ЭЛЕКТРОСТАТИКА

1.Электрический заряд и его свойства

Электрический заряд является неотъемлемым свойством элементарных частиц (***инвариантом!)*** – электронов и протонов. Заряд этих частиц одинаков по абсолютной величине, противоположен по знаку и называется **элементарным зарядом (** $= 1,6 \cdot 10^{-19}$ $\pm e$ Кл в системе СИ)**).**

Если каким-либо образом создать в теле избыток частиц одного знака, тело окажется заряженным. Поскольку всякий заряд ***q*** образуется совокупностью элементарных зарядов, он является кратным **е**:

$$q = \pm Ne \qquad (1)$$

Это означает, что величина заряда любого тела может принимать только **дискретные** значения, кратные *е*.

Закон сохранения заряда: в электрически изолированной системе алгебраическая сумма зарядов есть величина постоянная

Величина заряда не зависит от того, покоится заряженное тело или движется, т. е. она является **релятивистки инвариантной** величиной.

Закон Кулона. (1785). Векторная запись закона Кулона для точечных зарядов в вакууме имеет вид (см. рис. 1.1):

$$\vec{F}_{12} = -k\frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}{}^3} \cdot \vec{r}_{12} \qquad \vec{F}_{21} = k\frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}{}^3} \cdot \vec{r}_{12}, \qquad (2)$$

Модуль силы взаимодействия можно представить в виде:

$$F = k\frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}{}^2} \qquad (3)$$

Здесь ***k*** – коэффициент пропорциональности, в системе СИ ***k*** =9·109 м/Ф , ***q_1***, ***q_2*** – величины взаимодействующих зарядов, ***r_{12}*** – расстояние между зарядами.

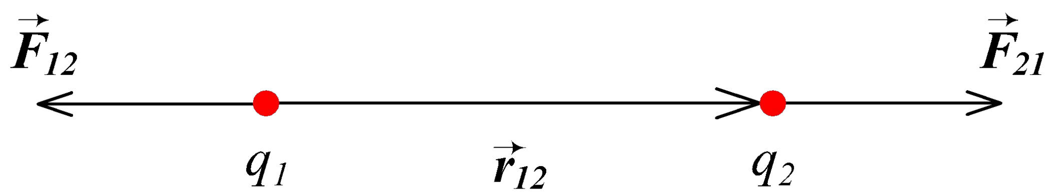

Рис. 1.1.

Сила взаимодействия направлена по прямой, соединяющей заряды (центральная сила). Рисунок соответствует случаю зарядов одного знака, (***q_1·q_2***) > 0, при этом между зарядами возникают силы отталкивания. Если точечные заряды имеют разные знаки, (***q_1· q_2***) < 0, между ними возникают силы притяжения.

2.Электростатическое поле. Напряженность поля.

Электростатическое поле – это поле, созданное покоящимися электрическими зарядами Взаимодействие между неподвижными зарядами осуществляется посредством силового, электростатического поля.

Пробным телом для электростатического поля является, так называемый, «пробный заряд». В качестве *«пробного заряда» принято брать малый заряд, такой, чтобы своим электрическим полем он не искажал измеряемое поле*.

Количественной характеристикой электростатического поля является **напряженность,** которая равна отношению силы, действующей со стороны поля на помещенный в эту точку «пробный заряд», к величине этого заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр.}} \tag{4}$$

Напряженность электрического поля, векторная величина, не зависит от величины вносимого в поле заряда и является его силовой характеристикой. Направление вектора напряжённости совпадает с силой, действующей на положительный заряд.

Рассмотрим поле точечного заряда.

Возьмем точечный заряд Q и найдем напряженность поля этого заряда в произвольной точке А (см. рис 1.2). Для этого поместим в точку А пробный заряд q. На основании закона Кулона имеем:

$$E = \frac{F}{q} = \frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{1}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (5)$$

В векторном виде $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot \vec{r}$.

