

4. Дифракция света.

4.1. Основные эксперименты.

4.1. Основные эксперименты по дифракции.

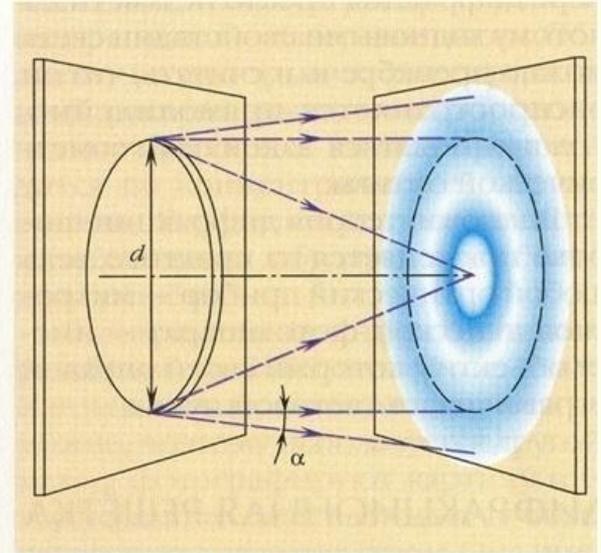
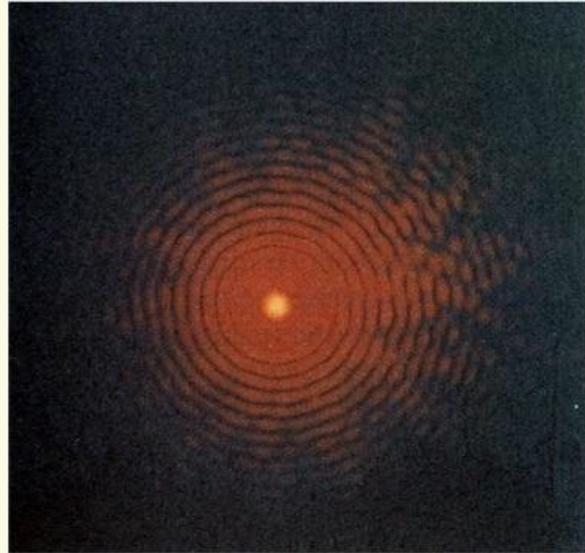
Дифракция – совокупность явлений, связанных с перераспределением интенсивности излучения, возникающих при распространении волн в средах с резкими неоднородностями.

1. Дифракция от точечного источника на диске.

«Пятно Пуассона»

Ж. Н. Делиль,
1715 г.,

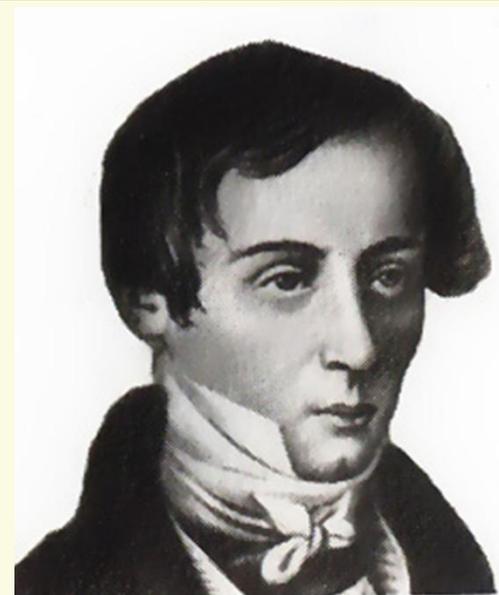
О. Ж. Френель,
1818 г.



Пуассон «вывел из интегралов автора (Френеля) тот результат, что центр тени от круглого непрозрачного экрана должен быть таким же осещённым, как если бы экран не существовал» (Араго).

4.1. Основные эксперименты по дифракции.

1. Заложил основы теории дифракции света.
2. Исследовал поляризацию света («призма Френеля», представление о естественном свете, как сумме плоско поляризованных волн, поперечность световых волн).
3. Заложил основы кристаллооптики.
4. Изучил рефракцию света атмосферой.
5. Разработал систему освещения маяков, в которой важнейшей частью была сконструированная Френелем ступенчатая линза.



Огюст Жан Френель
(1788 - 1827)

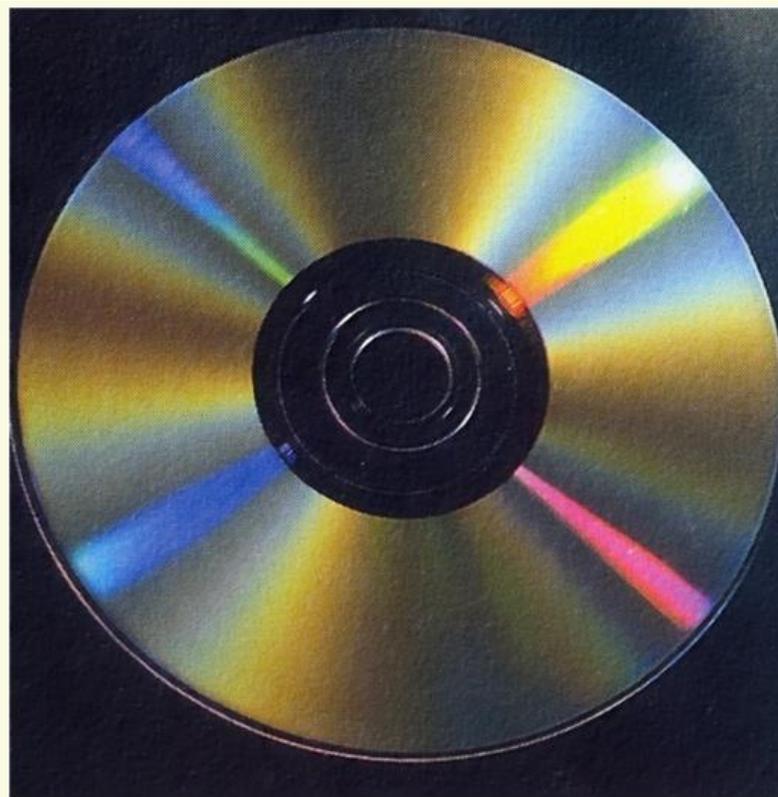
4.1. Основные эксперименты по дифракции.

Дифракция плоских волн.

(Йозеф Фраунгофер (1787 – 1826))

1. Дифракция на щели (отверстии).
2. Дифракция на преграде (нити).
3. Дифракция на периодической структуре (дифракционной решётке)

См. лабораторную работу №505.



4.2. || Принцип Гюйгенса-Френеля. Метод зон Френеля.

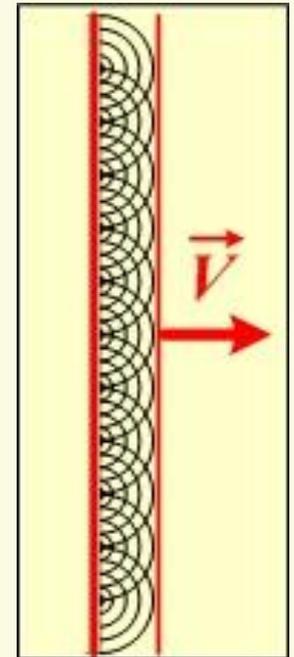
4.2. Принцип Гюйгенса - Френеля.

Распространение электромагнитных волн можно описывать с помощью принципа Гюйгенса – Френеля, который состоит в следующем.

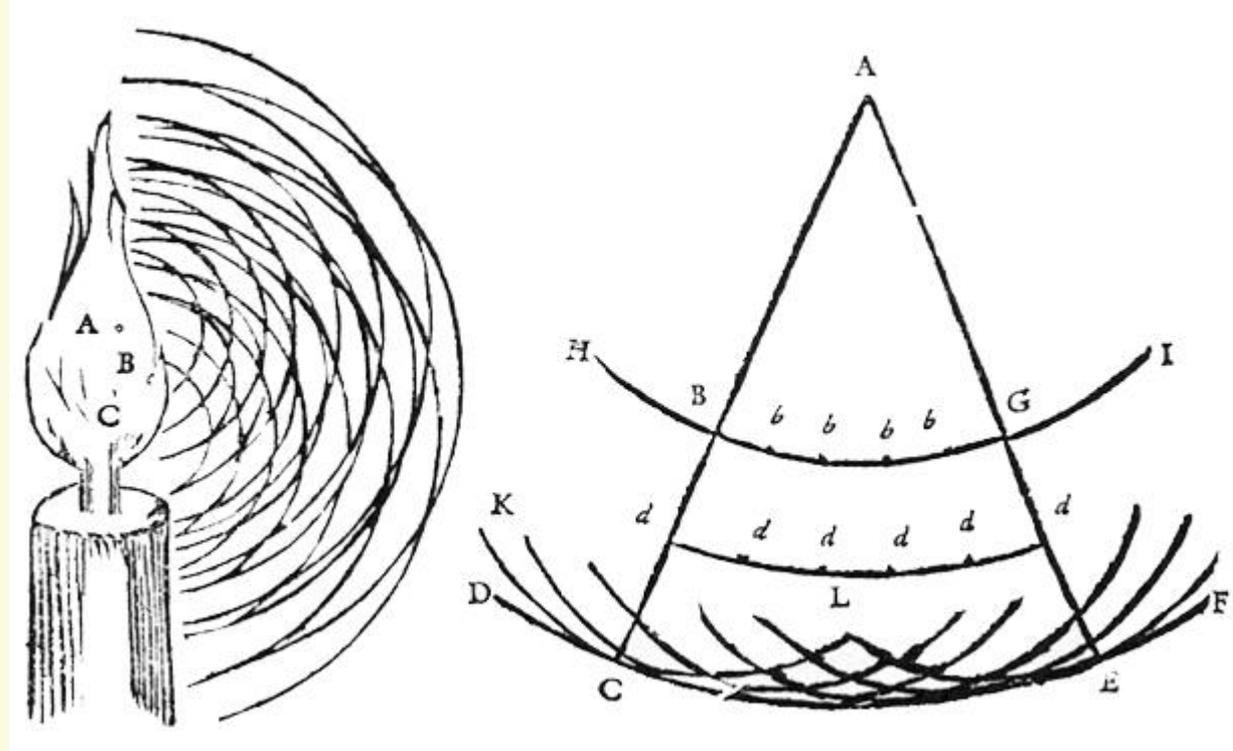
Принцип Гюйгенса. Каждая точка волнового фронта является источником вторичных колебаний, происходящих с той же частотой и распространяющихся с той же скоростью, что и исходные колебания.

Дополнение Френеля. Интенсивность волны в данной точке является результатом наложения волн, исходящих из всех точек волнового фронта.

Пример, касающийся описания распространения плоской электромагнитной волны с помощью принципа Гюйгенса – Френеля представлен на рисунке.



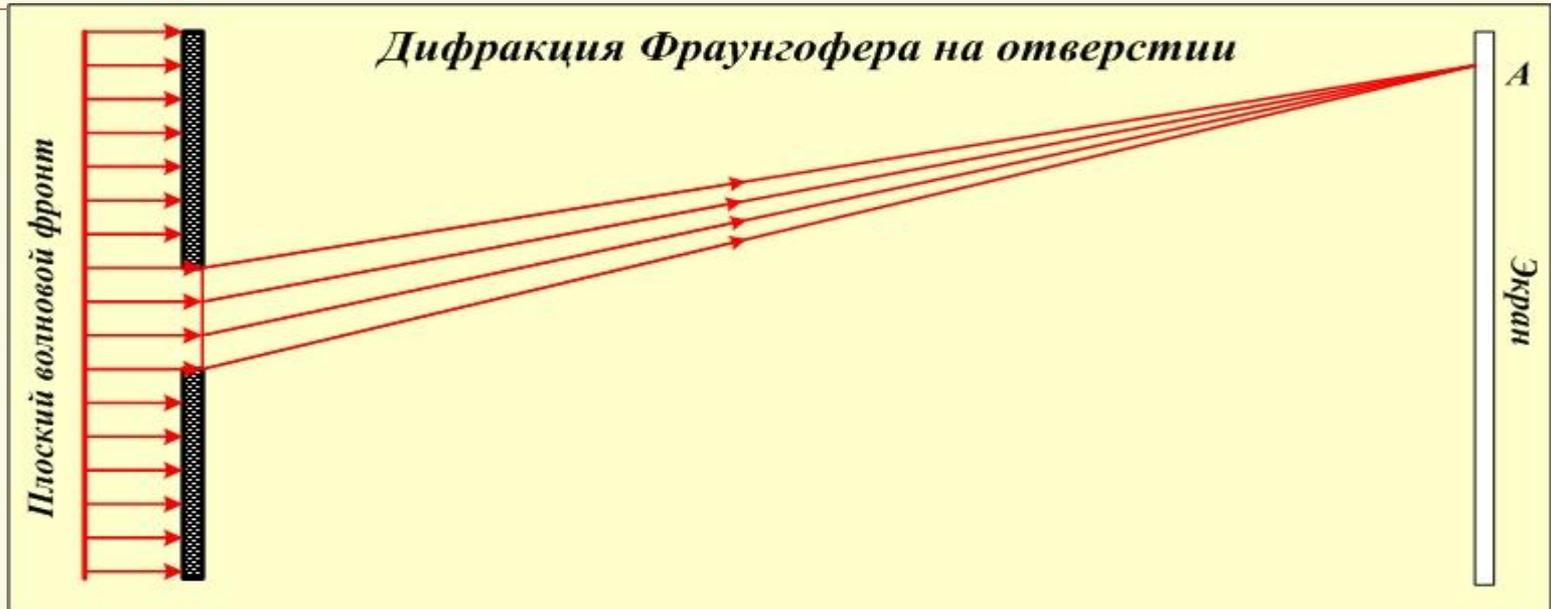
4.2. Принцип Гюйгенса - Френеля.



