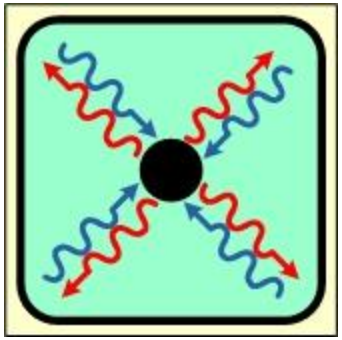
5. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ.

5.3. Постановка задачи о равновесном тепловом излучении.

5.3. Постановка задачи о равновесном тепловом излучении.

Что такое равновесное тепловое излучение?



1. Пусть абсолютно чёрное тело находится внутри отражающей (зеркальной) полости. Тело нагрето до некоторой температуры T. В результате оно излучает электромагнитные волны.

2. Излучённые телом воны остаются внутри полости. Возникшее таким образом электромагнитное поле внутри полости можно рассматривать, как систему, обладающую многими степенями свободы. Следовательно, можно считать, что эта система имеет некоторую температуру T_1.

3. Тело не только излучает электромагнитные волны, но поглощает их (тем более, что оно абсолютно чёрное). Поэтому в конце концов возникает ситуация, когда количество энергии, получаемой телом в единицу времени становится равным количеству энергии, излучаемой телом в единицу времени.

$$Q_u = Q_n.$$

Между электромагнитным полем и абсолютно чёрным телом устанавливается тепловое (термодинамическое) равновесие. Это также означает, что

$$T = T_1.$$

5.3. Постановка задачи о равновесном тепловом излучении.

Что нужно определить?

Необходимо определить спектральную плотность потока равновесного излучения $r(\lambda, T)$ абсолютно чёрного тела, соответствующую температуре T. При этом во-первых, полученная кривая должна соответствовать закону смещения Вина, а во-вторых, интегральная энергетическая светимость абсолютно чёрного тела должна выражаться законом Стефана-Больцмана:

$$R(T) = \int_0^\infty r(\lambda, T)\, d\lambda = \sigma T^4.$$

Как будем решать задачу? (План действий).

1. Установим связь между излучательной способностью тела (количеством энергии, испускаемой телом в единицу времени с единицы поверхности) со спектральной плотностью излучения (т. е. энергией излучения, приходящейся на малый интервал частот от ν до $\nu + d\nu$).

Излучательная способностью характеризует свойства тела, а спектральная плотность излучения – свойства излучения, окружающего тело в полости. В некотором смысле это действие является подготовительным.

5.3. Постановка задачи о равновесном тепловом излучении.

2. Определим число степеней свободы электромагнитного излучения, заполняющего полость. Это позволит определить энергию этого излучения и определить его температуру, пользуясь формулой

$$\langle E \rangle = N \cdot \frac{1}{2} kT,$$

где N – число степеней свободы, k – постоянная Больцмана, T – температура.

Так как излучающее чёрное тело находится в тепловом равновесии с излучением, их температуры равны.

3. Определим спектральную плотность энергии электромагнитного излучения, заполняющего полость. Пользуясь установленной ранее (см. п.1) связью между спектральной плотностью излучения и излучательной способностью тела, определим излучательную способность и проверим, соответствует ли полученная формула эксперименту (т. е. законам Стефана-Больцмана и Вина).

4. В процессе рассуждений будем пользоваться доказанной ранее теоремой Кирхгофа.

5.4. Связь между излучательной способностью тела и спектральной плотностью излучения в полости.

Излучательная способность тела (спектральная плотность потока излучения) – энергия, излучаемая в единицу времени с единицы площади поверхности тела в направлении нормали к поверхности на частотах, принадлежащих малому интервалу от ν до ν + dν (или с длинами волн в интервале от λ до λ + dλ).

$$r_\nu = \frac{\Delta \Phi}{\Delta \nu} = \frac{1}{S \Delta \nu} \frac{dE}{dt}.$$

Поток лучистой энергии – энергия, излучаемая в единицу времени с единицы площади поверхности тела в направлении нормали к поверхности на всех частотах.

$$\Phi = \frac{\Delta E}{\Delta S \Delta t}, \qquad \Phi = \frac{1}{S} \frac{dE}{dt}.$$

