

Машина Тьюринга



Машина Тьюринга – абстрактный исполнитель, осуществляющий алгоритмический процесс

Это математический объект, а не физическая машина

Предложена Аланом Тьюрингом в 1936 году



Устройство машины Тьюринга



Машина Тьюринга включает в себя:

1. Внешний алфавит;
2. Внутренний алфавит;
3. Внешняя память (лента);
4. Каретка (управляющая головка);
5. Функциональная схема (программа);

Устройство машины Тьюринга



1) Внешний алфавит

$$A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$$

Элемент a_0 называется **пустой символ**



В этом алфавите в виде слова кодируется исходный набор данных и результат работы алгоритма

Устройство машины Тьюринга

2) Внутренний алфавит

$$Q = \{q_0, q_1, \dots, q_m\}, \{П, Л, С\}$$



В любой момент времени машина M находится в одном из состояний q_0, q_1, \dots, q_m

При этом: q_1 - начальное состояние
 q_0 - заключительное состояние

Символы $\{П, Л, С\}$ – символы сдвига (вправо, влево, на месте)

Устройство машины Тьюринга

3) Внешняя память (лента)

Машина имеет ленту, разбитую на ячейки, в каждую из которых может быть записана только одна буква



| | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| a_0 | a_2 | a_1 | a_5 | a_3 | a_0 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|

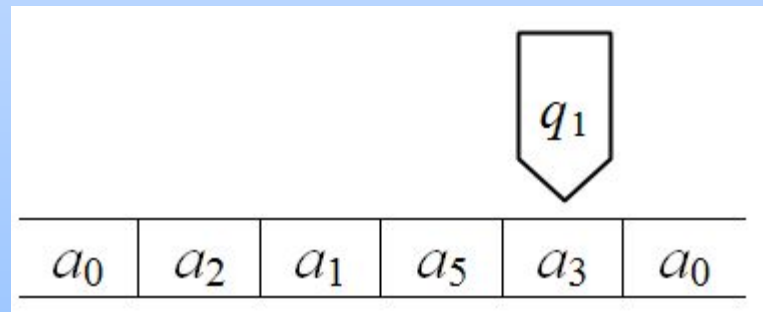
Пустая клетка содержит a_0 .

В каждый момент времени на ленте записано конечное число непустых букв

Устройство машины Тьюринга

4) Каретка (управляющая головка)

Каретка машины располагается над некоторой ячейкой ленты – воспринимает символ, записанный в ячейке



Устройство машины Тьюринга

5) Функциональная схема (программа)

Программа машины состоит из команд:

$$\begin{aligned} q_i a_j &\rightarrow q_k a_l X, & X &\in \{П, Л, С\} \\ i &= \overline{1, m}, & j &= \overline{1, n} \\ k &= \overline{1, m}, & l &= \overline{1, n} \end{aligned}$$

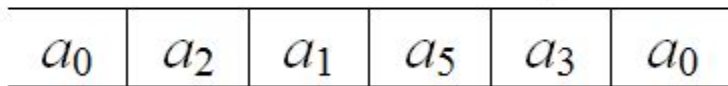
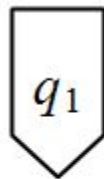
Для каждой пары (q_i, a_j) программа машины должна содержать одну команду.



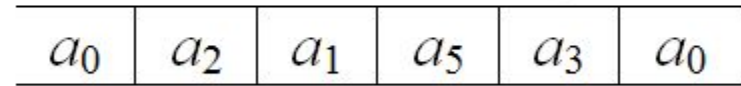
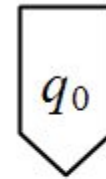
Описание работы машины Тьюринга



Стандартное положение называется **начальным (заключительным)**, если машина, воспринимающая слово в стандартном положении, находится в начальном состоянии q_1 (стоп-состоянии q_0)



начальное стандартное



заключительное стандартное

Описание работы машины Тьюринга



В соответствии с командой $q_i a_j \rightarrow q_k a_l X$ выполняются следующие действия:



1) Содержимое обозреваемой ячейки a_j стирается и в нее записывается символ a_l (который может совпадать с a_j)

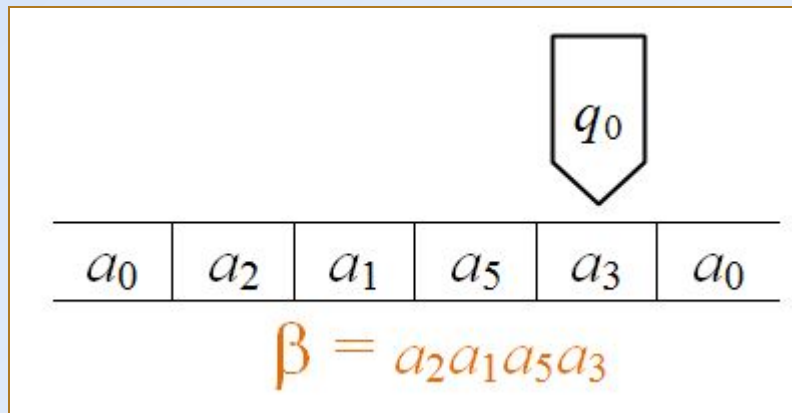
2) Машина переходит в новое состояние q_k (оно может совпадать с состоянием q_i)