Построение
огибающей
волны и
пример с
пламенем
свечи.
Рисунки из
«Трактата о
свете»
Х. Гюйгенса
(1690 г.)

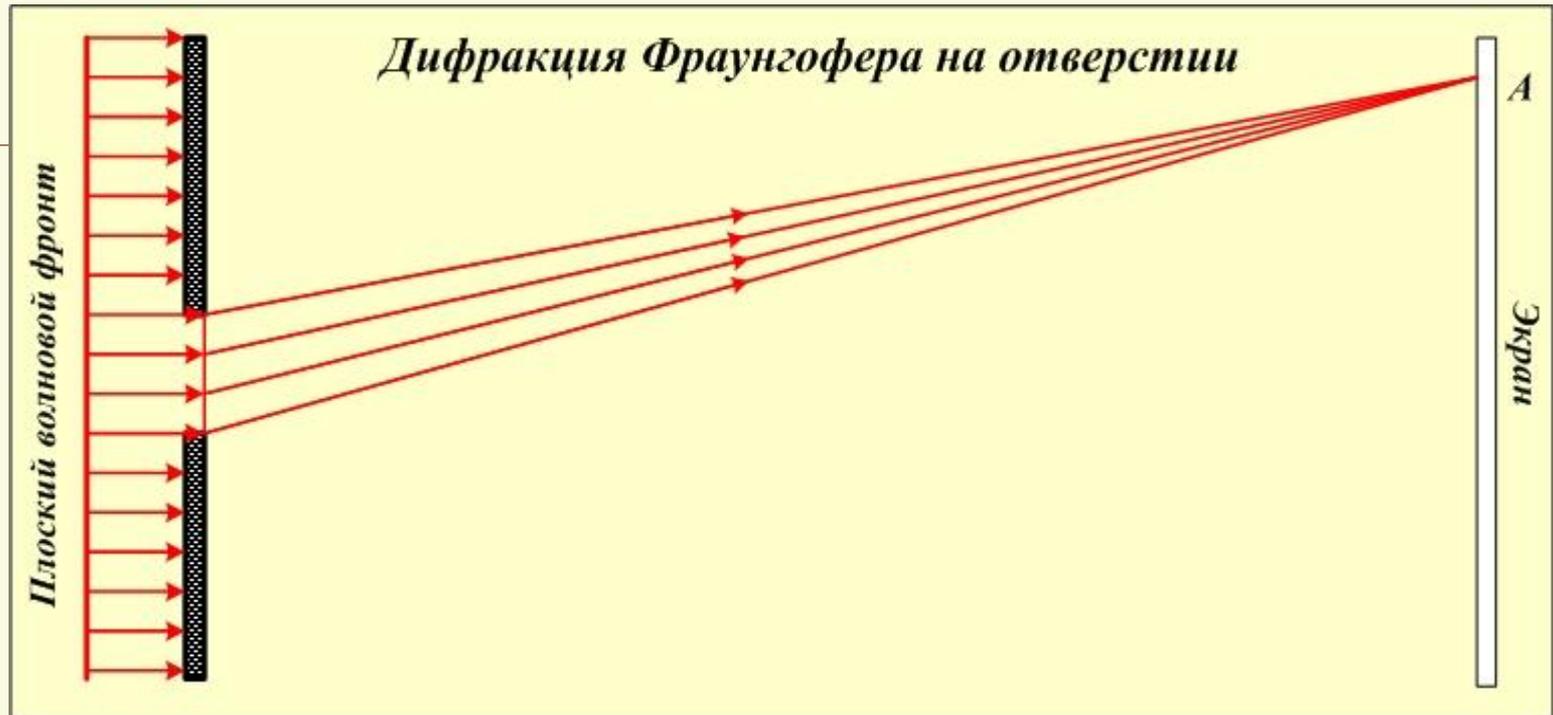
4.2. Метод зон Френеля.

Рассмотрим описание дифракции плоской волны на отверстии с помощью принципа Гюйгенса – Френеля.



Число точек – источников волн в отверстии бесконечно велико. Просуммировать вклады в интенсивность излучения в точке наблюдения А от волн, выходящих из всех точек отверстия можно, непосредственно вычислив интеграл, описывающий сумму напряжённостей волн в точке А. Но существует более простой способ определить, где будут наблюдаться максимумы и минимумы освещённости.

4.2. Метод зон Френеля.



1. Разделим волновой фронт в отверстии на такие участки (или зоны), из которых в точку наблюдения волны будут приходить с разностью хода в $\lambda/2$.

2. Тогда волны, приходящие из соседних зон в точку наблюдения с разностью хода в $\lambda/2$ будут при сложении давать минимум освещённости.

4.2. Метод зон Френеля.

3. Если интенсивность излучения, исходящего из двух соседних зон одинакова, то при сложении будет наблюдаться не просто минимум освещённости, но полная темнота.

Этого можно добиться, если число точечных источников в каждой зоне одинаково. А для этого необходимо, чтобы площади зон были равны.

Участки волнового фронта одинаковой площади, из которых в точку наблюдения волны будут приходить с разностью хода в $\lambda/2$ называются зонами Френеля.

Таким образом, если в открытом участке волнового фронта укладывается чётное число зон Френеля, то две каждые соседние зоны при сложении дают минимум освещённости и в результате в точке наблюдения мы увидим тёмное пятно (полосу).

Напротив, если в открытом участке волнового фронта укладывается нечётное число зон Френеля, в точке наблюдения мы увидим светлое пятно (полосу) (Одна из зон не имеет «соседней» дающей разность хода с ней в $\lambda/2$.)

4.2. Метод зон Френеля.

Для применения метода зон Френеля необходимо сделать следующее:

1. Построить чертёж, отражающий ход лучей от источника к точке наблюдения.
2. Разделить волновой фронт на зоны Френеля. При этом следует помнить, что площади зон Френеля должны быть равны.
3. Определить число зон Френеля, помещающееся в открытой части волнового фронта, на основании чего сделать выводы об освещённости точки наблюдения.
4. Разбиение волнового фронта на зоны Френеля определяется положением точки наблюдения, поэтому при переходе к другой точке наблюдения следует повторить всю процедуру сначала.

**Даёшь каждой точке наблюдения
персональные зоны Френеля!**

4.3. Дифракция Фраунгофера на отверстиях. Применение метода зон Френеля.

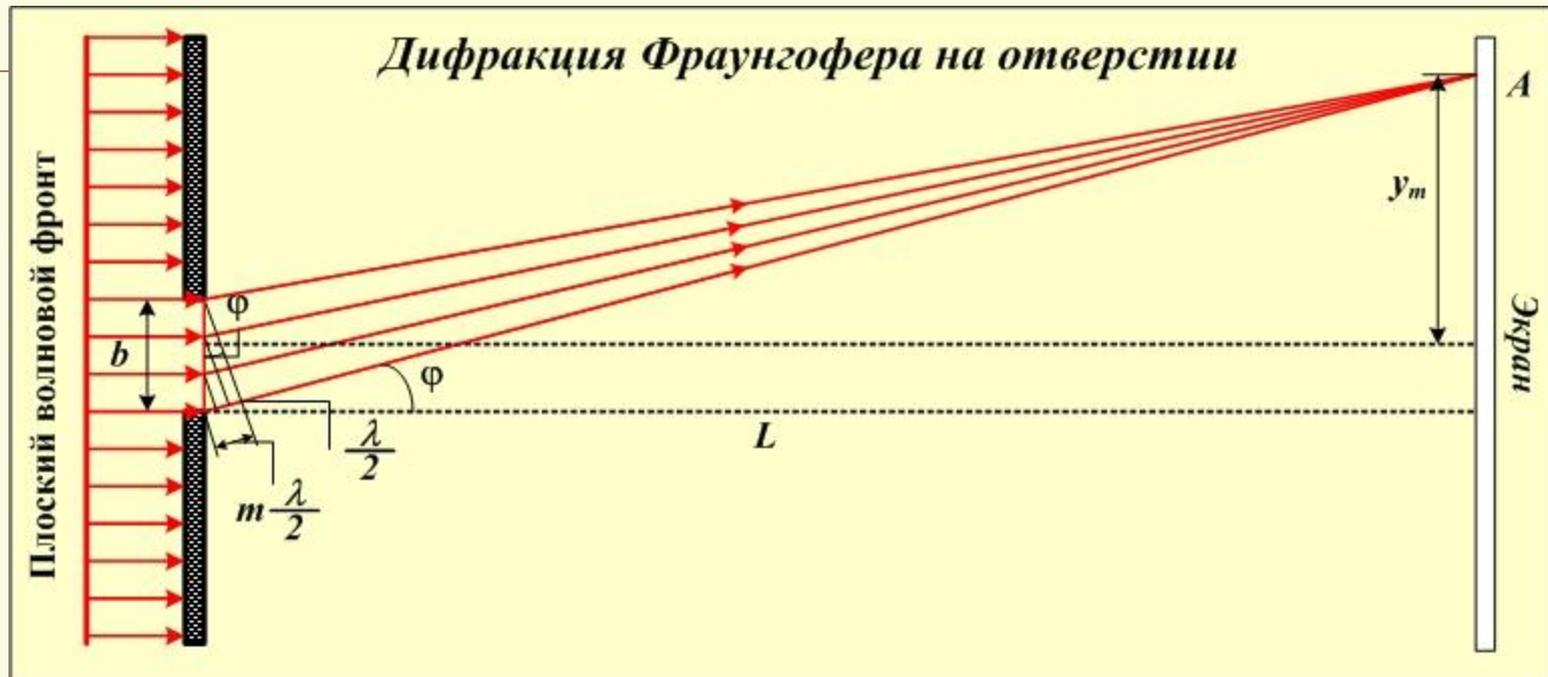
4.3. Дифракция Фраунгофера на отверстии. Метод зон Френеля.

На отверстие падает плоская волна (волновой фронт – плоскость). Известна длина волны λ , размер отверстия b и расстояние до экрана L . Требуется определить освещённость в некоторой точке A на экране.



Случай дифракции плоских волн называется **дифракцией Фраунгофера**.

4.3. Дифракция Фраунгофера на отверстиях. Метод зон Френеля.