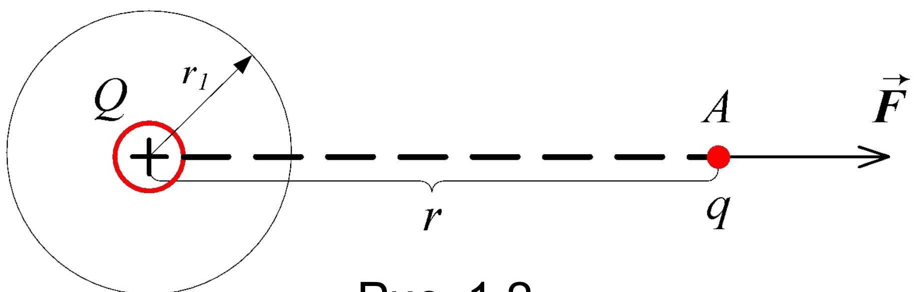

Рис. 1.2.

Поле точечного заряда обладает сферической симметрией:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$$

Электростатическое поле можно описать, с помощью <u>линий напряженности</u>, которые называют линиями вектора $\vec{E}$ или <u>силовыми линиями</u>**.**

Силовой линией называется такая линия, касательная к каждой точке которой совпадает по направлению с вектором напряженности $\vec{E}$ в данной точке (рис.1.3).

<u>Силовые линии электростатического поля разомкнуты</u> (начинаются на положительных зарядах, а заканчиваются на отрицательных см. рис.1.4).

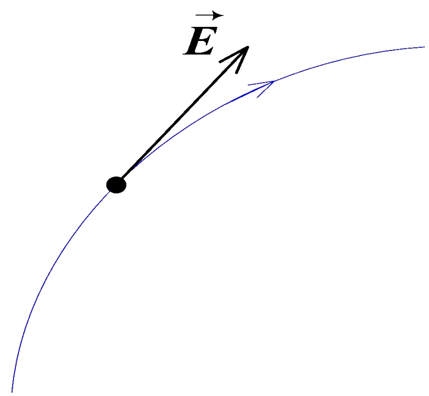

Рис. 1.3.

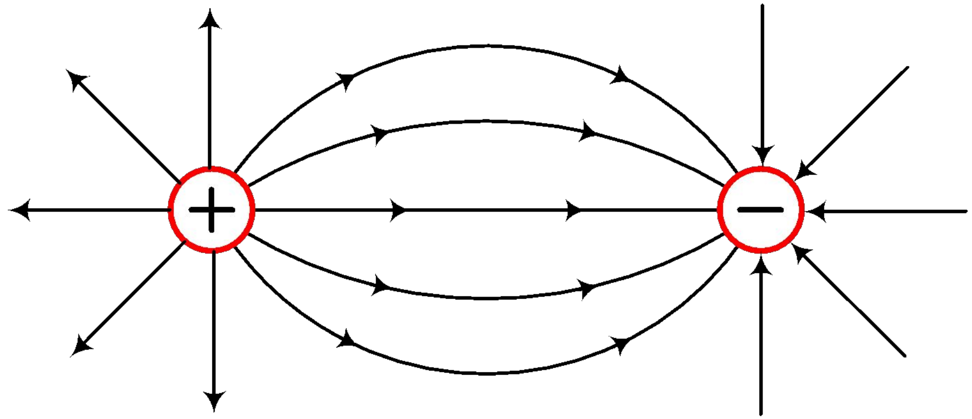

Рис. 1.4.

Пример. Поле точечных зарядов **(**рис.1.4**)** и однородное поле плоского конденсатора (рис.1.5)**.** В однородном поле напряженность в каждой точке одинакова по величине и направлению, поэтому оно изображается системой параллельных силовых линий, равномерно распределенных в пространстве. Такое поле может создаваться бесконечной равномерно заряженной плоскостью или системой параллельных разноименно заряженных плоскостей (рис. 1.5).

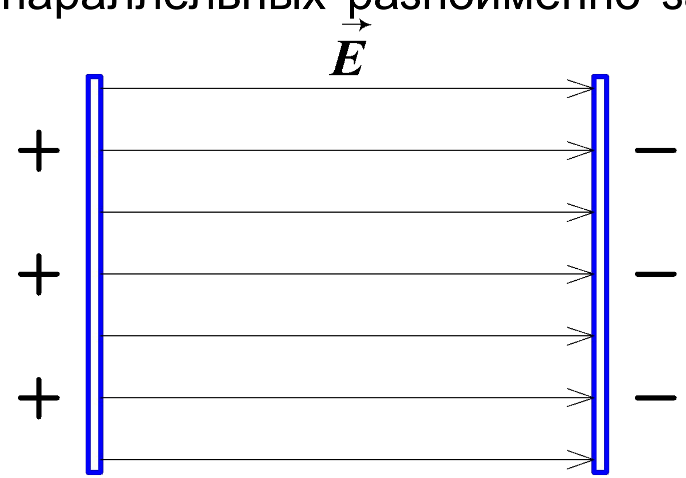

Рис. 1.5.