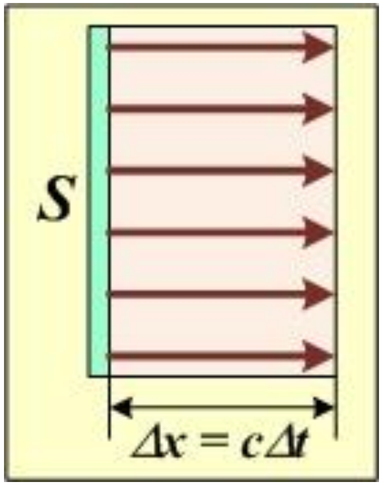
Спектральная плотность энергии излучения – плотность энергии излучения, приходящаяся на интервал частот от ν до ν + dν (или с длинами волн в интервале от λ до λ + dλ

$$w_\nu = \frac{1}{V} \frac{\Delta E}{\Delta \nu}.$$

Необходимо вывести формулу, связывающую величины r_ν (r_λ) с w_ν (w_λ).

Сначала рассмотрим простейший одномерный случай. пусть энергия может излучаться телом только в направлении нормали к его поверхности.

С площадки S на поверхности нагретого тела в направлении нормали к нему испускается со скоростью c электромагнитная волна. Излучательная способность тела



$$r_\nu = \frac{1}{S\Delta\nu}\frac{\Delta E}{\Delta t}.$$

За время Δt волна распространится на расстояние $\Delta x = c \cdot \Delta t$ от поверхности тела (см. рисунок).

Объём, занятый электромагнитным полем к моменту времени Δt, $\Delta V = S \cdot c \cdot \Delta t$. (см. рисунок).

Энергия поля (все частоты) в объёме $\Delta V = S \cdot c \cdot \Delta t$ равна $\Delta E = w \cdot \Delta V = w \cdot S \cdot c \cdot \Delta t$.

Подставим это выражение в формулу для излучательной способности r_ν.

$$r_\nu = \frac{1}{S\Delta\nu}\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{S\Delta\nu}\frac{wSc\Delta t}{\Delta t} = \frac{wc}{\Delta\nu}$$

$$r_\nu = \frac{wc}{\Delta\nu}.$$

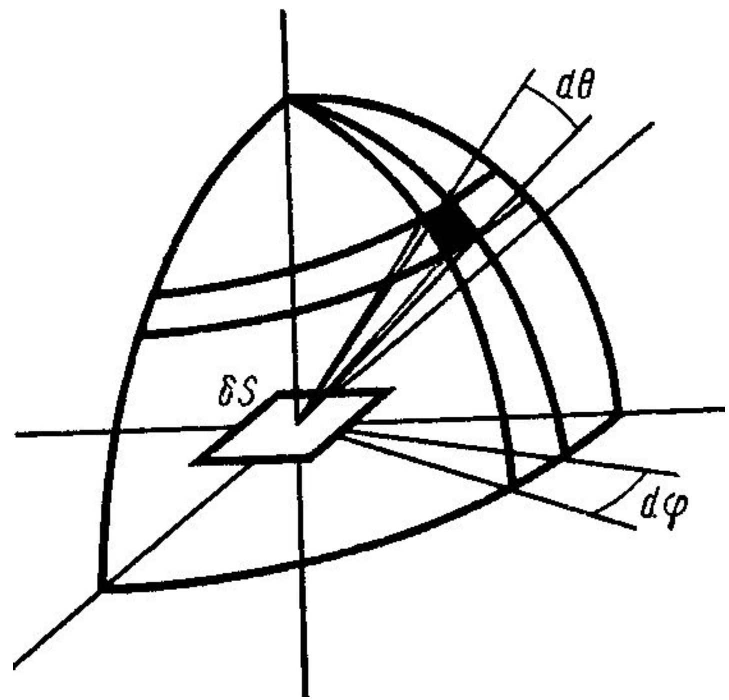
Здесь w – плотность энергии излучения на всех частотах. Спектральная плотность энергии излучения