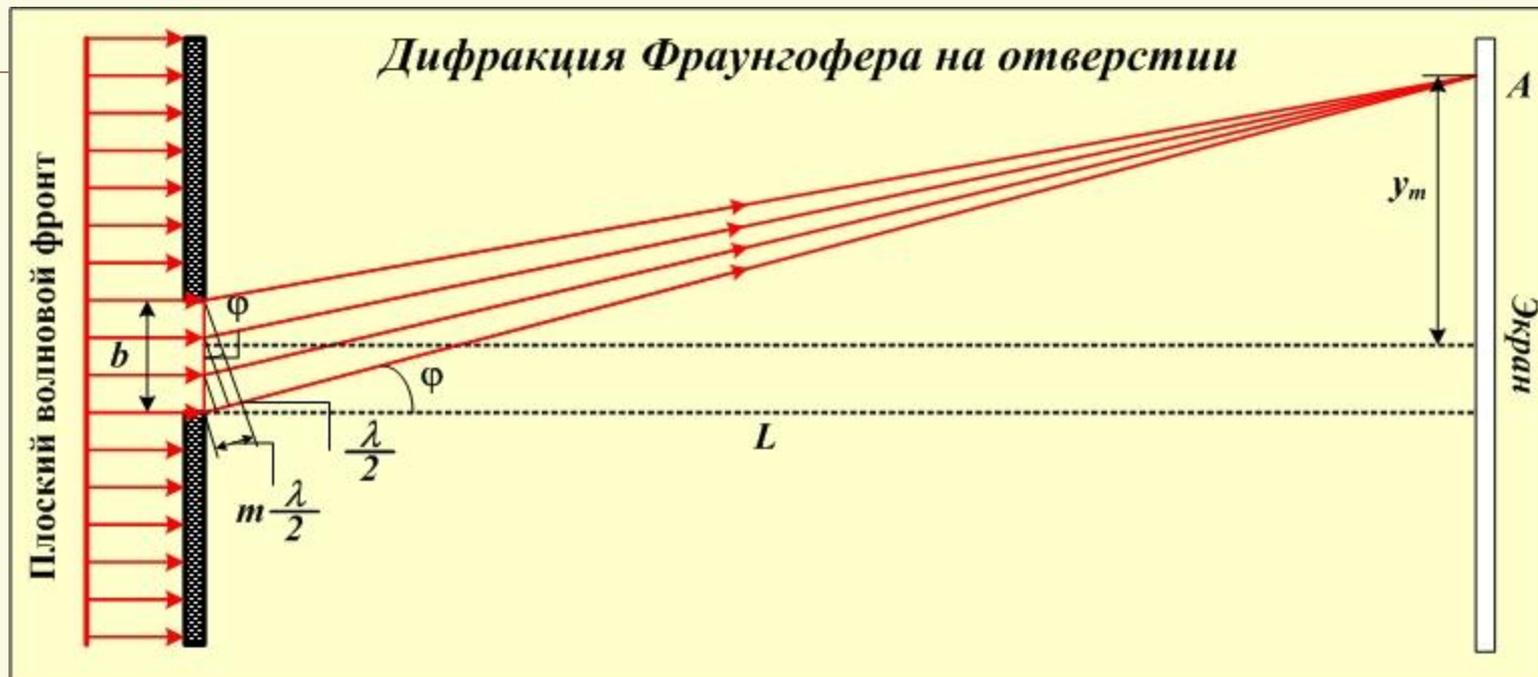


Красные линии на рисунке обозначают ход лучей из граничных точек зон Френеля. Разность хода между лучами, исходящими из соседних зон равна $\lambda/2$. Разность хода между крайними лучами равна

$$\delta = m \frac{\lambda}{2},$$

m – число зон Френеля, укладывающихся в открытой части волнового фронта.

4.3. Дифракция Фраунгофера на отверстии. Метод зон Френеля.



Из геометрических соображений $\delta = b \sin \varphi$.

$$b \sin \varphi = m \frac{\lambda}{2}.$$

Если m – чётное, то в точке A наблюдается минимум освещённости, если m – нечётное, то максимум.

4.3. Дифракция Фраунгофера на отверстиях. Метод зон Френеля.

$$b \sin \varphi = m \frac{\lambda}{2}.$$

Условие максимума $m = (2k + 1)$

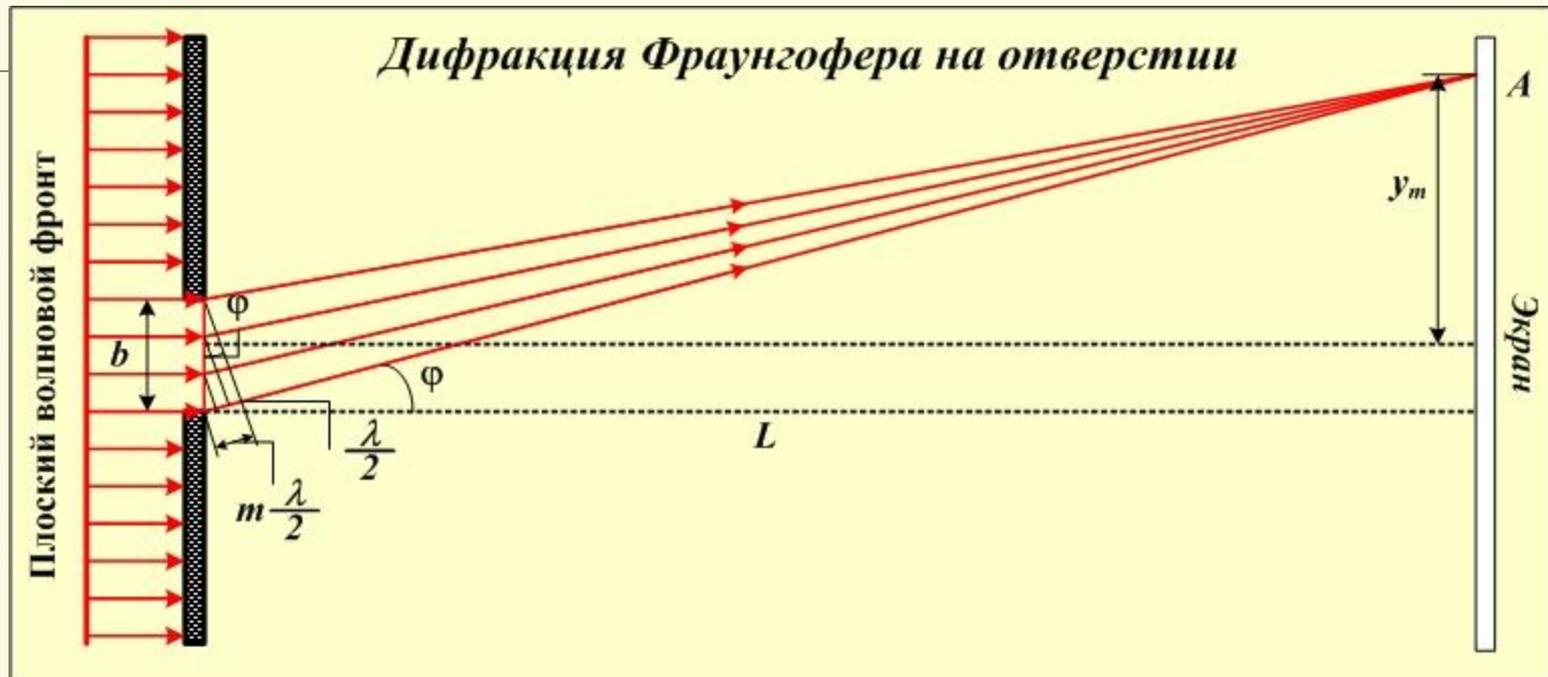
$$b \sin \varphi = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

Условие минимума $m = 2k$

$$b \sin \varphi = 2k \frac{\lambda}{2}.$$

$$b \sin \varphi = k \lambda.$$

4.3. Дифракция Фраунгофера на отверстии. Метод зон Френеля.



$$y_m = b \operatorname{tg} \varphi. \quad L \gg b. \quad \sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi = \frac{y_k}{L}.$$

Условие максимума $b \sin \varphi = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad b \operatorname{tg} \varphi = (2k + 1) \frac{\lambda}{2},$

$$b \frac{y_k}{L} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad y_k = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \frac{L}{b},$$

4.3. Дифракция Фраунгофера на отверстиях. Метод зон Френеля.

Условие минимума

$$b \sin \varphi = k\lambda,$$

$$b \operatorname{tg} \varphi = k\lambda,$$

$$b \frac{y_k}{L} = k\lambda,$$

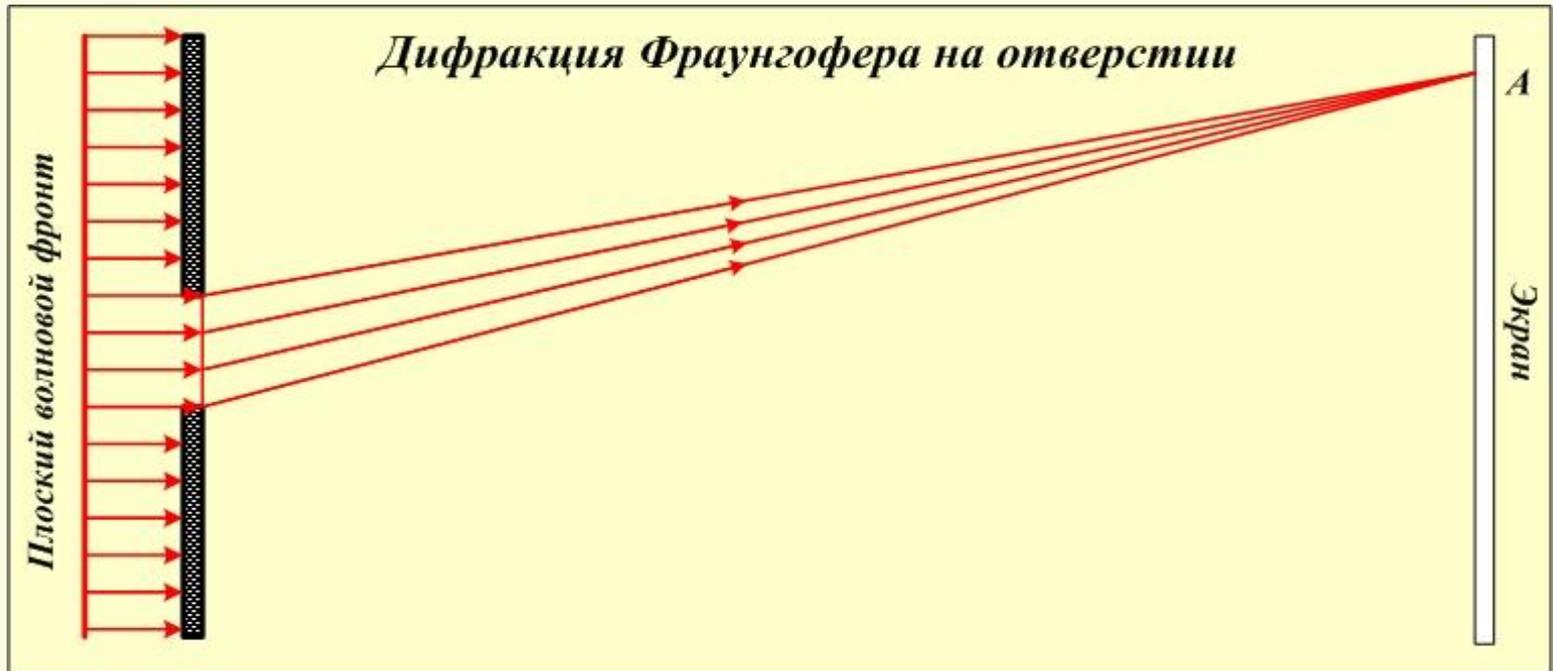
$$y_k = k\lambda \frac{L}{b}.$$

Такой подход позволяет определить положение минимумов и максимумов, но не даёт количественной информации об интенсивности излучения .

**4.4. Дифракция Фраунгофера
на отверстиях.
Точная теория.**

4.4. Дифракция Фраунгофера на отверстии. Точная теория.

На отверстие падает плоская волна (волновой фронт – плоскость). Известна длина волны λ , размер отверстия b и расстояние до экрана L . Требуется Определить, как распределена интенсивность излучения по направлениям (на экране).



4.4. Дифракция Фраунгофера на отверстиях. Точная теория.

Каждая точка отверстия является источником сферических волн. Рассмотрим участок длиной dx , расположенный внутри отверстия на расстоянии x от края.

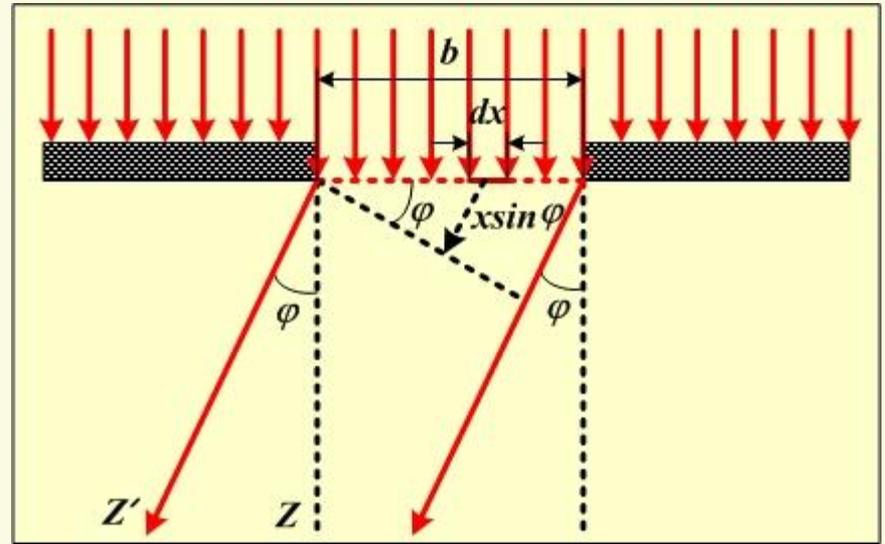
Волны, излучённые с отрезка dx распространяются по всем направлениям ($-\pi/2 < \varphi < \pi/2$).

