

5.14. Примеры решения задач.

Квантовые свойства
света.

А1. Средняя длина волны излучения лампы накаливания с металлической спиралью равна 1200 нм. Найти число фотонов, испускаемых за единицу времени лампой мощностью 200Вт.

Решение.

Дано:
 $\lambda = 1200 \text{ нм}$
 $P = 200 \text{ Вт}$

Число фотонов, испускаемых лампой, можно найти, разделив излучённую энергию на энергию одного фотона:

$$\Delta N = \frac{\Delta E}{E_1}$$

$\Delta N/t - ?$

Энергия одного фотона $E_1 = h\nu$, $\nu = \frac{c}{\lambda}$, $E_1 = h \frac{c}{\lambda}$.

Излучённая энергия $\Delta E = Pt$.

$$\Delta N = \frac{\Delta E}{E_1} = \frac{Pt}{hc} \lambda.$$

Число фотонов, излучённых в единицу времени $\frac{\Delta N}{t} = \frac{P\lambda}{hc}$.

$$\frac{\Delta N}{t} = \frac{P\lambda}{hc} = \frac{200 \cdot 1,2 \cdot 10^{-6}}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} \approx 1,2 \cdot 10^{22}.$$

Ответ: $\frac{\Delta N}{t} \approx 1,2 \cdot 10^{22}.$

A2. Длина волны света, соответствующая красной границе фотоэффекта, для некоторого металла $\lambda_k = 275 \text{ нм}$. Найти работу выхода электрона из металла, максимальную скорость электронов, вырванных из металла светом длиной волны $\lambda = 180 \text{ нм}$.

Решение.

Дано:
 $\lambda = 180 \text{ нм}$
 $\lambda_k = 275 \text{ нм}$

Фотоэффект можно описать с помощью уравнения Эйнштейна:

$$h \frac{c}{\lambda} = A + \frac{mV^2}{2}.$$

$A - ?$
 $V - ?$

Красная граница фотоэффекта – это наименьшая длина волны, при которой ещё возможен фотоэффект, поэтому, если $\lambda = \lambda_k$,

$$\frac{mV^2}{2} = 0.$$

$$h \frac{c}{\lambda_k} = A.$$

Подставим это выражение для работы выхода в формулу Эйнштейна:

$$h \frac{c}{\lambda} = h \frac{c}{\lambda_k} + \frac{mV^2}{2}.$$

Отсюда:

$$\frac{mV^2}{2} = h \frac{c}{\lambda} - h \frac{c}{\lambda_k}.$$

A2. Длина волны света, соответствующая красной границе фотоэффекта, для некоторого металла $\lambda_k = 275 \text{ нм}$. Найти работу выхода электрона из металла, максимальную скорость электронов, вырванных из металла светом длиной волны $\lambda = 180 \text{ нм}$.

Решение (продолжение).

$$\frac{mV^2}{2} = h \frac{c}{\lambda} - h \frac{c}{\lambda_k}.$$

$$V = \sqrt{\frac{2hc}{m} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_k} \right)}.$$

Подстановка числовых данных приводит к следующим ответам:

$$A \approx 7,2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 4,5 \text{ эВ}.$$

$$v = 9,1 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

44. Фотоны с энергией $E = 4,9 \text{ эВ}$ вырывают электроны из металла с работой выхода $A = 4.5 \text{ эВ}$. Найти максимальный импульс p , передаваемый поверхности металла при вылете каждого электрона.

Решение.

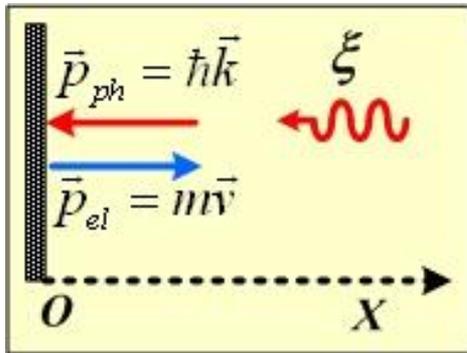
Дано:
 $A = 4,5 \text{ эВ}$
 $E = 4,9 \text{ эВ}$

$p - ?$

Вылет электрона происходит после поглощения поверхностью фотона. Запишем закон сохранения импульса для этого процесса:

$$\vec{p}_{ph} = \vec{p}_{el} + \vec{p}.$$

Здесь \vec{p}_{ph} – импульс фотона, \vec{p}_{el} – импульс электрона \vec{p} – импульс, полученный поверхностью.