3. Принцип суперпозиции электростатических полей

Пусть имеется система точечных зарядов $q_1, q_2, \ldots q_i, \ldots q_n$, создающих поле. Поместим в точку поля пробный заряд $q_{пр}$. Тогда согласно (5)

$$\vec{F} = q_{пр}\vec{E} \tag{6}$$

Действие электростатического поля на заряд не зависит от наличия в этой области пространства других полей или зарядов, поэтому и сила взаимодействия любого заряда с пробным зарядом не зависит от присутствия других зарядов:

$$F_i = q_{пр} E_i$$

где E_i – напряженность поля, создаваемого i-м зарядом в той точке, где нужно узнать напряженность поля системы зарядов.

Вследствие этого результирующая сила равна:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{7}$$

Сравнивая равенства (6) и (7), получим:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \tag{8}$$

Последнее равенство и представляет собой математическое выражение **принципа суперпозиции**: «Напряженность электростатического поля, создаваемого системой точечных зарядов в произвольной его точке равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых в этой точке каждым зарядом в отдельности».

Пример. Применение принципа суперпозиции для системы двух точечных зарядов разного знака (рис.1.6).

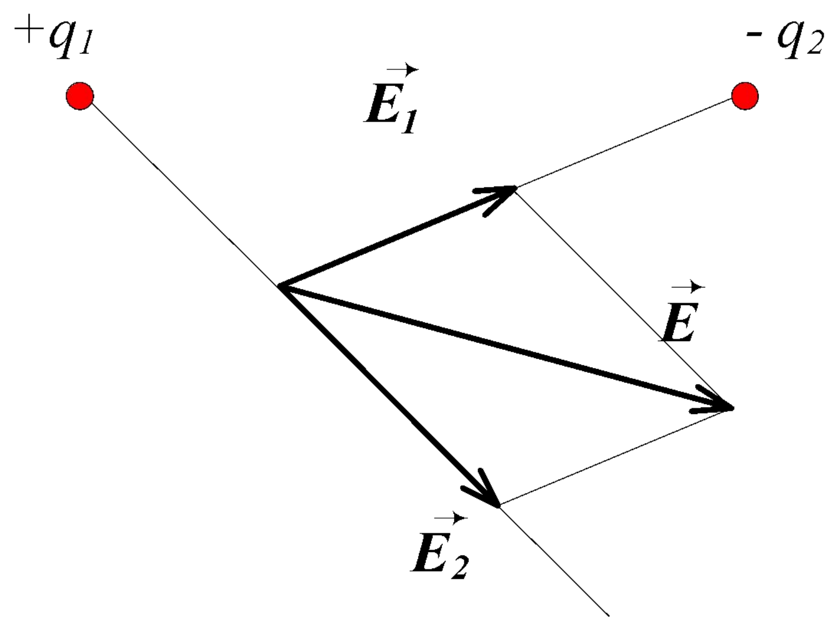

Рис. 1.6.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Модуль вектора E рассчитывается по теореме косинусов.

4. Поток вектора напряженности электростатического поля. Теорема Гаусса.

Рассмотрим произвольную поверхность S, расположенную в электростатическом поле. Пусть в каждой точке поверхности нам известны значение вектора напряженности $\vec{E}$ и его направление (рис 1.7). Выделим элементарную площадку dS на этой поверхности и построим единичный вектор нормали к ней $\vec{n}$ ($|\vec{n}|=1$).