Рассмотрим волны, распространяющиеся вдоль прямой, образующей угол φ с перпендикуляром к преграде.

Волны, излучённые с отрезка dx , запаздывают по фазе на

$$\Delta = kx \sin \varphi,$$

$$k = \frac{\omega}{v} \text{ - волновое число (модуль волнового вектора).}$$



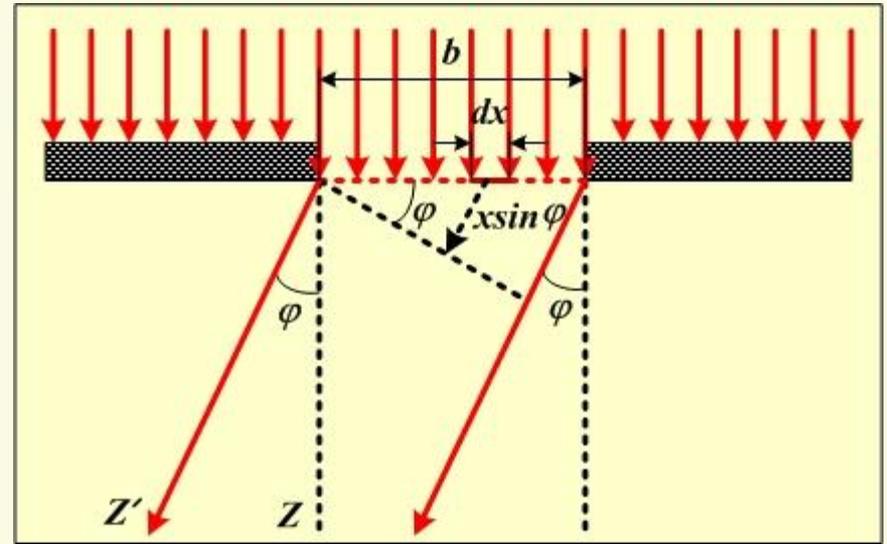
4.4. Дифракция Фраунгофера на отверстиях. Точная теория.

Запишем уравнение волны, испущенной с участка dx в рассматриваемом направлении. Пусть E_0 – амплитуда волны, испущенной из всего отверстия в рассматриваемом направлении, тогда амплитуда волны, испущенной с участка dx равна

$$E_{0x} = \frac{E_0}{b} dx.$$

Уравнение волны, испущенной с участка dx в рассматриваемом направлении:

$$dE_\varphi = \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - kx \sin \varphi)} dx.$$



4.4. Дифракция Фраунгофера на отверстиях. Точная теория.

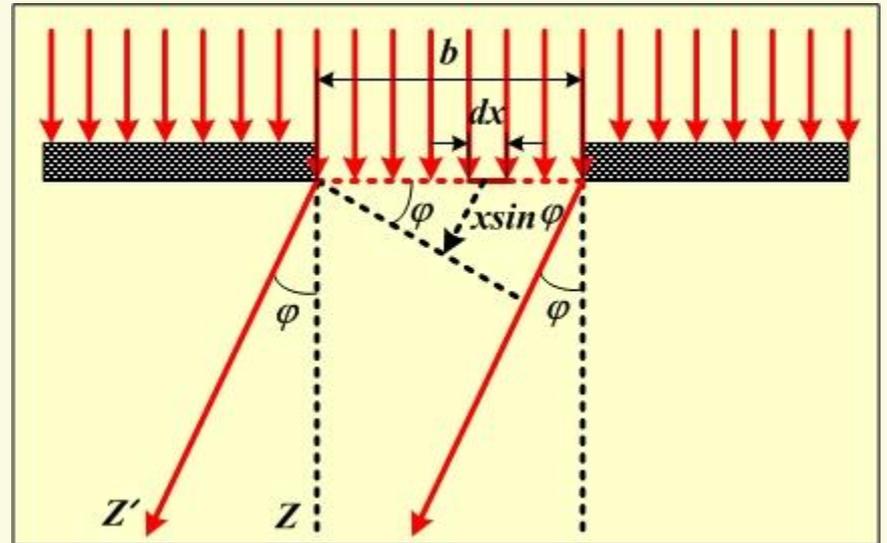
$$dE_{\varphi} = \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - kx \sin \varphi)} dx.$$

Для волны, испущенной из всего отверстия в рассматриваемом направлении.

$$E_{\varphi} = \int_0^b \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - kx \sin \varphi)} dx.$$

$$E_{\varphi} = \int_0^b \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - kx \sin \varphi)} dx = \frac{E_0}{b} e^{i\omega t} \int_0^b e^{-ikx \sin \varphi} dx =$$

$$= \frac{E_0}{b} e^{i\omega t} \left. \frac{e^{-ikx \sin \varphi}}{-ik \sin \varphi} \right|_0^b = E_0 e^{i\omega t} \frac{e^{-ikb \sin \varphi} - 1}{-ikb \sin \varphi}.$$



4.4. Дифракция Фраунгофера на отверстиях. Точная теория.

$$E_{\varphi} = E_0 e^{i\omega t} \frac{e^{-ikb \sin \varphi} - 1}{-ikb \sin \varphi}.$$

Преобразуем полученное выражение к симметричной форме.

$$\begin{aligned} \frac{e^{-ikb \sin \varphi} - 1}{-ikb \sin \varphi} &= \frac{e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi} e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi} - e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi} e^{+ik \frac{b}{2} \sin \varphi}}{-ikb \sin \varphi} = \\ &= \frac{e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi} - e^{+ik \frac{b}{2} \sin \varphi}}{-2ik \frac{b}{2} \sin \varphi} e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi} = \frac{e^{-iu} - e^{+iu}}{-2iu} e^{-iu}, \end{aligned}$$

где $u = k \frac{b}{2} \sin \varphi.$

4.4. Дифракция Фраунгофера на отверстиях. Точная теория.

$$\frac{e^{-iu} - e^{+iu}}{-2iu} e^{-iu} = \frac{\sin u}{u} e^{-iu}.$$

Итак,

$$E_{\varphi} = E_0 e^{i\omega t} \frac{e^{-ikb \sin \varphi} - 1}{-ikb \sin \varphi} = E_0 e^{i(\omega t - u)} \frac{\sin u}{u}.$$

где $u = k \frac{b}{2} \sin \varphi.$

Уравнение волны, испущенной из всей щели в рассматриваемом направлении:

$$E_{\varphi} = E_0 \frac{\sin u}{u} e^{i\left(\omega t - k \frac{b}{2} \sin \varphi\right)}.$$

4.4. Дифракция Фраунгофера на отверстиях. Точная теория.

Интенсивность излучения, испущенного из всей щели в рассматриваемом направлении определяется квадратом амплитуды

$$I \propto |E|^2.$$

$$E_{\varphi}^2 = E_0^2 \left| e^{i(\omega t - u)} \right|^2 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2.$$

$$I_{\varphi} = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2,$$

где $u = k \frac{b}{2} \sin \varphi.$

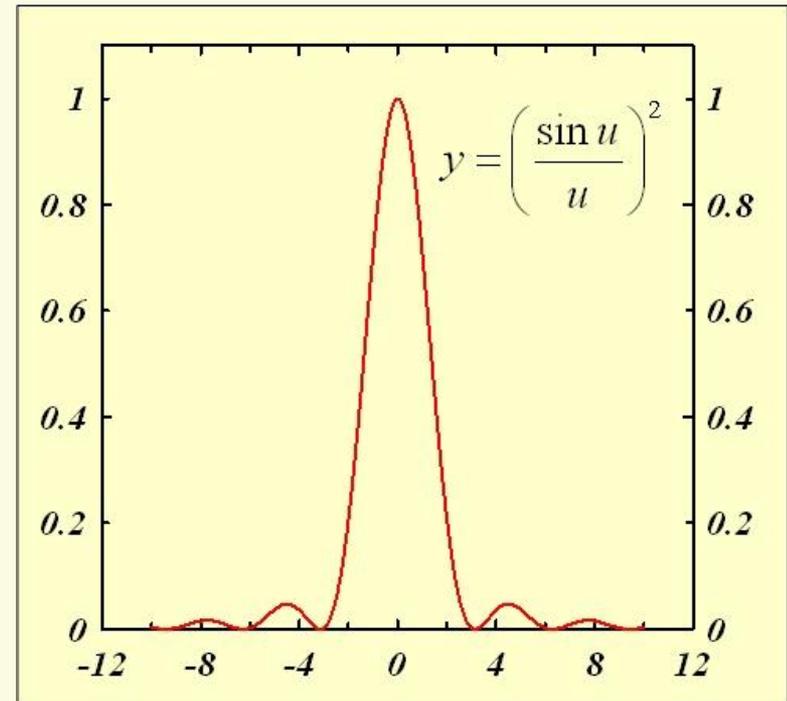
4.4. Дифракция Фраунгофера на отверстиях. Точная теория.

$$I_{\varphi} = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2.$$

Исследуем полученную функцию. При $u \rightarrow 0$ $\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1$.

Это максимальное значение этой функции. При возрастании модуля u функция будет убывать. Это убывание не будет монотонным вследствие осцилляций числителя.

Теперь можно определить, при каких значениях угла дифракции наблюдаются максимумы и минимумы интенсивности излучения.



4.4. Дифракция Фраунгофера на отверстиях. Точная теория.

$$u = k \frac{b}{2} \sin \varphi, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$
$$u = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{b}{2} \sin \varphi = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi.$$

Функция

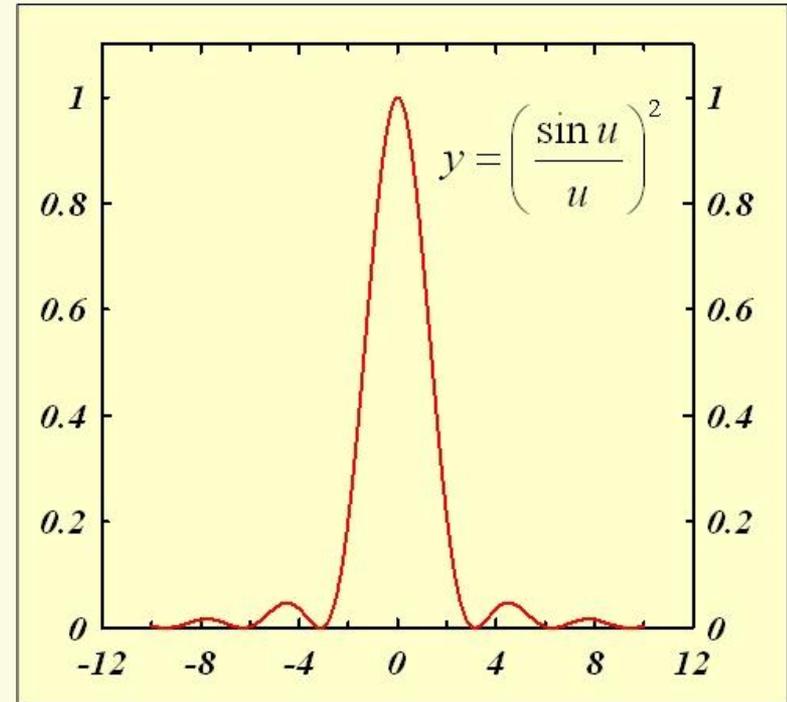
$$I_{\varphi} = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2$$

имеет локальные минимумы при
условии

$$\sin u = 0.$$

$$u = m\pi, \quad \frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi = m\pi,$$

$$b \sin \varphi = m\lambda.$$



4.4. Дифракция Фраунгофера на отверстии. Точная теория.