$$w_\nu = \frac{1}{V}\frac{\Delta E}{\Delta\nu} = \frac{w}{\Delta\nu}.$$

Поэтому в одномерном случае

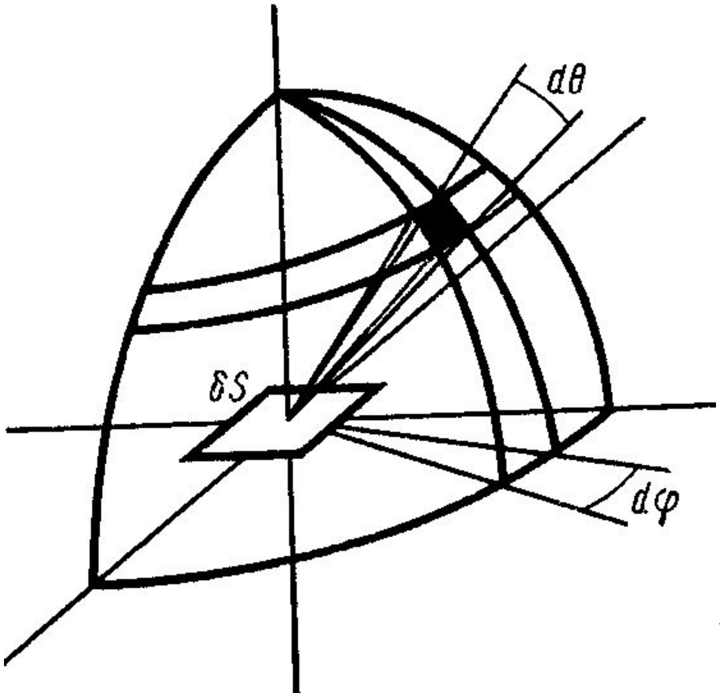
$$r_\nu = w_\nu c.$$

Если же излучение с элемента поверхности может происходить в произвольном направлении, то в выбранном направлении, определяемом телесным углом dΩ поток энергии

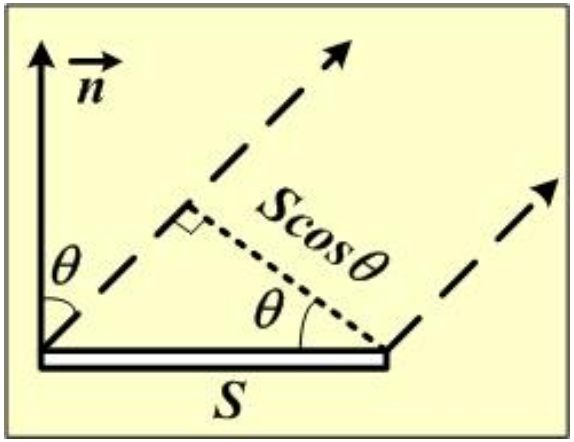


$$j_\nu = \frac{d\Phi}{d\Omega} = \frac{r_\nu d\nu}{d\Omega} = \frac{w_\nu c}{4\pi} d\nu$$

j_ν – плотность потока излучения с частотой ν.



$$j_\nu = \frac{d\Phi_\nu}{d\Omega}.$$



$$\Phi_\nu = \int_\Omega jS\cos\vartheta d\Omega.$$

$$d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi.$$

$$\Phi_\nu = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} jS\cos\vartheta\sin\vartheta d\vartheta d\varphi.$$

$$\Phi_\nu = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} jS\cos\vartheta\sin\vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{w_\nu c}{4\pi} S\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\sin\vartheta d\vartheta d\varphi =$$

$$= \frac{w_\nu c}{4\pi} S\cdot 2\pi\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\sin\vartheta d\vartheta = \frac{w_\nu c}{4\pi} S\cdot 2\pi(-1)\int_1^0 x dx = \frac{w_\nu c}{4\pi} S\cdot 2\pi\frac{1}{2} = \frac{w_\nu c}{4} S.$$

$$\boxed{r_\nu = \frac{\Phi_\nu}{S} = \frac{w_\nu c}{4}. \qquad r_\lambda = \frac{\Phi_\lambda}{S} = \frac{w_\lambda c}{4}.}$$

5.5. Определение числа степеней свободы электромагнитного излучения в полости.