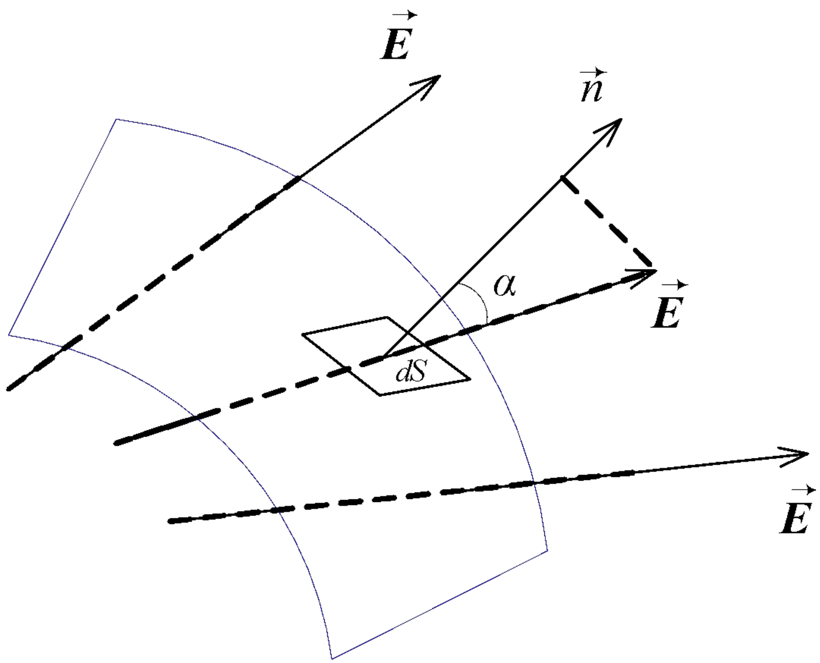

Рис. 1.7.

Потоком вектора $\vec{E}$ через замкнутую поверхность S называется интеграл:

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) \tag{9}$$

Согласно свойствам скалярного произведения векторов интеграл (9) можно записать по-другому:

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \oint_S E dS \cos\alpha = \oint_S E_n dS$$

где α – угол между векторами $\vec{E}$ и $\vec{n}$, а E_n есть проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль к площадке dS

Поток – величина скалярная, он может быть как положительным, так и отрицательным; знак потока зависит от угла α .

Если величина вектора $\vec{E}$ одинакова на всей поверхности и угол, под которым вектор $\vec{E}$ «протыкает» поверхность везде одинаков (рис. 1.8), поток .

$$\Phi_E = ES\cos\alpha$$

Таким образом, поток создается нормальной составляющей вектора $\vec{E}$. Если вектор $\vec{E}$ направлен по касательной к поверхности, не «протыкает» ее, то поток в этом случае равен нулю.

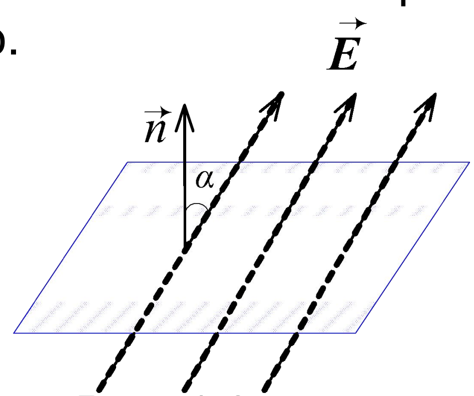

Рис. 1.8.

Теорема Гаусса. *Поток вектора напряженности электростатического поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме электрических зарядов, находящихся внутри этой поверхности, деленной на ε_0.*

В качестве простого доказательства этой теоремы проверим справедливость этой теоремы для случая точечного заряда.
Построим вокруг положительного точечного заряда величиной q сферу произвольного радиуса r с центром в той точке, где находится заряд q (рис.1.9).

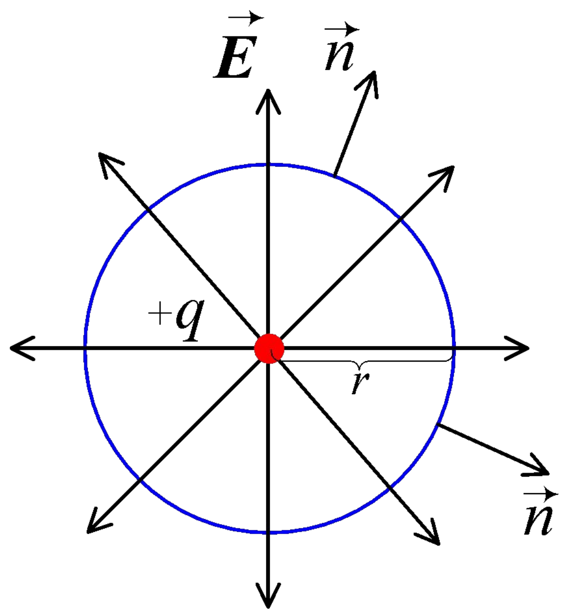

Рис. 1.9.