3) Каретка перемещается в соответствии с управляемым символом $X \in \{П, Л, С\}$

Описание работы машины Тьюринга

При переходе машины в заключительное состояние q_0 ее работа прекращается

На ленте записан результат работы алгоритма – слово β в алфавите $A \setminus \{a_0\}$



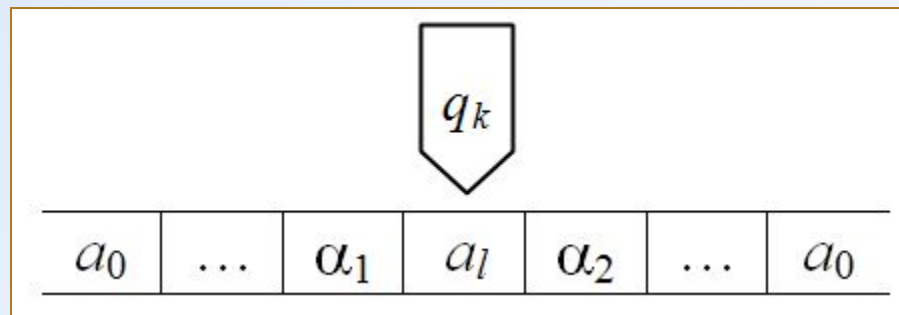


Машинным словом (конфигурацией) машины Тьюринга называется слово вида $\alpha_1 q_k a_l \alpha_2$, где α_1 и α_2 - слова в алфавите A .



Конфигурация $\alpha_1 q_k a_l \alpha_2$ интерпретируется следующим образом:

- машина находится в состоянии q_k
- каретка обозревает на ленте символ a_l
- α_1 и α_2 – это содержимое ленты до и после символа a_l





Пример

Дана машина Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{a_0, 1, * \}$, алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, и следующей функциональной схемой:

| | q_1 | q_2 | q_3 |
|-------|--------------------|------------------|--------------------|
| a_0 | | $q_3 1 \Pi$ | $q_1 a_0 \text{Л}$ |
| 1 | $q_2 a_0 \text{Л}$ | $q_2 1 \text{Л}$ | $q_3 1 \Pi$ |
| * | $q_0 a_0 \text{С}$ | $q_2 * \text{Л}$ | $q_3 * \Pi$ |

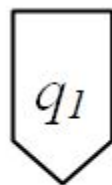
Применить машину Тьюринга к слову $\alpha = 11^*1$, начиная со стандартного начального положения



Решение

| | q_1 | q_2 | q_3 |
|-------|--------------------|------------------|--------------------|
| a_0 | | $q_3 1 \Pi$ | $q_1 a_0 \text{Л}$ |
| 1 | $q_2 a_0 \text{Л}$ | $q_2 1 \text{Л}$ | $q_3 1 \Pi$ |
| * | $q_0 a_0 \text{С}$ | $q_2^* \text{Л}$ | $q_3^* \Pi$ |

1)



| | | | | | |
|-------|---|---|---|---|-------|
| a_0 | 1 | 1 | * | 1 | a_0 |
|-------|---|---|---|---|-------|

$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 \text{Л}$$



Решение

| | q_1 | q_2 | q_3 |
|-------|--------------------|------------------|--------------------|
| a_0 | | $q_3 1 \Pi$ | $q_1 a_0 \text{Л}$ |
| 1 | $q_2 a_0 \text{Л}$ | $q_2 1 \text{Л}$ | $q_3 1 \Pi$ |
| * | $q_0 a_0 \text{С}$ | $q_2^* \text{Л}$ | $q_3^* \Pi$ |

1)



| | | | | | |
|-------|---|---|---|---|-------|
| a_0 | 1 | 1 | * | 1 | a_0 |
|-------|---|---|---|---|-------|

$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 \text{Л}$$

1) Заменяем содержимое обозреваемой ячейки 1 на a_0

2)

| | | | | | |
|-------|---|---|---|-------|-------|
| a_0 | 1 | 1 | * | a_0 | a_0 |
|-------|---|---|---|-------|-------|