Перепишем закон сохранения импульса для этого процесса в проекциях на ось Ox (см. рис.)

$$-p_{ph} = p_{el} - p.$$

$$p = p_{el} + p_{ph}.$$

Подставим в это уравнение выражения для импульсов фотона и электрона.

$$p = mv + \frac{E}{c}.$$

Скорость электрона определим из уравнения Эйнштейна.

A4. Фотоны с энергией $E = 4,9 \text{ эВ}$ вырывают электроны из металла с работой выхода $A = 4.5 \text{ эВ}$. Найти максимальный импульс p , передаваемый поверхности металла при вылете каждого электрона.

Решение (продолжение).

$$E = A + \frac{mV^2}{2}.$$

Отсюда:

$$V = \sqrt{\frac{2}{m}(E - A)}.$$

Подставим найденное выражение для скорости электрона в формулу для импульса, передаваемого пластине:

$$p = mv + \frac{E}{c} = m\sqrt{\frac{2}{m}(E - A)} + \frac{E}{c}.$$

$$p = \sqrt{2m(E - A)} + \frac{E}{c}.$$

45. Найти постоянную Планка h , если известно, что электроны, вырываемые из металла светом с частотой $\nu_1 = 2,2 \cdot 10^{15}$ Гц, полностью задерживаются разностью потенциалов $U_1 = 6,6$ В, а вырываемые светом с частотой $\nu_2 = 4,6 \cdot 10^{15}$ Гц – разностью потенциалов $U_2 = 16,5$ В.

Решение.

<p>Дано:</p> $\nu_1 = 2,2 \cdot 10^{15}$ Гц $U_1 = 6,6$ В $\nu_2 = 4,6 \cdot 10^{15}$ Гц $U_2 = 16,5$ В	<p>Запишем уравнение Эйнштейна для каждого из двух процессов:</p> $\left[\begin{array}{l} h\nu_1 = A + \frac{mV_1^2}{2}; \\ h\nu_2 = A + \frac{mV_2^2}{2}. \end{array} \right.$
<p>$h - ?$</p>	

В каждом из двух случаев запирающее напряжение связано с кинетической энергией электрона соотношением

$$eU = \frac{mV^2}{2}.$$

Перепишем уравнение Эйнштейна для каждого из двух процессов:

$$\left[\begin{array}{l} h\nu_1 = A + eU_1, \\ h\nu_2 = A + eU_2. \end{array} \right.$$

45. Найти постоянную Планка h , если известно, что электроны, вырываемые из металла светом с частотой $\nu_1 = 2,2 \cdot 10^{15}$ Гц, полностью задерживаются разностью потенциалов $U_1 = 6,6$ В, а вырываемые светом с частотой $\nu_2 = 4,6 \cdot 10^{15}$ Гц – разностью потенциалов $U_2 = 16,5$ В.

Решение (продолжение).

$$\left[\begin{array}{l} h\nu_1 = A + eU_1, \\ h\nu_2 = A + eU_2. \end{array} \right.$$

Вычтем из второго уравнения системы первое:

$$h\nu_2 - h\nu_1 = A + eU_2 - A - eU_1,$$

$$h(\nu_2 - \nu_1) = e(U_2 - U_1).$$

Отсюда постоянная Планка:

$$h = \frac{e(U_2 - U_1)}{(\nu_2 - \nu_1)}.$$

$$h = \frac{e(U_2 - U_1)}{(\nu_2 - \nu_1)} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot (16,5 - 6,6)}{(4,6 - 2,2) \cdot 10^{15}} \approx 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ (Дж}\cdot\text{с)}.$$

46. В одном из опытов П.Н.Лебедева при падении света угол поворота крестовины, подвешенной на упругой нити, был равен $\alpha = 10'$. Найти световое давление и мощность падающего света. Диаметр кружка $d = 5 \text{ мм}$, расстояние от центра кружка до оси вращения $r = 9,2 \text{ мм}$, постоянная момента кручения $k = 2,2 \cdot 10^{-11} \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}$.

