорость υ; в) тангенциальное ускорение a_τ ; г) нормальное ускорение a_n ; д) полное ускорение a; е) угол α, составляемый вектором полного ускорения с радиусом колеса.

Решение (продолжение)



Проекция угловой скорости

$$\omega_z(t) = \varepsilon t = 3{,}14 \cdot 1 = 3{,}14\left(\frac{рад}{с}\right).$$

Вектор линейной скорости $\vec{v} = \left[\vec{\omega}, \vec{R}\right].$

Направления векторов показаны на рисунке. Для модулей

$$v = \omega_z \cdot R = \varepsilon t \cdot R = 3{,}14 \cdot 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}314\left(\frac{м}{с}\right).$$

Тангенциальная составляющая ускорения

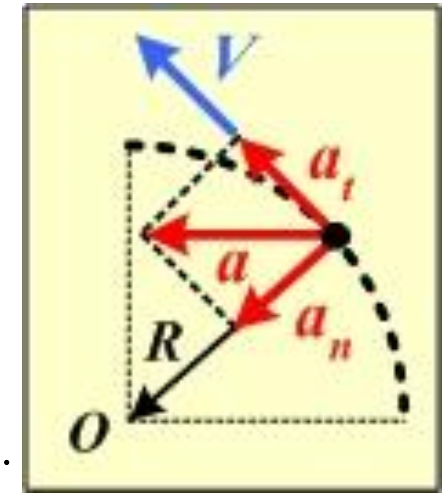
$$\vec{a}_t = \left[\vec{\varepsilon}, \vec{R}\right].$$

Направления совпадает с направлением вектора скорости. Для модулей

$$a_t = \varepsilon \cdot R = 3{,}14 \cdot 0{,}1 = 0{,}314\left(\frac{м}{с^2}\right).$$

А8. Колесо радиусом R=10 см вращается с угловым ускорением ε =3,14 рад/с^2. Найти для точек на ободе колеса к концу первой секунды после начала движения: а) угловую скорость ω; б) линейную скорость υ; в) тангенциальное ускорение a_τ ; г) нормальное ускорение a_n ; д) полное ускорение a; е) угол α, составляемый вектором полного ускорения с радиусом колеса.

Решение (продолжение)



Нормальная составляющая ускорения направлена к центру окружности . Её величина

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\varepsilon t R)^2}{R} = \varepsilon^2 t^2 R = 3,14^2 \cdot 1^2 \cdot 0,1 \approx 1,0\left(\frac{\quad}{2}\right).$$

Величину полного ускорения найдём по теореме Пифагора (см. рис).

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{1^2 + 0,314^2} \approx 1,05\left(\frac{м}{с^2}\right).$$

Нормальная составляющая ускорения направлена вдоль радиуса, тангенциальная – по касательной к окружности, поэтому угол между радиусом и вектором ускорения можно определить так:

$$tg\alpha = \frac{a_t}{a_n} = \frac{\varepsilon R}{\varepsilon^2 t^2 R} = \frac{\varepsilon R}{\varepsilon^2 t^2 R} = \frac{1}{\varepsilon t^2}. \qquad \alpha = arctg\frac{1}{\varepsilon t^2} = arctg\frac{1}{3,14} \approx 18°.$$

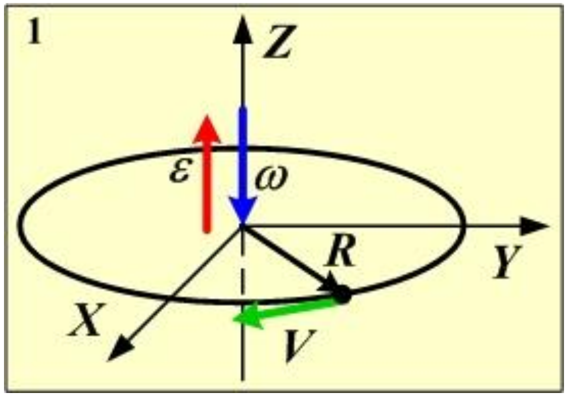
А9. Точка движется по окружности радиуса R = 1 м так, что зависимость криволинейной координаты, отсчитанной вдоль окружности, от времени задается уравнением $s = A - Bt + Ct^2$, где B = 2 м/с и C = 1 м/с^2. Найти линейную скорость υ точки, ее тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное а ускорения через время t = 3 с после начала движения.

Решение

Дано:
B = 2 м/с
C = 1 м/с^2
t_1 = 3 с
R = 1 м
V - ?
a_n - ?
a_t - ?