Функция

$$I_{\varphi} = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2$$

имеет локальные максимумы
(кроме центрального) при условии

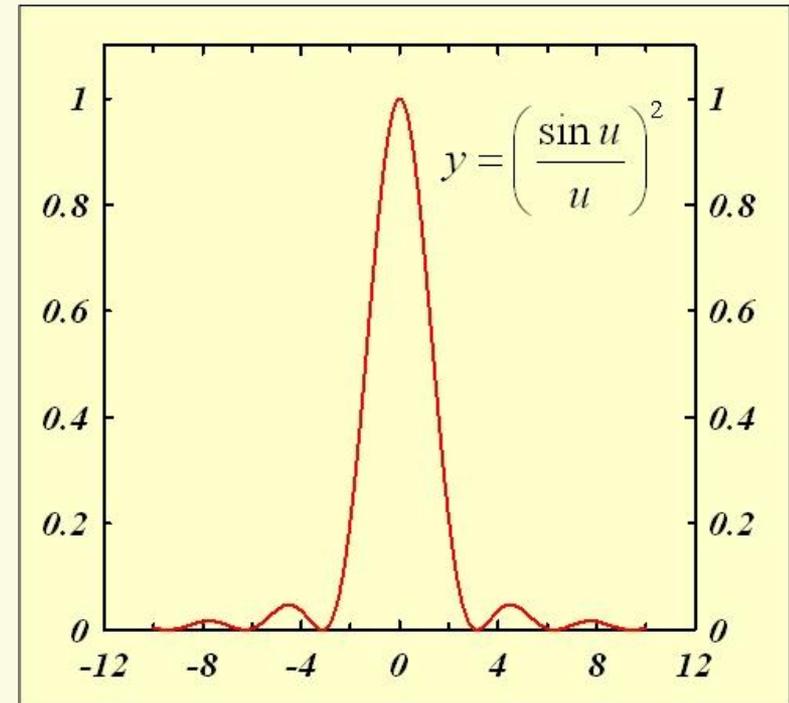
$$\sin u = \pm 1.$$

$$u = (2m + 1) \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi = (2m + 1) \frac{\pi}{2},$$

$$b \sin \varphi = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

Условия минимумов и максимумов совпали с полученными методом зон Френеля.

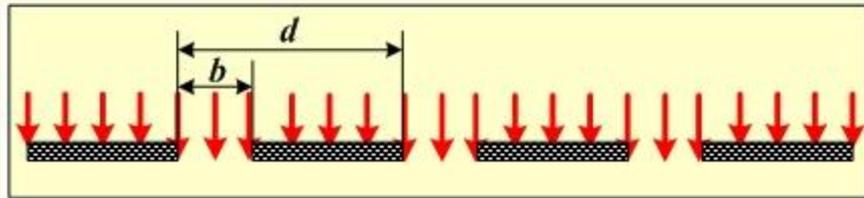


Точный расчёт позволяет определить значения интенсивности для произвольного угла дифракции.

4.5. Дифракция Фраунгофера на периодической структуре (решётке).

4.5. Дифракция Фраунгофера на периодической структуре.

Дифракционная решётка – совокупность большого числа регулярно расположенных штрихов (канавок, щелей, выступов), нанесённых на плоскую или сферическую поверхность.



Период дифракционной решётки – наименьшая часть решётки, перемещая которую, можно воспроизвести всю решётку.

Для плоской одномерной дифракционной решётки длина периода равна

$$d = b + h,$$

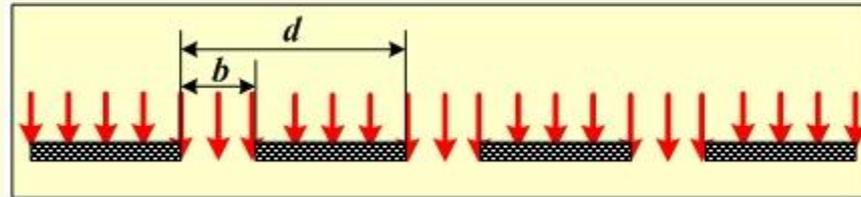
где b – ширина отверстия, h – ширина штриха.

Период дифракционной решётки связан с числом нанесённых на неё штрихов соотношением

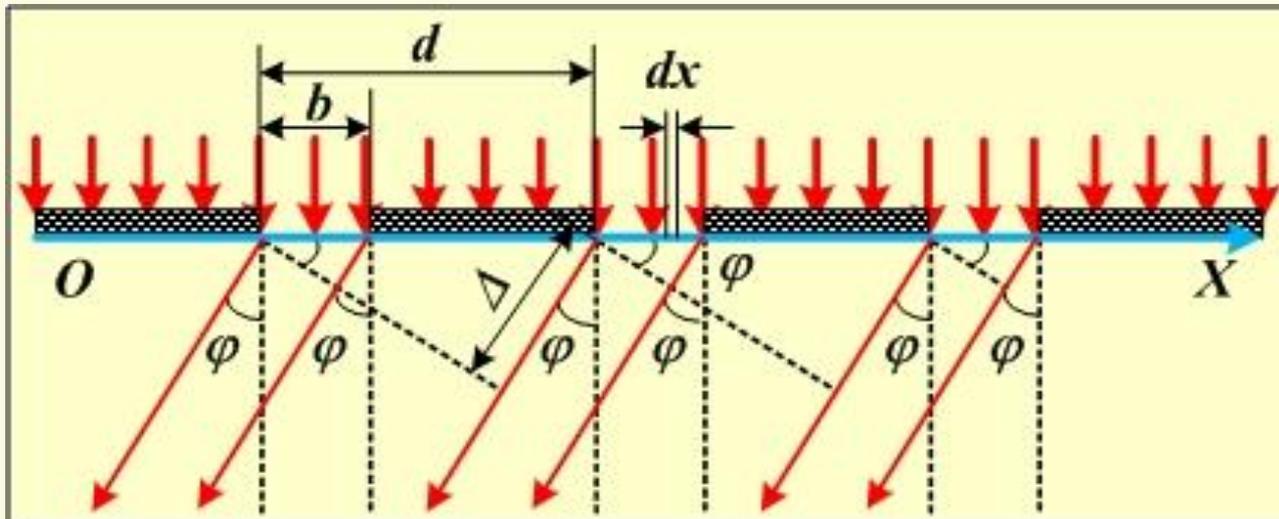
$$d = \frac{1}{N},$$

где N – число штрихов на единицу длины.

4.5. Дифракция Фраунгофера на периодической структуре.



На дифракционную решётку падает плоская волна (волновой фронт – плоскость). Известна длина волны λ , размер отверстия b , период решётки d , расстояние до экрана L . Требуется определить, как распределена интенсивность излучения по направлениям (на экране).



4.5. Дифракция Фраунгофера на периодической структуре.

Чтобы решить поставленную задачу, нам необходимо просуммировать вклады в интенсивность результирующей волны от всех точечных источников, расположенных во всех щелях дифракционной решётки. Вся процедуру вывода формулы можно разделить на четыре этапа.

1. Записать уравнение волны, излучаемой одним точечным источником.

2. Записать уравнение волны, излучаемой всеми точечными источниками одной щели.

3. Записать уравнение волны, излучаемой всеми щелями дифракционной решётки.

4. Записать и исследовать выражение для суммарной интенсивности излучения по заданному направлению

4.5. Дифракция Фраунгофера на периодической структуре.

Уравнение волны, излучаемой точечным источником.

От элемента dx , расположенного в щели номер n в направлении, определяемом углом φ , распространяется волна.

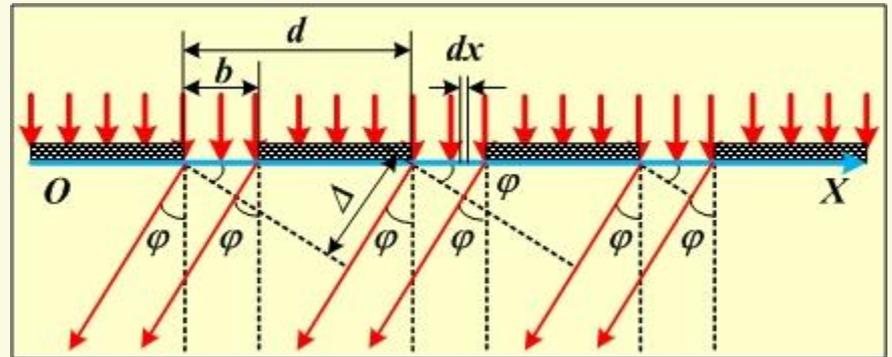
Волна, исходящая из элемента dx , расположенного в щели номер n , запаздывает по сравнению с волной, вышедшей из точки $x = 0$. Запаздывание связано с тем, что волна должна пройти дополнительное расстояние

$$L = ((n-1)d + x) \sin \varphi.$$

Поэтому фаза волны исходящая из элемента dx , расположенного в щели номер n , отличается от фазы волны, вышедшей из точки $x = 0$ на величину

$$\Delta\varphi = k((n-1)d + x) \sin \varphi.$$

x – координата элемента dx , относительно начала щели.



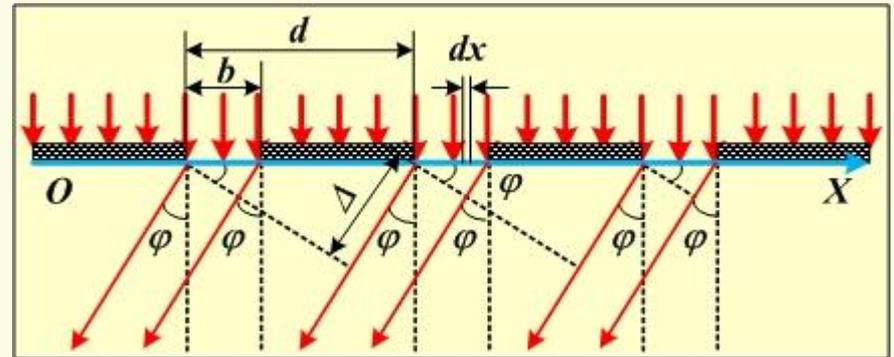
4.5. Дифракция Фраунгофера на периодической структуре.

Пусть E_0 – амплитуда волны, испущенной из всего отверстия номер n в рассматриваемом направлении, тогда амплитуда волны, испущенной с участка dx равна

$$E_{0x} = \frac{E_0}{b} dx.$$

Уравнение волны, испущенной с участка dx в рассматриваемом направлении:

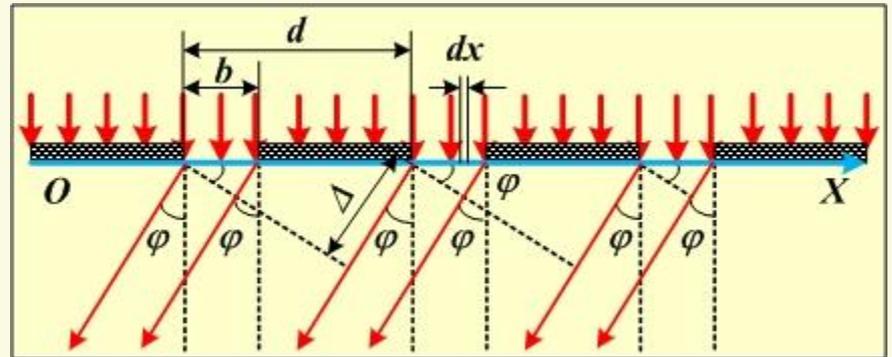
$$dE_{\varphi} = \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - (k(n-1)d + x)\sin\varphi)} dx.$$



4.5. Дифракция Фраунгофера на периодической структуре.

Уравнение волны, излучаемой всеми точечными источниками одной щели.

Эта волна есть сумма волн, идущих от точечных источников, принадлежащих одной щели (n – номер щели).



$$\begin{aligned} E_{n\varphi} &= \int_0^b dE_{\varphi} = \frac{E_0}{b} \int_0^b e^{i(\omega t - (k(n-1)d + x)\sin\varphi)} dx = \\ &= \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - (k(n-1)d)\sin\varphi)} \int_0^b e^{-ikx\sin\varphi} dx = \\ &= \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - (k(n-1)d)\sin\varphi)} \frac{e^{-ikb\sin\varphi} - 1}{-ik\sin\varphi}. \end{aligned}$$

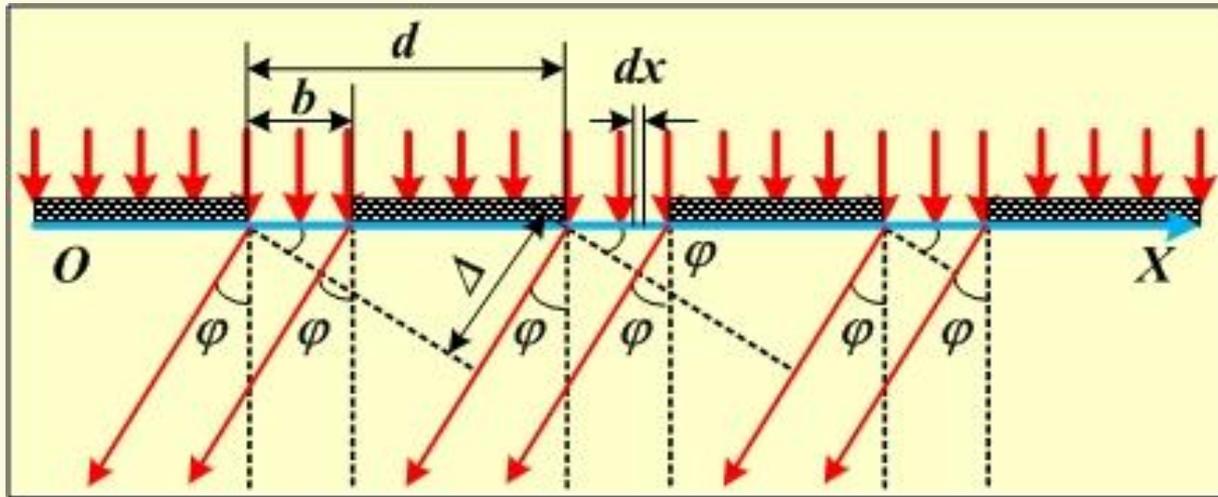
4.5. Дифракция Фраунгофера на периодической структуре.