Дано:

$$\alpha = 10'$$

$$d = 5 \text{ мм}$$

$$r = 9,2 \text{ мм}$$

$$k = 2,2 \cdot 10^{-11} \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}$$

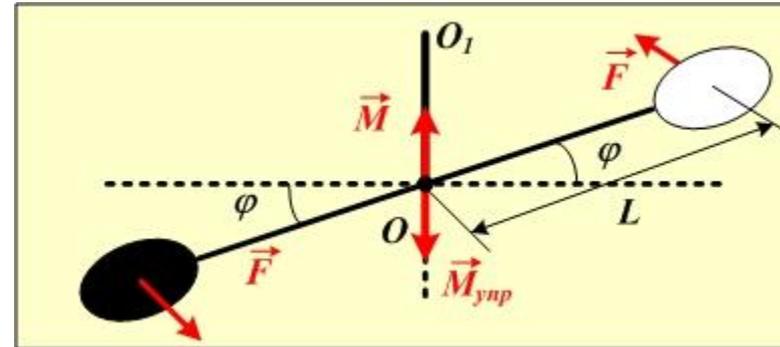
$P - ? N - ?$

Решение.

«Вертушка Лебедева» находится в равновесии, поэтому

$$\sum_i \overset{\square}{M}_i = 0.$$

(сумма моментов сил, приложенных к телу, равна нулю)



В проекции на вертикальную ось (см. рисунок)

$$M - M_{\text{упр}} = 0,$$

где M – суммарный момент сил давления света, $M_{\text{упр}}$ – момент сил упругости нити.

Каждый «лепесток» вертушки с одной стороны зеркальный, а с другой - чёрный. На каждую сторону каждого лепестка действует сила давления света.

46. В одном из опытов П.Н.Лебедева при падении света угол поворота крестовины, подвешенной на упругой нити, был равен $\alpha = 10'$. Найти световое давление и мощность падающего света. Диаметр кружка $d = 5 \text{ мм}$, расстояние от центра кружка до оси вращения $r = 9,2 \text{ мм}$, постоянная момента кручения $k = 2,2 \cdot 10^{-11} \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$.

Решение (продолжение).

Суммарная сила давления света, действующая на каждый лепесток, равна по величине

$$F = F_1 - F_2,$$

где F_1 - сила давления света, действующая на зеркальную поверхность, F_2 - сила давления света, действующая на чёрную поверхность.

Величина момента сил давления, действующих на один лепесток вертушки

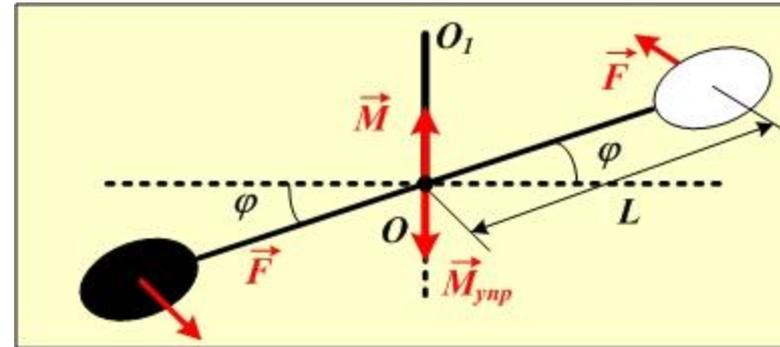
$$M_1 = (F_1 - F_2) L.$$

Вертушка имеет четыре лепестка, поэтому суммарный момент сил давления света

$$M = 4M_1 = 4(F_1 - F_2) L.$$

Величина момента упругих сил

$$M_{\text{упр}} = k\varphi.$$



46. В одном из опытов П.Н.Лебедева при падении света угол поворота крестовины, подвешенной на упругой нити, был равен $\alpha = 10'$. Найти световое давление и мощность падающего света. Диаметр кружка $d = 5 \text{ мм}$, расстояние от центра кружка до оси вращения $r = 9,2 \text{ мм}$, постоянная момента кручения $k = 2,2 \cdot 10^{-11} \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$.