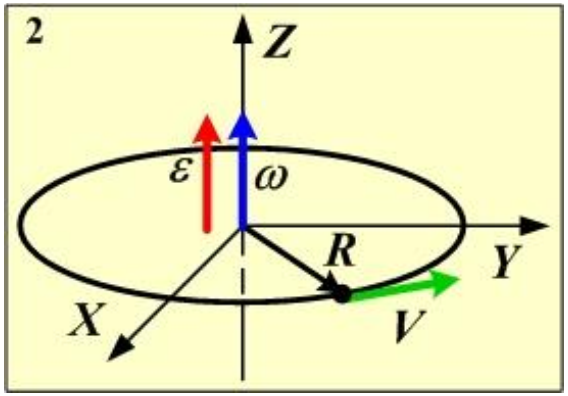
Проанализируем уравнение движения точки. При этом перемещение против часовой стрелки положительно, по часовой стрелке – отрицательно.

$$s(t) = A - Bt + Ct^2.$$



Скорость, направленная по касательной к окружности

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A - Bt + Ct^2\right) = -B + 2Ct.$$



Тангенциальное ускорение

$$a_t(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-Bt + 2Ct\right) = 2C = 2\left(\frac{}{2}\right).$$

По условию B = 2 м/с, C = 1 м/с^2, $v(t) = -B + 2Ct = -2 + 2t.$

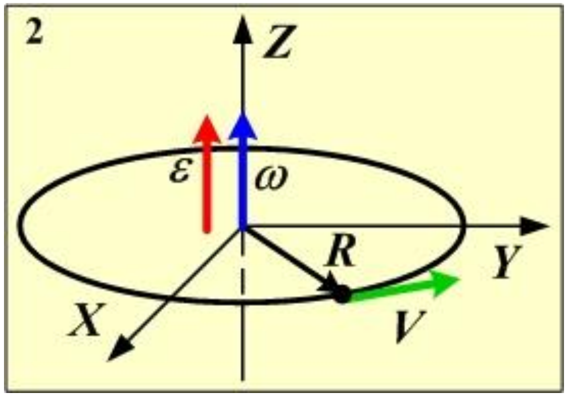
$v(t) = 0,$ при $t = 1(c).$

1. При $t < 1c$ $v < 0.$ См. рис 1.
2. При $t > 1c$ $v > 0.$ См. рис 2.

<u>А9.</u> Точка движется по окружности радиуса R = 1 м так, что зависимость криволинейной координаты, отсчитанной вдоль окружности, от времени задается уравнением $s = A - Bt + Ct^2$, где B = 2 м/с и C = 1 м/с^2. Найти линейную скорость $\boldsymbol{\upsilon}$ точки, ее тангенциальное $\boldsymbol{a}_\tau$, нормальное $\boldsymbol{a}_n$ и величину полного $\boldsymbol{a}$ ускорения через время t = 3 с после начала движения.

<u>Решение (продолжение)</u>

Момент времени t = 3 с соответствует ситуации, показанной на рис. 2.



$$v(t) = -B + Ct = -1 + 1 \cdot 3 = 1\left(\frac{м}{с}\right).$$

$$a_t(t) = 2C = 2\left(\frac{м}{с^2}\right).$$

$$a_n(t) = \frac{v^2}{R} = 1\left(\frac{м}{с^2}\right).$$

Величина полного ускорения

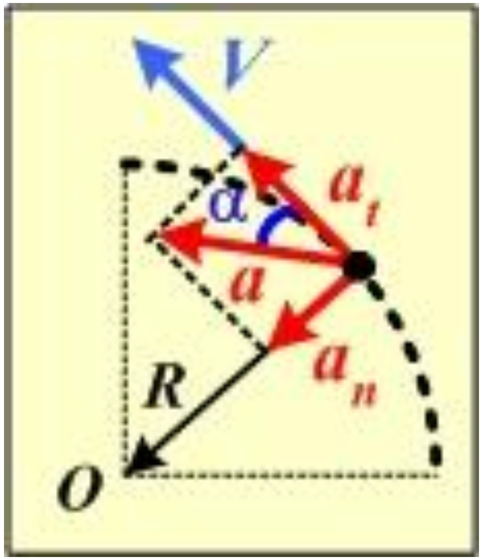
$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} \approx 2,2\left(\frac{м}{с^2}\right).$$

A10. Во сколько раз нормальное ускорение a_n точки, лежащей на ободе вращающегося колеса, больше ее тангенциального ускорения a_τ для того момента, когда вектор полного ускорения точки составляет угол α = 30° с вектором ее линейной скорости?

Дано:
α = 30°
a_n/a_τ - ?

Решение

$\vec{a}_n \perp \vec{a}_t$, следовательно, $tg\alpha = \dfrac{a_n}{a_t}.$



$$\frac{a_n}{a_t} = tg\alpha = tg30° \approx 0,58.$$

Ответ: $\dfrac{a_n}{a_t} \approx 0,58.$