5.5.1. Одномерный случай

Теперь наша задача состоит в определении числа степеней свободы, которыми обладает электромагнитное излучение в полости вокруг абсолютно чёрного тела.

Определив число степеней свободы, мы сможем выразить энергию электромагнитного поля через температуру. Так как система находится в термодинамическом равновесии, температура тела равно температуре излучения. Основываясь на этом, мы сможем выразить излучательную способность тела, как функцию температуры. (Спектральную плотность энергии ЭМП мы уже можем выражать через излучательную способность).

Полость замкнута. Система находится в состоянии термодинамического равновесия. Следовательно, энергия ЭМП в полости постоянна и никуда не переносится электромагнитными волнами.

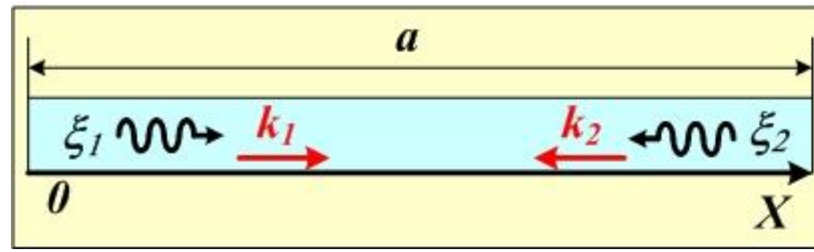
Очевидно, что единственной формой электромагнитной волны, которая не переносит энергию является стоячая волна. Следовательно, ЭМП в полости может существовать только в виде стоячих электромагнитных волн.

Будем считать, что с каждой стоячей электромагнитной волной связаны две степени свободы: одна – с колебаниями напряжённости электрического поля, вторая – с колебаниями напряжённости магнитного поля.

Чтобы найти число степеней свободы электромагнитного поля в полости, нужно найти число стоячих волн, возникающих в этой полости и умножить его на два.

Прежде, чем подсчитывать число степеней свободы, которыми обладает электромагнитное излучение в полости, отработаем методику такого подсчёта на более простой, одномерной системе.

Пусть электромагнитные волны могут распространяться только вдоль одной прямой, с которой мы свяжем ось OX. Волны могут отражаться от стенок и, следовательно, распространяться в двух противоположных направлениях.



На рисунке: a – размер одномерной полости; k_1 и k_2 – волновые векторы двух бегущих волн.

Запишем уравнения этих двух бегущих волн.

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx),$$

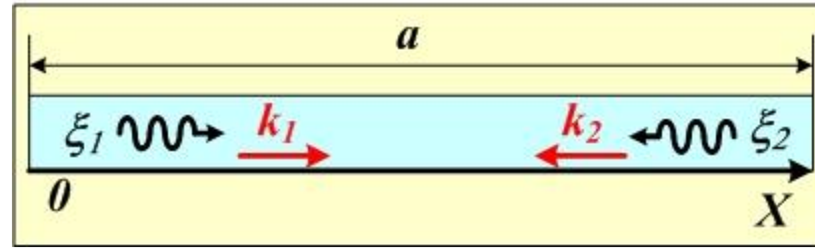
$$\xi_2 = A\cos(\omega t + kx + \alpha).$$

$$|k_1| = |k_2| = k,$$

Фаза α появляется в уравнении второй волны в результате отражения волны от стенки полости. В зависимости от условий отражения возможны два значения α:

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = \pi.$$

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx),$$
$$\xi_2 = A\cos(\omega t + kx + \alpha).$$



Результирующая стоячая волна есть сумма двух волн:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A\cos(\omega t - kx) + A\cos(\omega t + kx + \alpha) =$$
$$= 2A\cos\left(\frac{\omega t - kx + \omega t + kx + \alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega t - kx - \omega t - kx - \alpha}{2}\right) =$$
$$= 2A\cos\left(\frac{2\omega t + \alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{-2kx - \alpha}{2}\right) =$$
$$= 2A\cos\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(kx + \frac{\alpha}{2}\right).$$

1. При отражении $\alpha = \pi$ (отражение от оптически более плотной среды).