Решение (продолжение).

Теперь условие равновесия вертушки можно переписать так:

$$M - M_{\text{упр}} = 0,$$

$$4(F_1 - F_2)L = k\varphi.$$

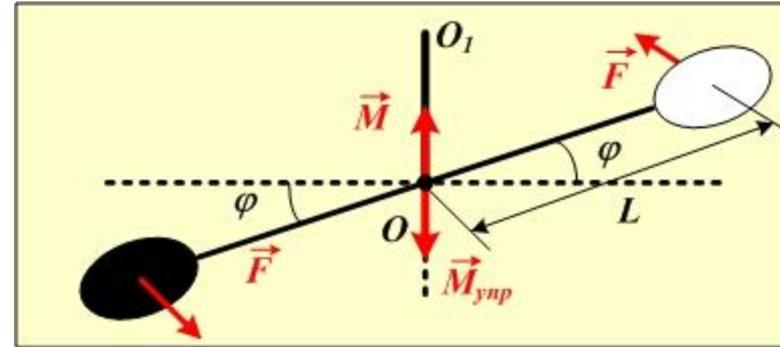
Найдём силы давления F_1 и F_2 :

$$F_1 = p_1 S = (1 + \rho_1) \frac{W}{c} S = 2 \frac{W}{c} S.$$

$$F_2 = p_2 S = (1 + \rho_2) \frac{W}{c} S = \frac{W}{c} S.$$

$$F_1 - F_2 = 2 \frac{W}{c} S - \frac{W}{c} S = \frac{W}{c} S.$$

Подставим полученное выражение в условие равновесия:



46. В одном из опытов П.Н.Лебедева при падении света угол поворота крестовины, подвешенной на упругой нити, был равен $\alpha = 10'$. Найти световое давление и мощность падающего света. Диаметр кружка $d = 5 \text{ мм}$, расстояние от центра кружка до оси вращения $r = 9,2 \text{ мм}$, постоянная момента кручения $k = 2,2 \cdot 10^{-11} \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$.

Решение (продолжение).

$$4(F_1 - F_2)L = k\varphi.$$

$$F_1 - F_2 = \frac{W}{c}S.$$

$$4\frac{W}{c}SL = k\varphi.$$

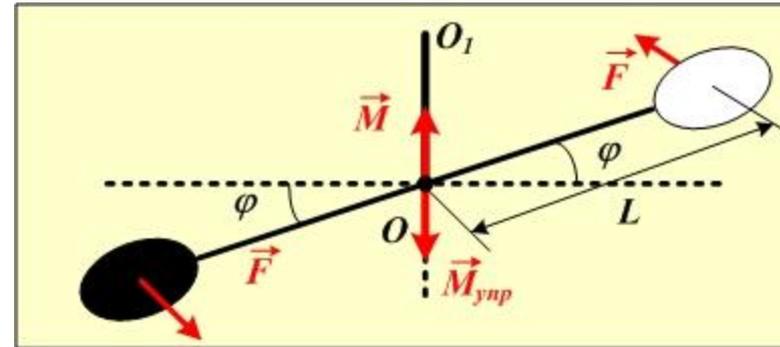
$$W = \frac{1}{S} \frac{\Delta E}{\Delta t} -$$

энергия, передаваемая единице площади поверхности тела излучением в единицу времени.

$$N = \frac{\Delta E}{\Delta t} -$$

мощность излучения.

$$W = \frac{1}{S} \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{N}{S}$$

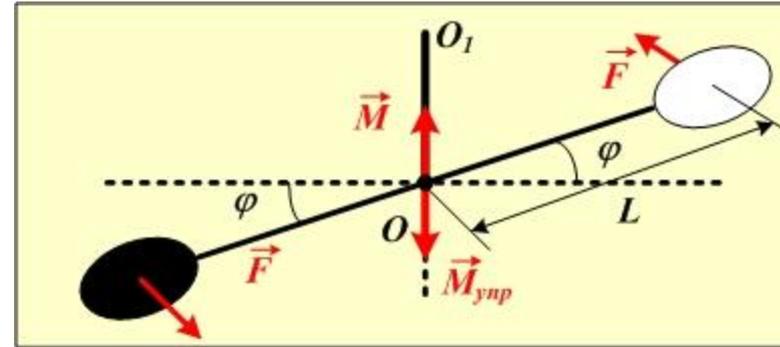


46. В одном из опытов П.Н.Лебедева при падении света угол поворота крестовины, подвешенной на упругой нити, был равен $\alpha = 10'$. Найти световое давление и мощность падающего света. Диаметр кружка $d = 5 \text{ мм}$, расстояние от центра кружка до оси вращения $r = 9,2 \text{ мм}$, постоянная момента кручения $k = 2,2 \cdot 10^{-11} \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$.