Следовательно, в любой точке построенной сферической поверхности напряженность поля одинакова и равна

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Вектор $\vec{E}$ перпендикулярен поверхности сферы, во всех ее точках, и направлен от заряда по силовой линии вдоль радиуса сферы. Пользуясь определением (9), рассчитаем поток через замкнутую поверхность построенной сферы:

$$\Phi_E = ES\cos 0^0 = \frac{q 4\pi r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Видно, теорема оказалась справедлива для случая точечного заряда.
Гаусс доказал, что поток не изменится, если изменить радиус сферы, сместить ее центр, деформировать сферу, сделать складки на ее поверхности (рис.1.10).

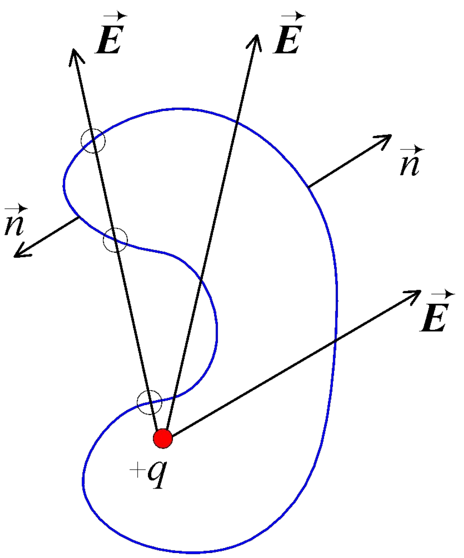

Рис. 1.10.

Итак, теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме в *интегральной форме* для любого количества зарядов внутри сферы может быть записана в виде:

$$\oint_s \vec{E}d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i \tag{10}$$

Дифференциальную форму теоремы получил Остроградский. Если заряд распределен равномерно внутри замкнутой поверхности объемом ΔV, можно выразить этот заряд через объемную плотность заряда ρ :

$$q = \rho\Delta V.$$

Тогда поток вектора через эту поверхность согласно доказанной теореме:

$$\Phi_E = \frac{\rho\Delta V}{\varepsilon_\theta}.$$

Теперь разделим обе части равенства на ΔV и будем «стягивать» этот объем в точку. Тогда в пределе

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Phi_E}{\Delta V} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Выражение слева называется **дивергенцией вектора** $\vec{E}$:

$$\lim \frac{\Phi_E}{\Delta V} \; при \; \Delta V \to 0$$ обозначают $$\frac{d\Phi_E}{dV} = div\vec{E}$$

Дивергенция в декартовых координатах вычисляется по формуле:

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Итак, **в дифференциальной форме теорема Остроградского** для электростатического поля в вакууме имеет вид:

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (11)$$

В интегральной форме полная математическая запись теоремы Остроградского – Гаусса имеет вид:

$$\oint_S (\vec{E}d\vec{S}) = \int_V div\vec{E}dV$$

то есть показывает связь потока вектора с его дивергенцией.

5. Применение теоремы Гаусса к расчету полей заряженных тел.

1. Заряженная равномерно по поверхности сфера. Рассмотрим сферическую поверхность радиуса R с поверхностной плотностью заряда $\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2}$

Нужно найти зависимость величины напряженности поля сферы от расстояния до ее центра $E(r)$.

Определим поле **внутри сферы, когда** $r > R$. Построим внутри сферы концентрическую с ней сферическую поверхность радиуса r_1 см. рис. 1.11.