Преобразуем полученное выражение к симметричной форме.

$$\begin{aligned} \frac{e^{-ikb \sin \varphi} - 1}{-ikb \sin \varphi} &= \frac{e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi} e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi} - e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi} e^{+ik \frac{b}{2} \sin \varphi}}{-ikb \sin \varphi} = \\ &= \frac{e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi} - e^{+ik \frac{b}{2} \sin \varphi}}{-2ik \frac{b}{2} \sin \varphi} e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi} = \frac{e^{-iu} - e^{+iu}}{-2iu} e^{-iu} = \\ &= \frac{\sin u}{u} e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi}, \end{aligned}$$

где $u = k \frac{b}{2} \sin \varphi$.

4.5. Дифракция Фраунгофера на периодической структуре.



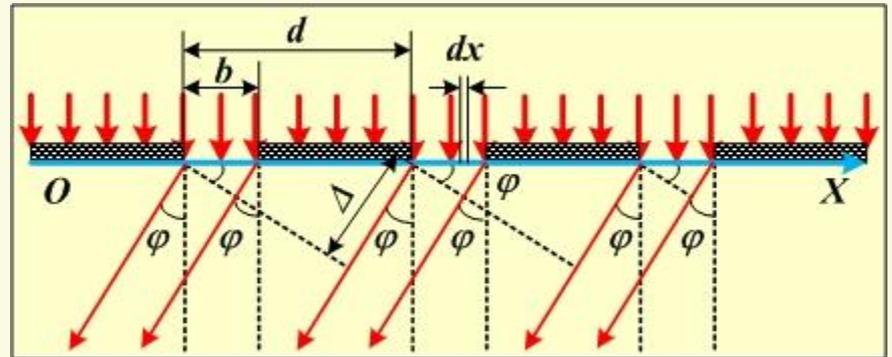
Уравнение волны, излучаемой всеми точечными источниками одной щели.

$$E_{n\varphi} = E_0 \frac{\sin u}{u} e^{-k(n-1)d \sin \varphi} e^{i\left(\omega t - k \frac{b}{2} \sin \varphi\right)}.$$

4.5. Дифракция Фраунгофера на периодической структуре.

Уравнение волны, излучаемой всеми точечными источниками всех щелей.

Такая волна есть сумма волн, идущих от всех щелей (n – номер щели, N – полное число щелей дифракционной решётки).



$$E_{\varphi} = \sum_{n=1}^N E_{n\varphi} = \sum_{n=1}^N E_0 \frac{\sin u}{u} e^{-k(n-1)d \sin \varphi} e^{i\left(\omega t - k \frac{b}{2} \sin \varphi\right)}.$$

$$E_{\varphi} = E_0 \frac{\sin u}{u} e^{i\left(\omega t - k \frac{b}{2} \sin \varphi\right)} \sum_{n=1}^N e^{-k(n-1)d \sin \varphi}.$$

4.5. Дифракция Фраунгофера на периодической структуре.

$$E_{\varphi} = E_0 \frac{\sin u}{u} e^{i\left(\omega t - k \frac{b}{2} \sin \varphi\right)} \sum_{n=1}^N e^{-k(n-1)d \sin \varphi}.$$

Вычислим отдельно сумму, входящую в эту формулу.

$$S_N = \sum_{n=1}^N e^{-k(n-1)d \sin \varphi}.$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad kd \sin \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \varphi,$$

Введём обозначение: $\delta = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi$.

Тогда:
$$S_N = \sum_{n=1}^N e^{-k(n-1)d \sin \varphi} = \sum_{n=1}^N e^{-2\delta(n-1)}.$$

4.5. Дифракция Фраунгофера на периодической структуре.

Итак,
$$S_N = \sum_{n=1}^N e^{-2\delta(n-1)}.$$

$$S_N = \sum_{n=1}^N e^{-2\delta(n-1)} = 1 + e^{-2i\delta} + e^{-4i\delta} + e^{-6i\delta} + \dots + e^{-2(N-1)\delta}$$

Как видно из формулы, S – частичная сумма геометрической прогрессии. Знаменатель этой прогрессии

$$q = e^{-2i\delta}.$$

Частичная сумма геометрической прогрессии со знаменателем q вычисляется по формуле

$$S_N = \frac{1 - q^N}{1 - q}.$$

4.5. Дифракция Фраунгофера на периодической структуре.

$$S_N = \frac{1 - q^N}{1 - q}, \quad q = e^{-2i\delta}. \quad S_N = \frac{1 - e^{-2i\delta N}}{1 - e^{-2i\delta}}.$$

Уравнение волны, излучаемой всеми точечными источниками всех щелей.

$$\begin{aligned} E_\varphi &= E_0 \frac{\sin u}{u} e^{i\left(\omega t - k \frac{b}{2} \sin \varphi\right)} \sum_{n=1}^N e^{-k(n-1)d \sin \varphi} = \\ &= E_0 \frac{\sin u}{u} \cdot \frac{1 - e^{-2i\delta N}}{1 - e^{-2i\delta}} e^{i\left(\omega t - k \frac{b}{2} \sin \varphi\right)}. \end{aligned}$$

Интенсивность излучения, испущенного из всей решётки в рассматриваемом направлении определяется квадратом амплитуды

$$I \propto |E|^2.$$

4.5. Дифракция Фраунгофера на периодической структуре.

$$I \propto |E|^2. \quad E_\varphi = E_0 \frac{\sin u}{u} \cdot \frac{1 - e^{-2i\delta N}}{1 - e^{-2i\delta}} e^{i\left(\omega t - k\frac{b}{2}\sin\varphi\right)}.$$

$$I_\varphi = E_0^2 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \cdot \left|\frac{1 - e^{-2i\delta N}}{1 - e^{-2i\delta}}\right|^2 \cdot \left|e^{i\left(\omega t - k\frac{b}{2}\sin\varphi\right)}\right|^2.$$

$$I_\varphi = I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \cdot \left|\frac{1 - e^{-2i\delta N}}{1 - e^{-2i\delta}}\right|^2.$$

Вычислим квадрат модуля комплексного числа, входящего в эту формулу.

4.5. Дифракция Фраунгофера на периодической структуре.

Вычислим квадрат модуля комплексного числа, входящего в эту формулу.

$$\left| \frac{1 - e^{-2i\delta N}}{1 - e^{-2i\delta}} \right|^2 = \frac{(1 - e^{-2i\delta N})(1 - e^{2i\delta N})}{(1 - e^{-2i\delta})(1 - e^{2i\delta})} = \frac{1 - e^{-2i\delta N} - e^{2i\delta N} + 1}{1 - e^{-2i\delta} - e^{2i\delta} + 1}.$$

Числитель:

$$\begin{aligned} 1 - e^{-2i\delta N} - e^{2i\delta N} + 1 &= 2 - 2(e^{-2i\delta N} - e^{2i\delta N}) = \\ &= 2(1 - \cos(2N\delta)) = 2 \cdot 2 \sin^2\left(\frac{2N\delta}{2}\right) = 4 \sin^2(N\delta). \end{aligned}$$

Знаменатель:

$$\begin{aligned} 1 - e^{-2i\delta} - e^{2i\delta} + 1 &= 2 - 2(e^{-2i\delta} - e^{2i\delta}) = \\ &= 2(1 - \cos(2\delta)) = 2 \cdot 2 \sin^2\left(\frac{2\delta}{2}\right) = 4 \sin^2(\delta). \end{aligned}$$

4.5. Дифракция Фраунгофера на периодической структуре.

$$\left| \frac{1 - e^{-2i\delta N}}{1 - e^{-2i\delta}} \right|^2 = \frac{4 \sin^2(N\delta)}{4 \sin^2(\delta)} = \frac{\sin^2(N\delta)}{\sin^2(\delta)}.$$

Итого

$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{\sin^2(N\delta)}{\sin^2(\delta)},$$

где

$$\delta = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi, \quad u = \frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi.$$

$$\frac{\sin^2 u}{u^2}$$

характеризует распределение интенсивности излучения в результате дифракции на одной щели.

$$\frac{\sin^2(N\delta)}{\sin^2(\delta)}$$

характеризует распределение интенсивности излучения в результате интерференции пучков, исходящих из различных щелей.

4.5. Дифракция Фраунгофера на периодической структуре.

$$I_{1\varphi} = \frac{\sin^2 u}{u^2}$$

Поведение этой функции было исследовано при рассмотрении вопроса о дифракции на отверстиях.

Она имеет максимумы при

$$b \sin \varphi = (2m + 1) \frac{\lambda}{2},$$

и минимумы при

$$b \sin \varphi = m\lambda.$$

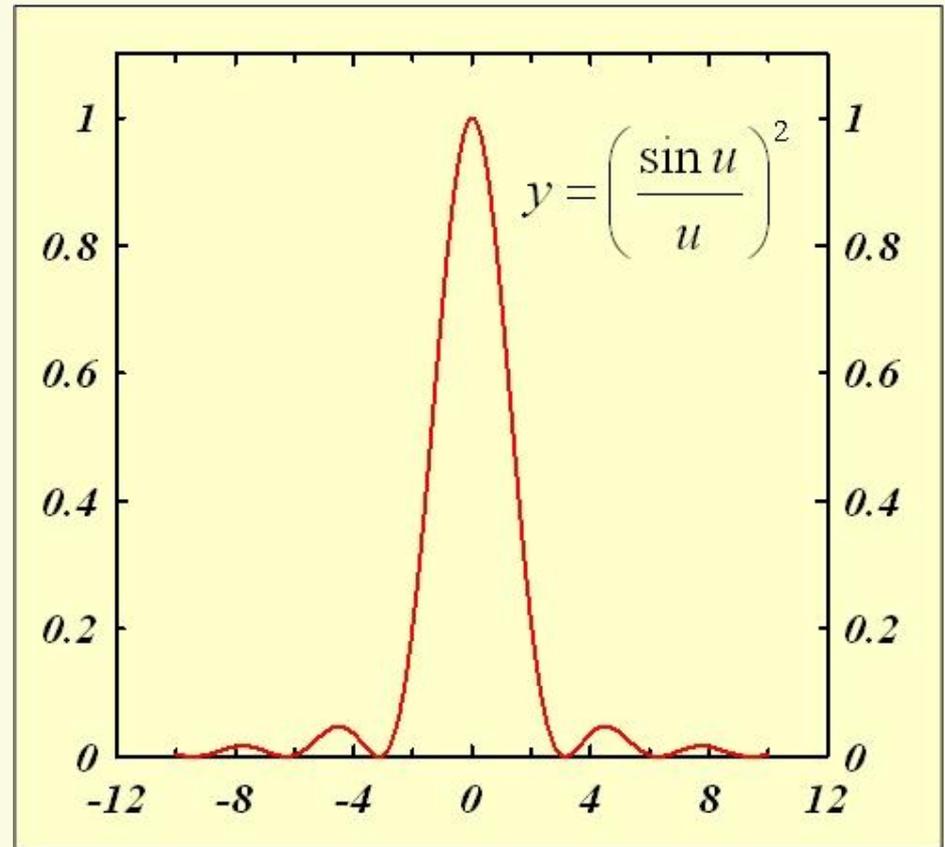


График этой функции показан на рисунке.

4.5. Дифракция Фраунгофера на периодической структуре.