Решение (продолжение).

$$4 \frac{W}{c} SL = k\varphi. \quad W = \frac{1}{S} \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{N}{S}$$

$$4 \frac{N}{cS} SL = k\varphi.$$



Отсюда мощность излучения

$$N = \frac{ck\varphi}{4L}.$$

$$N = \frac{ck\varphi}{4L} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 2,2 \cdot 10^{-11} \cdot 10 \cdot 3,142}{4 \cdot 9,2 \cdot 10^{-3} \cdot 60 \cdot 180} \approx 5,2 \cdot 10^{-4} \text{ (Вт)}.$$

47. Найти световое давление на стенки электрической 100-ваттной лампы. Колба представляет собой сферический сосуд радиусом $r = 5$ см. Стенки лампы отражают 40% и пропускают 60% падающего на них света. Считать, что вся потребляемая мощность идёт на излучение.

Решение.

Дано:
 $\rho = 0,4$
 $r = 5$ см
 $N = 100$ Вт

Давление света на некоторую поверхность определяется формулой

$$P = (1 + \rho) \frac{W}{S}$$

$P - ?$

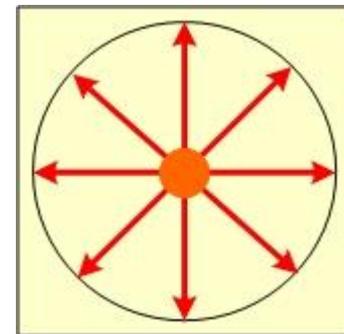
$W = \frac{1}{S} \frac{\Delta E}{\Delta t}$ — энергия, передаваемая единице площади поверхности тела излучением в единицу времени.

Будем считать, что излучение, испускаемое лампой, распространяется вдоль радиусов сферической колбы лампы. Энергия, излучаемая лампой

$$\Delta E = N \Delta t.$$

Площадь поверхности сферической колбы лампы

$$S = 4\pi r^2.$$



Подставим выражения для энергии излучения, площади поверхности сферы в формулу для давления света.

47. Найти световое давление на стенки электрической 100-ваттной лампы. Колба представляет собой сферический сосуд радиусом $r = 5$ см. Стенки лампы отражают 40% и пропускают 60% падающего на них света. Считать, что вся потребляемая мощность идёт на излучение.

Решение (продолжение).

$$P = (1 + \rho) \frac{W}{c}. \quad W = \frac{1}{S} \frac{\Delta E}{\Delta t}. \quad \Delta E = N \Delta t. \quad S = 4\pi r^2.$$

$$P = (1 + \rho) \frac{W}{c} = (1 + \rho) \frac{1}{Sc} \frac{\Delta E}{\Delta t} = (1 + \rho) \frac{1}{4\pi r^2 c} \frac{N \Delta t}{\Delta t}.$$

$$P = (1 + \rho) \frac{N}{4\pi r^2 c}.$$

$$P = (1 + 0,4) \frac{100}{4 \cdot 3,14 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^8} \approx 15 \cdot 10^{-6} \text{ (Па)}.$$

48. Какова была длина волны λ_0 рентгеновского излучения, если при комптоновском рассеянии этого излучения графитом под углом $\theta = 60^\circ$ длина волны рассеянного излучения оказалась равной $\lambda = 25,4 \text{ нм}$?

Дано:

$$\theta = 60^\circ$$

$$\lambda = 25,4 \text{ нм}$$

$$\lambda_0 - ?$$

Решение.