$$\xi = 2A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(kx + \frac{\pi}{2}\right) = 2A\sin(\omega t)\cdot\sin(kx).$$

$$\xi = 2A\sin(\omega t)\cdot\sin(kx).$$

Это уравнение стоячей волны, для которой положение узлов определяется условием

$$ka = m\pi.$$

Возможно образование таких стоячих волн, для которых модуль волнового вектора определяется условием

$$k_m = \frac{m\pi}{a}.$$

2. При отражении α = 0 (отражение от оптически менее плотной среды).

$$\xi = 2A\cos(\omega t)\cdot\cos(kx).$$

Это уравнение стоячей волны, для которой положение пучностей определяется условием

$$ka = m\pi.$$

Возможно образование таких стоячих волн, для которых модуль волнового вектора определяется условием

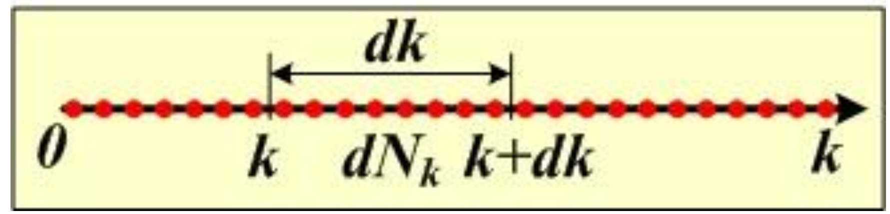
$$k_m = \frac{m\pi}{a}.$$

Таким образом, при любых условиях отражения возможно образование только таких стоячих волн, для которых модуль волнового вектора определяется условием

$$k_m = \frac{m\pi}{a}.$$

Возможные значения волнового вектора образуют дискретный набор точек на оси значений волнового вектора.

Число возможных значений волнового вектора в интервале от k до k + dk можно найти так.



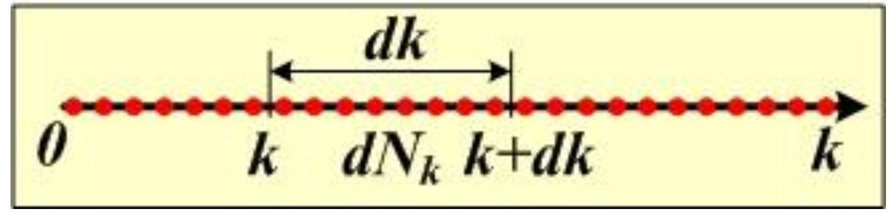
$$m = \frac{ka}{\pi}, \qquad m + dN_k = \frac{(k + dk)a}{\pi}.$$

$$m + dN_k - m = \frac{(k + dk)a}{\pi} - \frac{ka}{\pi},$$

$$dN_k = \frac{a}{\pi} dk.$$

dN_k – число стоячих волн, приходящееся на интервал значений волнового вектора от k до $k + dk$.

$$dN_k = \frac{a}{\pi} dk.$$



Каждому значению волнового вектора соответствует значение частоты ν, циклической частоты ω и длины волны λ. Поэтому от числа стоячих волн на интервал значений волнового вектора можно перейти к числу стоячих волн с частотой в интервале от ω до ω + dω или от ν до ν + dν.

$$k = \frac{\omega}{c}, \qquad dk = \frac{d\omega}{c}, \qquad dN_\omega = \frac{a}{\pi c} d\omega.$$