Поток вектора через эту поверхность имеет вид:

$$\Phi_E = ES = E4\pi \cdot r_1^{\,2}$$

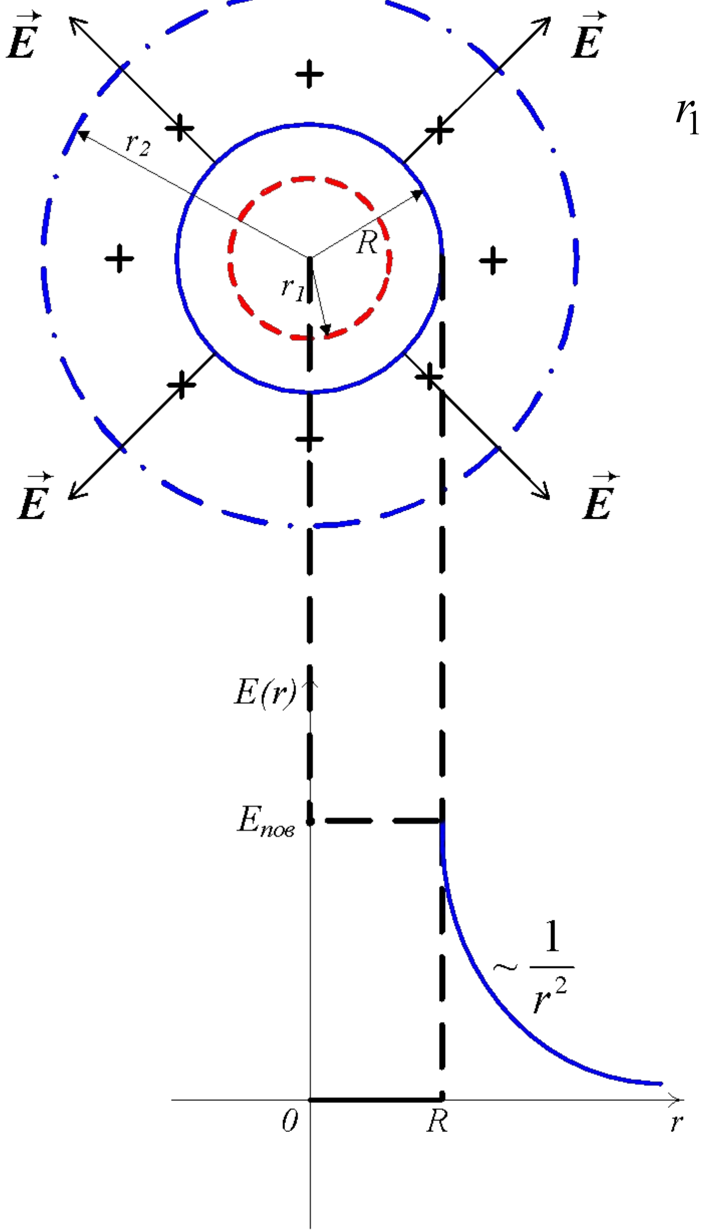

Рис. 1.11.

Поскольку внутри поверхности радиуса r_1 заряды отсутствуют, то на основании теоремы Гаусса Φ_E должен быть равен нулю. Следовательно, и напряженность поля внутри заряженной по поверхности сферы будет равна нулю $E(r < R) = 0$ (рис 1.11).

Далее **для внешней области** $r \geq R$ строим вспомогательную сферу радиуса r_2 и определяем поток через ее поверхность:

$$\Phi_E = ES = E4\pi \cdot r_2^{\,2}$$

.

Однако в этом случае он будет равен

$$\Phi_E = ES = E4\pi \cdot r_2^{\,2} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Отсюда получаем:

$$E(r \geq R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^{\,2}} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^{\,2}} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r_2^{\,2}}. \qquad (12)$$

Таким образом, поле внутри сферы отсутствует, а вне сферы совпадает с полем точечного заряда, равного заряду сферы и помещенного в ее центре (рис. 1.11).

На поверхности сферы, напряженность поля равна:

$$E\ (r = R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Применяя теорему Гаусса можно найти распределение поля: **2. Равномерно заряженной бесконечно протяжённой плоскости с поверхностной плотностью зарядов** σ **.** Оно однородно и имеет вид:

$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\ при\ x > 0 \quad \text{и} \quad E_x = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\ при\ x < 0 \qquad (13)$$

3. Поле плоского конденсатора внутри однородно, снаружи отсутствует и имеет вид:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (14)$$

4. Поле бесконечной однородно заряженной нити имеет вид:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}, \qquad (15)$$

где $\tau = q / l = dq / dl$ - линейная плотность заряда нити.

Из соотношения видно, что <u>напряженность поля бесконечной заряженной равномерно нити убывает обратно пропорционально расстоянию до нити.</u>