Увеличение длины волны рассеянных фотонов при неупругом рассеянии на электронах (эффекте Комптона) определяется формулой:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \Lambda(1 - \cos \vartheta),$$

$$\Lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc} = \frac{h}{mc} = 2,42 \cdot 10^{-12}$$

$$\lambda_0 = \lambda - \Lambda(1 - \cos \vartheta).$$

$$\lambda_0 = \lambda - \Lambda(1 - \cos \vartheta) = (25,4 - 2,42 \cdot (1 - 0,5)) \cdot 10^{-12} \approx 24,2 \cdot 10^{-12} (\text{м}).$$

49. Рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda = 20$ пм испытывают комптоновское рассеяние под углом $\theta = 90^\circ$. Найти изменение $\Delta\lambda$ длины волны рентгеновских лучей при рассеянии, а также энергию E и импульс p электрона отдачи.

Дано:

$$\lambda = 20 \text{ пм}$$

$$\theta = 90^\circ$$

$\Delta\lambda$ - ?

p - ?

E - ?

Решение.

Увеличение длины волны рассеянных фотонов при неупругом рассеянии на электронах (эффекте Комптона) определяется формулой:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \Lambda(1 - \cos \vartheta),$$

$$\Lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc} = \frac{h}{mc} = 2,42 \cdot 10^{-12} (\text{м}).$$

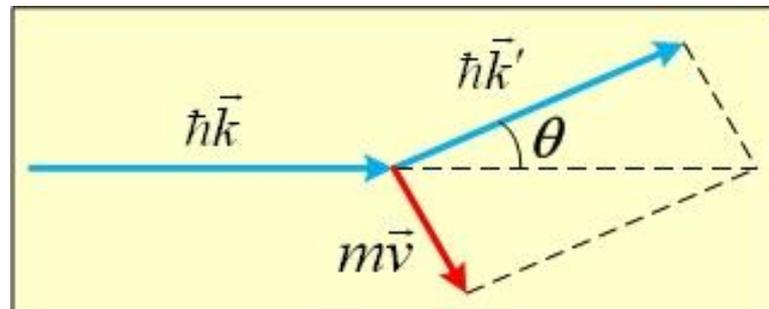
$$\Delta\lambda = \Lambda(1 - \cos \vartheta) = 2,42 \cdot 10^{-12} (1 - 0) = 2,42 \cdot 10^{-12} (\text{м}).$$

В результате столкновения с фотоном электрон приобретает некоторую кинетическую энергию E и некоторый импульс p .

Кинетическую энергию электрона найдём из закона сохранения энергии.

Закон сохранения энергии:

$$\hbar\omega + mc^2 = \hbar\omega' + E + mc^2.$$



49. Рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda = 20$ пм испытывают комптоновское рассеяние под углом $\theta = 90^\circ$. Найти изменение $\Delta\lambda$ длины волны рентгеновских лучей при рассеянии, а также энергию E и импульс p электрона отдачи.

Решение (продолжение).

$$\begin{aligned} \hbar\omega &= \hbar\omega' + E. \\ E &= \hbar\omega - \hbar\omega' = \hbar\frac{c}{\lambda} - \hbar\frac{c}{\lambda'} = \hbar c \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) = \hbar c \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'}. \\ E &= \hbar c \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'} = \hbar c \frac{\Delta\lambda}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)} = \\ &= \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2,4 \cdot 10^{-12}}{20 \cdot 10^{-12} \cdot 22,4 \cdot 10^{-12}} = 10,6 \cdot 10^{-16} \text{ (Дж)} = 6,66 \text{ кэВ}. \end{aligned}$$

Для определения импульса электрона воспользуемся релятивистской формулой для полной энергии.

$$E + mc^2 = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}.$$

49. Рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda = 20$ пм испытывают комптоновское рассеяние под углом $\theta = 90^\circ$. Найти изменение $\Delta\lambda$ длины волны рентгеновских лучей при рассеянии, а также энергию E и импульс p электрона отдачи.

Решение (продолжение).

$$E + mc^2 = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}.$$

$$E^2 + 2Emc^2 + m^2c^4 = c^2p^2 + m^2c^4.$$

$$E^2 + 2Emc^2 = c^2p^2.$$

$$\frac{E^2}{c^2} + 2Em = p^2.$$

$$p = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} + 2Em}.$$

A10. При комптоновском рассеянии энергия падающего фотона распределяется поровну между рассеянным фотоном и электроном отдачи. Угол рассеяния $\theta = 90^\circ$. Найти энергию E и импульс p рассеянного фотона.