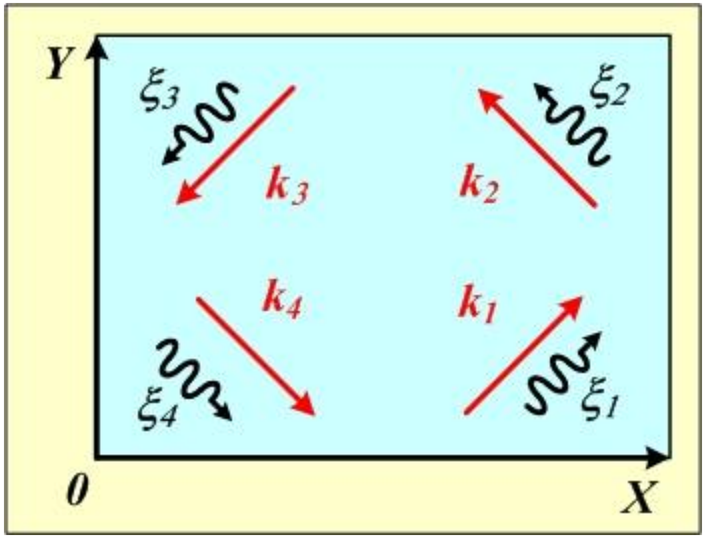
$$k = \frac{2\pi\nu}{c}, \qquad dk = \frac{2\pi d\nu}{c}, \qquad dN_\nu = \frac{2a}{c} d\nu.$$

Зная число стоячих волн с частотой в интервале от ω до ω + dω или от ν до ν + dν, а также зная, что на каждую стоячую волну приходится 2 степени свободы, а на каждую степень свободы в свою очередь приходится энергия, равная *kT*, можно определить плотность энергии излучения.

5.5. Определение числа степеней свободы электромагнитного излучения в полости.

5.5.2. Двумерный случай

Пусть электромагнитные волны могут распространяться только в одной плоскости, с которой мы свяжем оси *OX* и *OY*. Волны могут отражаться от стенок и, следовательно, распространяться внутри прямоугольной области с размерами *a* x *b*.



На рисунке: *a*, *b* – размеры двумерной полости; k_1, k_2, k_3 и k_4 – волновые векторы бегущих волн.

Запишем уравнения этих бегущих волн.

$$|k_1| = |k_2| = |k_3| = |k_4| = k.$$

$$\xi_1 = A\cos\left(\omega t - k_x x - k_y y\right),$$

$$\xi_2 = A\cos\left(\omega t + k_x x - k_y y\right),$$

$$\xi_3 = A\cos\left(\omega t + k_x x + k_y y\right),$$

$$\xi_4 = A\cos\left(\omega t - k_x x + k_y y\right).$$

Как было показано для одномерного случая, условия отражения не влияют на число возникающих стоячих волн, поэтому во всех уравнениях выбран только один вариант условий отражения.

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = \xi_{12} + \xi_{34}.$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = \xi_{12} + \xi_{34}.$$

$$\xi_1 = A\cos\left(\omega t - k_x x - k_y y\right),$$

$$\xi_2 = A\cos\left(\omega t + k_x x - k_y y\right).$$

$$\xi_{12} = A\cos\left(\omega t - k_x x - k_y y\right) + A\cos\left(\omega t + k_x x - k_y y\right) =$$

$$= 2A\cos\left(\frac{\omega t - k_x x - k_y y + \omega t + k_x x - k_y y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega t - k_x x - k_y y - \omega t - k_x x + k_y y}{2}\right) =$$

$$= 2A\cos\left(\frac{2\omega t - 2k_y y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2k_x x}{2}\right).$$

$$\xi_{12} = 2A\cos\left(\omega t - k_y y\right)\cdot\cos\left(k_x x\right).$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = \xi_{12} + \xi_{34}.$$

$$\xi_3 = A\cos\left(\omega t + k_x x + k_y y\right),$$

$$\xi_4 = A\cos\left(\omega t - k_x x + k_y y\right).$$

$$\xi_{34} = A\cos\left(\omega t + k_x x + k_y y\right) + A\cos\left(\omega t - k_x x + k_y y\right) =$$

$$= 2A\cos\left(\frac{\omega t + k_x x + k_y y + \omega t - k_x x + k_y y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega t + k_x x + k_y y - \omega t + k_x x - k_y y}{2}\right) =$$

$$= 2A\cos\left(\frac{2\omega t + 2k_y y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2k_x x}{2}\right).$$

$$\xi_{34} = 2A\cos\left(\omega t + k_y y\right)\cdot\cos\left(k_x x\right).$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = \xi_{12} + \xi_{34}.$$