Рассмотрим поведение функции, описывающей результаты интерференции пучков, исходящих из различных отверстий,

$$I_{2\varphi} = \left(\frac{\sin(N\delta)}{\sin(\delta)} \right)^2.$$

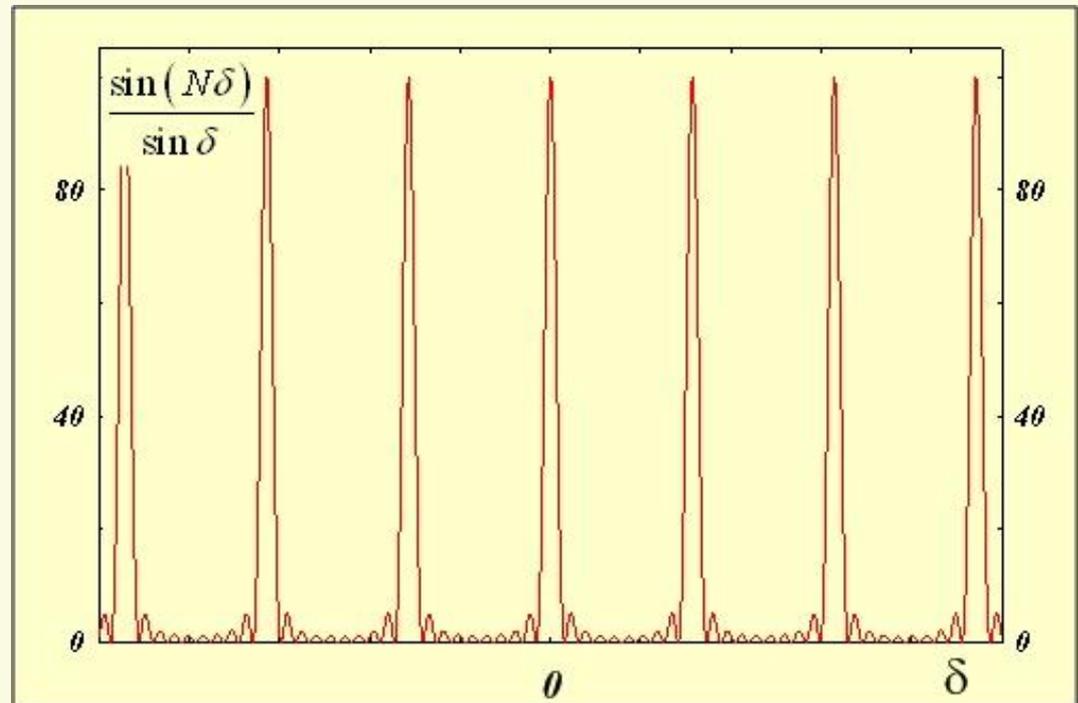
Известно, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sin(N\delta)}{\sin(\delta)} = N.$$

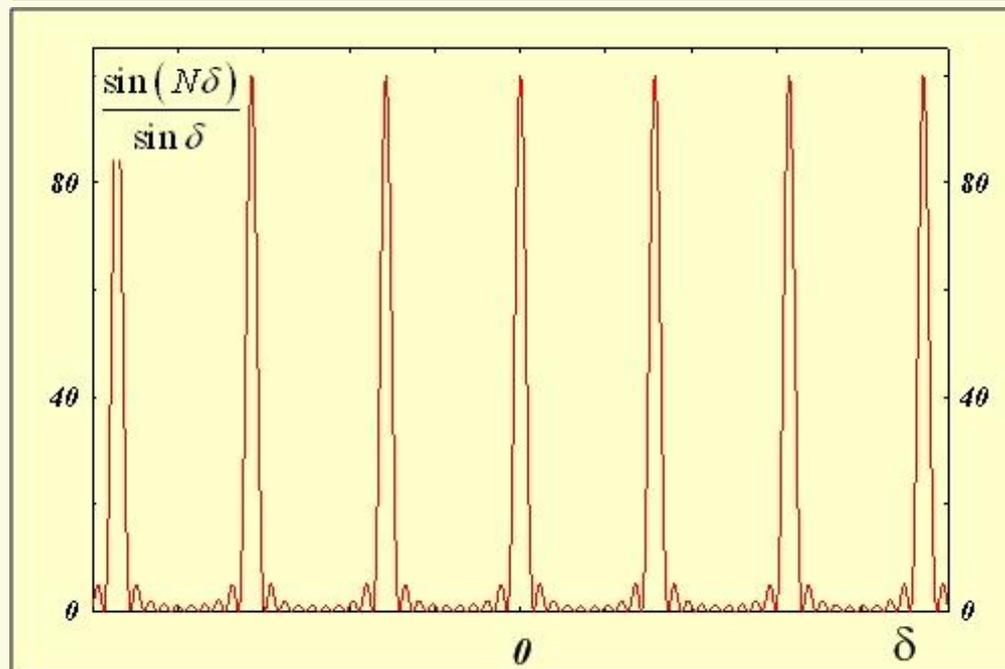
Эти значения являются максимумами функции.

При $\delta \rightarrow 0$

$I_{2\varphi} = N^2$, где N – число щелей дифракционной решётки (обычно оно очень велико).



4.5. Дифракция Фраунгофера на периодической структуре.



Максимумы функции наблюдаются при

$$\delta \rightarrow 0.$$

$$\delta = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi = m\pi,$$

m — целое.

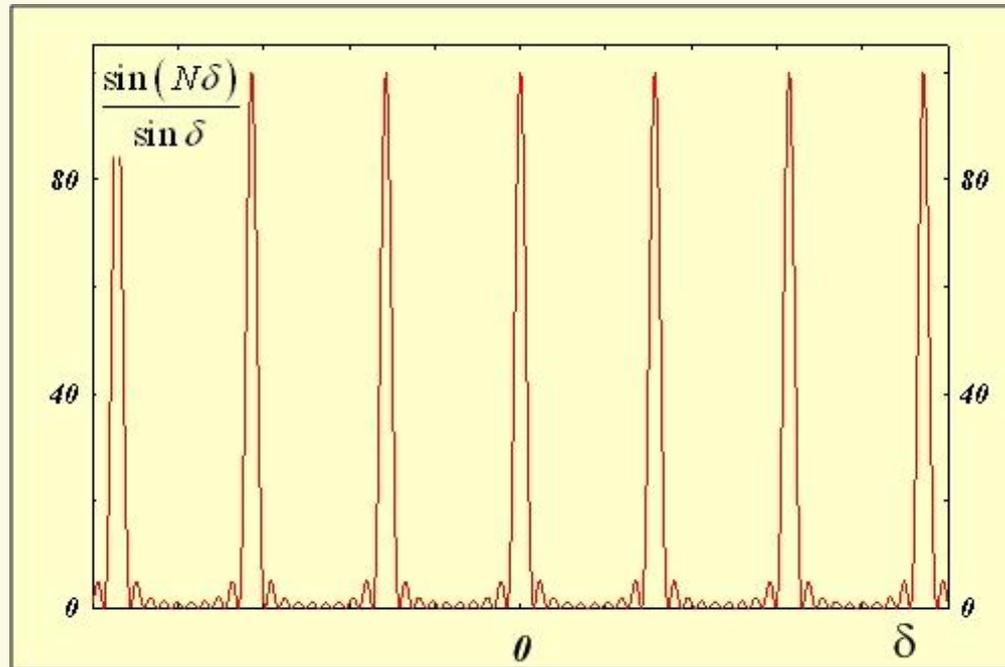
$$\frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi = m\pi,$$

$$d \sin \varphi = m\lambda.$$

Максимумы интенсивности излучения, возникающие при выполнении последнего условия называются главными максимумами.

Остальные максимумы интенсивности излучения (см. график) называются побочными максимумами.

4.5. Дифракция Фраунгофера на периодической структуре.



Побочные максимумы
возникают, когда

$$\sin(N\delta) \rightarrow 0,$$

но, в то же время

$$\sin(\delta) \neq 0.$$

Перечислим условия наблюдения всех максимумов. Условия наблюдения главных максимумов выделены красным.

$$N\delta = \mathbf{0}, \pi, 2\pi, \dots, (N-1)\pi, \mathbf{N\pi}, (N+1)\pi, \dots, (2N-1)\pi, \mathbf{2N\pi}, (2N+1)\pi, \dots$$

4.5. Дифракция Фраунгофера на периодической структуре.

Результирующая интенсивность является произведением двух функций:

$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{\sin^2 (N\delta)}{\sin^2 (\delta)},$$

где

$$\delta = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi, \quad u = \frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi.$$

На следующем рисунке этот факт проиллюстрирован для соотношения между шириной щели и периодом дифракционной решётки

$$\frac{d}{b} = 4.$$

4.5. Дифракция Фраунгофера на периодической структуре.

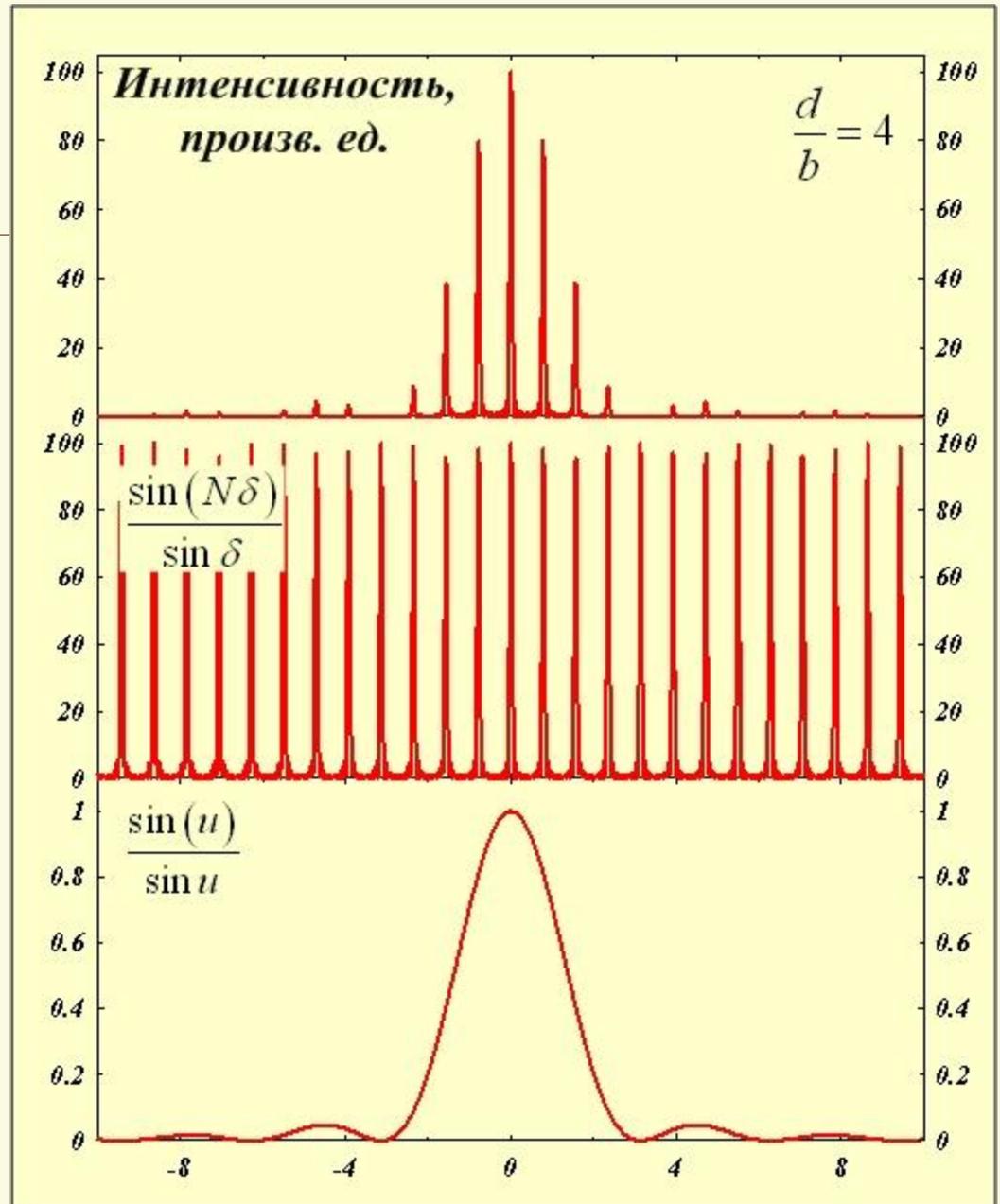
*Распределение
интенсивности
излучения*

$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{\sin^2(N\delta)}{\sin^2(\delta)},$$

где

$$\delta = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi,$$

$$u = \frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi.$$



4.5. Дифракция Фраунгофера на периодической структуре.

Краткие выводы.

1. Распределение интенсивности излучения при дифракции монохроматической волны на периодической структуре можно представить, как результат двух процессов: 1) дифракции волны на отверстии, 2) интерференции пучков, исходящих из всех отверстий.
2. Положение главных дифракционных максимумов определяется интерференцией пучков, исходящих из разных отверстий решётки.
Условие наблюдения главных максимумов

$$d \sin \varphi = m\lambda.$$

3. Интенсивность главных максимумов определяется как процессом дифракции на отдельном отверстии, так и процессом интерференции волн, исходящих из всех отверстий.