Дано:

$$\begin{array}{l} E_\phi = E_e \\ \theta = 90^\circ \end{array}$$

$E - ?$

$p - ?$

Решение.

Согласно закону сохранения энергии при комптоновском рассеянии

$$E_{ph} + m_0 c^2 = E'_{ph} + E_{el} + m_0 c^2,$$

где E_{ph} – энергия налетающего фотона, E'_{ph} – энергия рассеянного фотона, E_{el} – кинетическая энергия электрона.

Согласно условию задачи $E'_{ph} = E_{el}$. Поэтому $E_{ph} = 2E'_{ph}$.

$$h \frac{c}{\lambda_0} = 2h \frac{c}{\lambda}.$$

$$\frac{1}{\lambda_0} = \frac{2}{\lambda}, \quad \lambda_0 = \frac{\lambda}{2}.$$

Увеличение длины волны рассеянных фотонов при неупругом рассеянии на электронах (эффекте Комптона) определяется формулой:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \Lambda (1 - \cos \vartheta), \quad \text{где } \Lambda = \frac{2\pi \hbar}{mc} = \frac{h}{mc} = 2,42 \cdot 10^{-12} \text{ (м)}.$$

A10. При комптоновском рассеянии энергия падающего фотона распределяется поровну между рассеянным фотоном и электроном отдачи. Угол рассеяния $\theta = 90^\circ$. Найти энергию E и импульс p рассеянного фотона.

Решение (продолжение).

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \Lambda(1 - \cos \vartheta), \quad \lambda_0 = \frac{\lambda}{2}.$$

$$\Delta\lambda = \lambda - \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}, \quad \frac{\lambda}{2} = \Lambda(1 - \cos \vartheta).$$

Длина волны рассеянного фотона $\lambda = 2\Lambda(1 - \cos \vartheta).$

Энергия рассеянного фотона $E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{2\Lambda(1 - \cos \vartheta)}.$

Импульс рассеянного фотона $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\Lambda(1 - \cos \vartheta)}.$

Подстановка числовых значений даёт следующие величины:

$$E = 4,2 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} = 0,26 \text{ МэВ}; \quad p = 13,6 \cdot 10^{-23} \text{ кг}\cdot\text{м/с}.$$

А11. Энергия рентгеновских лучей $E = 0,6 \text{ МэВ}$. Найти энергию W электрона отдачи, если длина рентгеновских лучей после комптоновского рассеяния изменилась на 20%.

Дано:

$$E = 0,6 \text{ МэВ}$$

$$\Delta E/E = 0,2$$

$W - ?$

Решение.

Согласно закону сохранения энергии при комптоновском рассеянии

$$E_{ph} = E'_{ph} + E_{el},$$

где E_{ph} – энергия налетающего фотона, E'_{ph} – энергия рассеянного фотона, E_{el} – кинетическая энергия электрона.

Энергия налетающего фотона E_{ph}

$$E_{ph} = \frac{hc}{\lambda}.$$

Энергия рассеянного фотона E'_{ph}

$$E'_{ph} = \frac{hc}{\lambda'}.$$

$$\frac{E'_{ph}}{E_{ph}} = \frac{\lambda}{\lambda'},$$

$$\frac{E'_{ph}}{E_{ph}} = \frac{\lambda}{1,2\lambda} = \frac{5}{6},$$

$$E'_{ph} = \frac{5}{6} E_{ph}.$$

А11. Энергия рентгеновских лучей $E = 0,6$ МэВ. Найти энергию W электрона отдачи, если длина рентгеновских лучей после комптоновского рассеяния изменилась на 20%.

Решение (продолжение).

$$E_{ph} = E'_{ph} + E_{el}, \quad E'_{ph} = \frac{5}{6} E_{ph}.$$

$$E_{ph} = \frac{5}{6} E_{ph} + E_{el},$$

$$E_{el} = \frac{1}{6} E_{ph} = 0,1 \text{ (МэВ)}.$$