$$\xi_{12} = 2A\cos\left(\omega t - k_y y\right)\cdot\cos\left(k_x x\right).$$

$$\xi_{34} = 2A\cos\left(\omega t + k_y y\right)\cdot\cos\left(k_x x\right).$$

$$\xi = \xi_{12} + \xi_{34} = 2A\cos\left(k_x x\right)\left[\cos\left(\omega t - k_y y\right) + \cos\left(\omega t + k_y y\right)\right] =$$

$$= 4A\cos\left(k_x x\right)\left[\cos\left(\frac{\omega t - k_y y + \omega t + k_y y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega t - k_y y - \omega t - k_y y}{2}\right)\right] =$$

$$= 4A\cos\left(k_x x\right)\left[\cos\left(\frac{2\omega t}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{-2k_y y}{2}\right)\right].$$

Уравнение стоячей волны в двумерном ящике:

$$\xi = 4A\cos\left(\omega t\right)\cdot\cos\left(k_x x\right)\cdot\cos\left(k_y y\right).$$

Подобным образом можно получить и уравнение стоячей волны в трёхмерной полости. Несложно догадаться, что оно будет иметь вид

$$\xi = 8A\cos(\omega t)\cdot\cos(k_x x)\cdot\cos(k_y y)\cdot\cos(k_z z).$$

Итак, уравнение стоячей волны в двумерном ящике имеет вид

$$\xi = 4A\cos(\omega t)\cdot\cos(k_x x)\cdot\cos(k_y y).$$

Запишем условия существования такой стоячей волны в двумерном ящике.

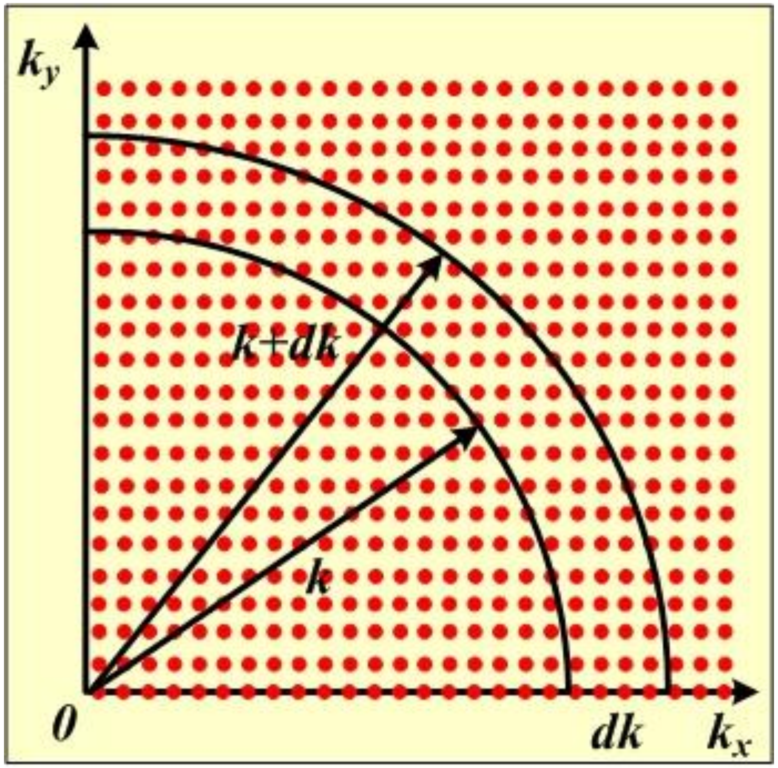
$$k_x x = m_1\pi, \quad k_x = \frac{m_1\pi}{a}.$$

$$k_y y = m_2\pi, \quad k_y = \frac{m_2\pi}{b}.$$

В двумерном ящике могут существовать стоячей волны только с такими значениями проекций волнового вектора на оси координат в пространстве волновых векторов.

Величины таких волновых векторов образуют дискретный набор точек на плоскости волновых векторов.

Каждая точка на плоскости волновых векторов соответствует такому значению волнового вектора при котором в двумерном ящике может возникнуть плоская волна. Иными словами, число точек на плоскости равно числу возможных стоячих волн.



Для того, чтобы сосчитать число стоячих волн, приходящихся на интервал значений волновых векторов от k до $k + dk$, нужно пересчитать точки внутри части кольца с внутренним радиусом k и внешним радиусом $k + dk$.