4.6. || Примеры решения задач. (Дифракция Фраунгофера).

A6. На щель шириной $b = 20$ мкм падает нормально параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 500$ нм). Найти ширину изображения A щели на экране, удаленном от щели на расстояние $L = 1$ м.

Дано:

$$\lambda = 500 \text{ нм}$$

$$L = 1 \text{ м}$$

$$b = 20 \text{ мкм}$$

$A - ?$

Решение

Шириной изображения будем считать расстояние между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны от главного максимума освещенности.

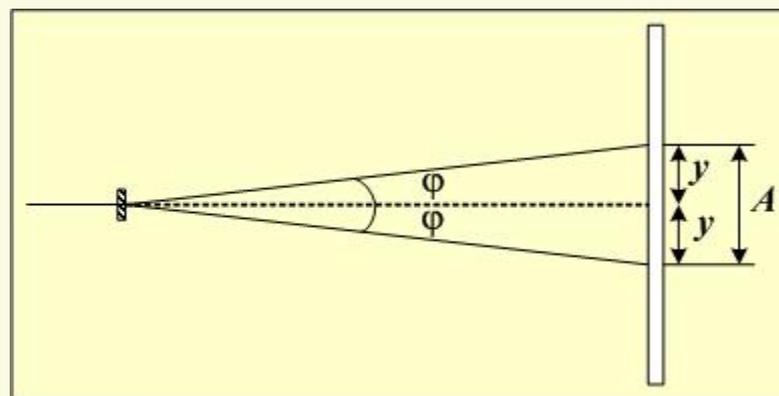
Положение дифракционных минимумов на экране определяется формулой

$$b \sin \varphi = m\lambda.$$

$$\sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{L}, \quad m = 1.$$

$$b \frac{y}{L} = \lambda, \quad y = \lambda \frac{L}{b}, \quad A = 2y = 2\lambda \frac{L}{b},$$

$$A = 2\lambda \frac{L}{b} = 2 \cdot 500 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^{-7}} = 5 \cdot 10^{-2} (\text{м}).$$



Ответ: $A = 5 \text{ см.}$

A7. На щель шириной $b = 6\lambda$ падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ . Под каким углом α будет наблюдаться третий дифракционный минимум интенсивности света?

Дано:

$$b = 6\lambda$$

$\alpha - ?$

Решение

Положение дифракционных минимумов на экране определяется формулой

$$b \sin \alpha = m\lambda.$$

$$\sin \alpha = \frac{m\lambda}{b}.$$

$$\alpha = \arcsin \frac{m\lambda}{b} = \arcsin \frac{3\lambda}{6\lambda} = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Ответ: $\alpha = 30^\circ$.

48. На дифракционную решетку нормально падает пучок света. Натриевая линия ($\lambda_1 = 589 \text{ нм}$) дает в спектре первого порядка угол дифракции $\varphi_1 = 17^\circ 8'$. Некоторая линия дает в спектре второго порядка угол дифракции $\varphi_2 = 24^\circ 12'$. Найти длину волны этой линии и число штрихов на единицу длины решетки.

Дано:

$$\lambda_1 = 589 \text{ нм}$$

$$\varphi_1 = 17^\circ 8'$$

$$\varphi_2 = 24^\circ 12'$$

$$\lambda_2 - ?$$

$$N - ?$$

Решение

Положение дифракционных максимумов на экране определяется формулой

$$d \sin \varphi = m \lambda.$$

Запишем условие максимума для обеих линий:

$$\left[\begin{array}{l} d \sin \varphi_1 = \lambda_1, \\ d \sin \varphi_2 = 2 \lambda_2. \end{array} \right.$$

Разделив второе уравнение на первое, получим:

$$\frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} = 2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Отсюда:

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1 \sin \varphi_2}{2 \sin \varphi_1} \approx 410 \text{ (нм)}.$$

48. На дифракционную решетку нормально падает пучок света. Натриевая линия ($\lambda_1 = 589$ нм) дает в спектре первого порядка угол дифракции $\varphi_1 = 17^\circ 8'$. Некоторая линия дает в спектре второго порядка угол дифракции $\varphi_2 = 24^\circ 12'$. Найти длину волны этой линии и число штрихов на единицу длины решетки.

Решение (продолжение)

Число штрихов на единицу длины решётки

$$N = \frac{1}{d}.$$

$$d \sin \varphi_1 = \lambda_1, \quad d = \frac{\lambda_1}{\sin \varphi_1}.$$

$$d = \frac{\lambda_1}{\sin \varphi_1} \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ (м)}.$$

Ответ: $\lambda_2 = 409,9$ нм; $N = 500$ мм⁻¹.

49. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. На какую линию в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия ($\lambda_1 = 670$ нм) спектра второго порядка?

Решение

Дано:

$$\lambda_1 = 670 \text{ нм}$$

$$m_1 = 3$$

$$m_2 = 2$$

$$\lambda_2 - ?$$

Дифракционные максимумы на экране накладываются друг на друга, если для них равны углы дифракции.

Величины углов дифракции определяется формулой

$$d \sin \varphi = m\lambda.$$

Следовательно,

$$\sin \varphi = \frac{m\lambda}{d}.$$

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \frac{m_1 \lambda_1}{d} = \frac{m_2 \lambda_2}{d}.$$

$$m_1 \lambda_1 = m_2 \lambda_2, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_1 m_1}{m_2}.$$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1 m_1}{m_2} = \frac{2 \cdot 670}{3} \approx 447 \text{ (нм)}.$$

Ответ: $\lambda = 447$ нм

A10. Найти наибольший порядок спектра k для желтой линии натрия ($\lambda = 589 \text{ нм}$), если постоянная дифракционной решетки $d = 2 \text{ мкм}$.

Дано:

$$\lambda = 589 \text{ нм}$$

$$d = 2 \text{ мкм}$$

$$m_{\max} - ?$$

Решение

Величины углов дифракции определяется формулой

$$d \sin \varphi = m\lambda.$$

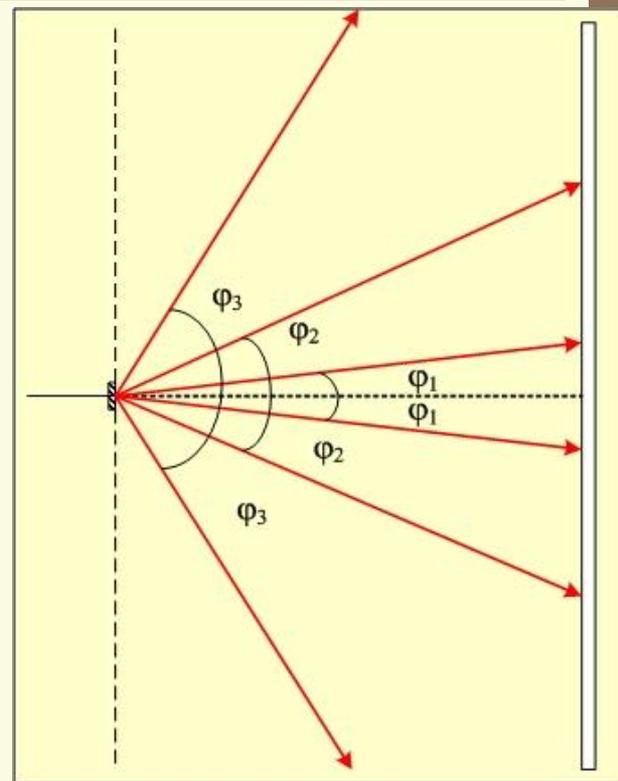
Следовательно,

$$\sin \varphi = \frac{m\lambda}{d}.$$

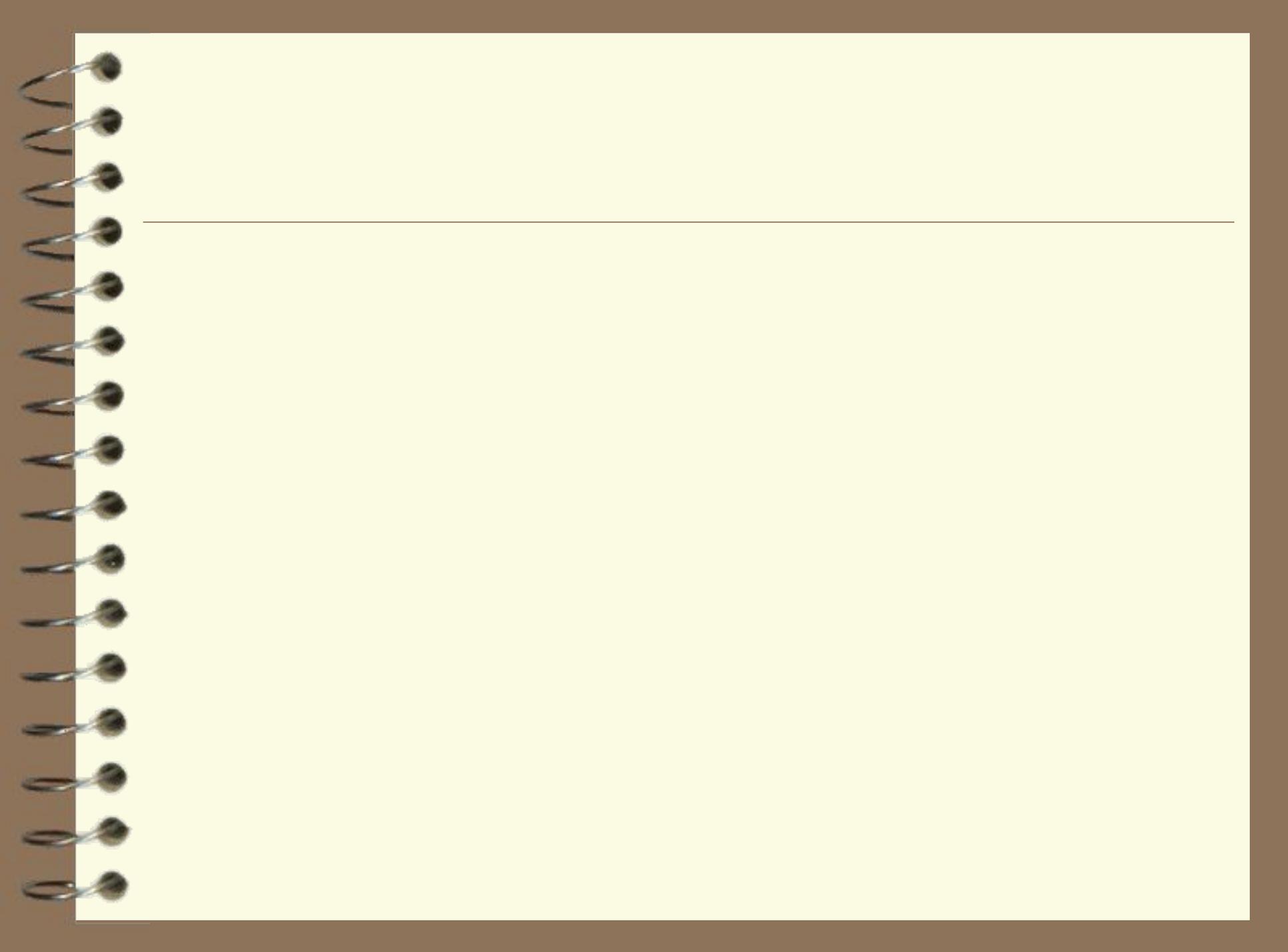
Допустимы такие m , когда $\frac{m\lambda}{d} \leq 1$.

$$m \leq \frac{d}{\lambda}. \quad m \leq \frac{2 \cdot 10^{-6}}{0,589 \cdot 10^{-6}} \approx 3,396.$$

$$k = m_{\max} = 3.$$



Ответ: $k = 3$.



43. Найти радиусы первых пяти зон Френеля для плоской волны, если расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения = 1 м. Длина волны света = 500 нм.

Ответ: = 0,71 мм, = 1,0 мм, = 1,22 мм, = 1,41 мм, = 1,58 мм.

А1. Свет от монохроматического источника ($\lambda = 600$ нм) падает нормально на диафрагму с диаметром отверстия $d = 6$ мм. За диафрагмой на расстоянии $L = 3$ м от нее находится экран. Какое число m зон Френеля укладывается в отверстии диафрагмы, если точка наблюдения находится на экране напротив центра отверстия? Каким будет центр дифракционной картины на экране – темным или светлым?

Дано:

$$\lambda = 600 \text{ нм}$$

$$L = 3 \text{ м}$$

$$d = 6 \text{ мм}$$

$m - ?$

Решение

Ответ: $m = 5$; центр дифракционной картины будет светлым.