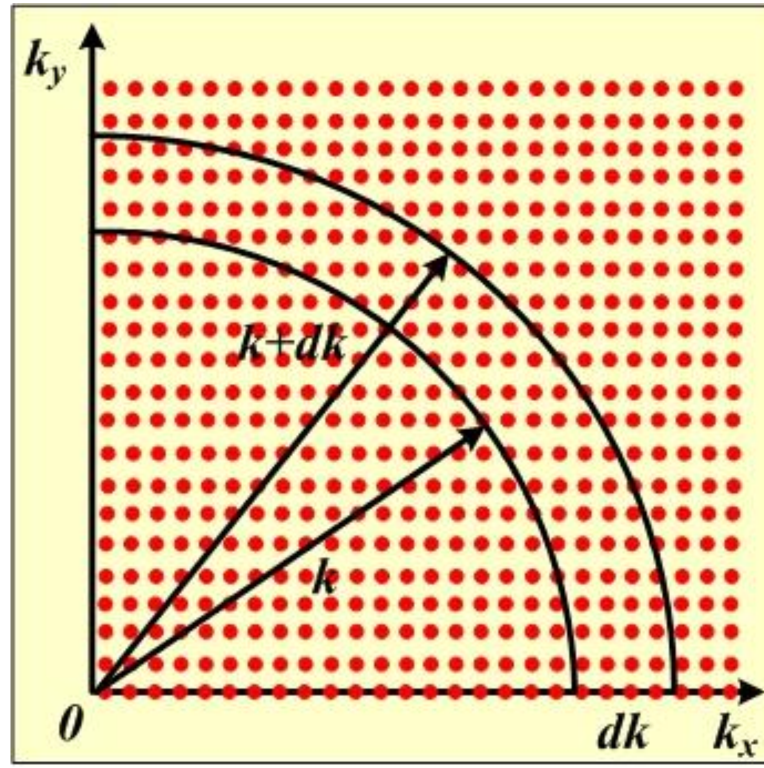
$$dN_k = \frac{S_k}{4S_1},$$

где S_k – площадь всего кольца, S_1 – площадь на фазовой плоскости, приходящаяся на одно колебательное состояние (на одну стоячую волну).

$$S_k = 2\pi k dk.$$

На оси k_x на одно колебательное состояние (на одну стоячую волну) приходится отрезок длиной

$$\Delta k_x = \frac{\pi}{a}.$$



На оси k_y на одно колебательное состояние (на одну стоячую волну) приходится отрезок длиной

$$\Delta k_y = \frac{\pi}{b}.$$

На одно колебательное состояние (на одну стоячую волну) приходится площадка на фазовой плоскости

$$S_1 = \Delta k_y \Delta k_x = \frac{\pi}{b}\frac{\pi}{a} = \frac{\pi^2}{ab}.$$

$$dN_k = \frac{S_k}{4S_1} = \frac{2\pi \cdot ab \cdot kdk}{4 \cdot \pi^2} = \frac{S}{2\pi} kdk.$$

Где S – площадь двумерной области, в которой могут распространяться волны.

От числа стоячих волн на интервал значений волнового вектора перейдём к числу стоячих волн с частотой в интервале от ω до ω + dω или от ν до ν + dν.

$$k = \frac{\omega}{c}, \qquad dk = \frac{d\omega}{c}, \qquad dN_k = \frac{S}{2\pi} k dk.$$

$$dN_\omega = \frac{S}{2\pi} \frac{\omega}{c^2} d\omega.$$

$$k = \frac{2\pi\nu}{c}, \qquad dk = \frac{2\pi d\nu}{c}, \qquad dN_k = \frac{S}{2\pi} k dk.$$

$$dN_\nu = \frac{2\pi S}{c^2} \nu d\nu.$$

Зная число стоячих волн с частотой в интервале от ω до ω + dω или от ν до ν + dν, а также зная, что на каждую стоячую волну приходится 2 степени свободы, а на каждую степень свободы в свою очередь приходится энергия, равная kT, можно определить плотность энергии излучения.