Решение

| | q_1 | q_2 | q_3 |
|-------|--------------------|------------------|--------------------|
| a_0 | | $q_3 1 \Pi$ | $q_1 a_0 \text{Л}$ |
| 1 | $q_2 a_0 \text{Л}$ | $q_2 1 \text{Л}$ | $q_3 1 \Pi$ |
| * | $q_0 a_0 \text{С}$ | $q_2^* \text{Л}$ | $q_3^* \Pi$ |

1)



| | | | | | |
|-------|---|---|---|---|-------|
| a_0 | 1 | 1 | * | 1 | a_0 |
|-------|---|---|---|---|-------|

$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 \text{Л}$$

2) Машина переходит в новое состояние q_2

2)



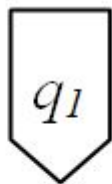
| | | | | | |
|-------|---|---|---|-------|-------|
| a_0 | 1 | 1 | * | a_0 | a_0 |
|-------|---|---|---|-------|-------|



Решение

| | q_1 | q_2 | q_3 |
|-------|--------------------|------------------|--------------------|
| a_0 | | $q_3 1\Pi$ | $q_1 a_0 \text{Л}$ |
| 1 | $q_2 a_0 \text{Л}$ | $q_2 1 \text{Л}$ | $q_3 1\Pi$ |
| * | $q_0 a_0 \text{С}$ | $q_2^* \text{Л}$ | $q_3^* \Pi$ |

1)

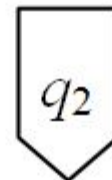


| | | | | | |
|-------|---|---|---|---|-------|
| a_0 | 1 | 1 | * | 1 | a_0 |
|-------|---|---|---|---|-------|

$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 \text{Л}$$

3) Каретка перемещается влево

2)



| | | | | | |
|-------|---|---|---|-------|-------|
| a_0 | 1 | 1 | * | a_0 | a_0 |
|-------|---|---|---|-------|-------|

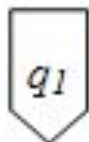


Решение

Полное подробное решение

| | q_1 | q_2 | q_3 |
|-------|--------------------|------------------|--------------------|
| a_0 | | $q_3 1 \Pi$ | $q_1 a_0 \text{Л}$ |
| 1 | $q_2 a_0 \text{Л}$ | $q_2 1 \text{Л}$ | $q_3 1 \Pi$ |
| * | $q_0 a_0 \text{С}$ | $q_2^* \text{Л}$ | $q_3^* \Pi$ |

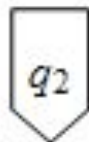
1)



| | | | | | |
|-------|---|---|---|---|-------|
| a_0 | 1 | 1 | * | 1 | a_0 |
|-------|---|---|---|---|-------|

$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 \text{Л}$$

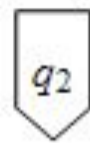
2)



| | | | | | |
|-------|---|---|---|-------|-------|
| a_0 | 1 | 1 | * | a_0 | a_0 |
|-------|---|---|---|-------|-------|

$$q_2 * \rightarrow q_2^* \text{Л}$$

3)



| | | | | | |
|-------|---|---|---|-------|-------|
| a_0 | 1 | 1 | * | a_0 | a_0 |
|-------|---|---|---|-------|-------|

$$q_2 1 \rightarrow q_2 1 \text{Л}$$

4)



| | | | | | |
|-------|---|---|---|-------|-------|
| a_0 | 1 | 1 | * | a_0 | a_0 |
|-------|---|---|---|-------|-------|

$$q_2 1 \rightarrow q_2 1 \text{Л}$$

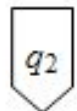


Решение

Полное подробное решение

| | q_1 | q_2 | q_3 |
|-------|------------------|-------------|---------------|
| a_0 | | $q_3 1 \Pi$ | $q_1 a_0 \Pi$ |
| 1 | $q_2 a_0 \Pi$ | $q_2 1 \Pi$ | $q_3 1 \Pi$ |
| * | $q_0 a_0 \Sigma$ | $q_2^* \Pi$ | $q_3^* \Pi$ |

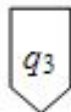
5)



| | | | | | |
|-------|---|---|---|-------|-------|
| a_0 | 1 | 1 | * | a_0 | a_0 |
|-------|---|---|---|-------|-------|

$q_2 a_0 \rightarrow q_3 1 \Pi$

6)



| | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|-------|-------|
| a_0 | 1 | 1 | 1 | * | a_0 | a_0 |
|-------|---|---|---|---|-------|-------|

$q_3 1 \rightarrow q_3 1 \Pi$

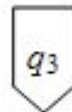
7)



| | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|-------|-------|
| a_0 | 1 | 1 | 1 | * | a_0 | a_0 |
|-------|---|---|---|---|-------|-------|

$q_3 1 \rightarrow q_3 1 \Pi$

8)



| | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|-------|-------|
| a_0 | 1 | 1 | 1 | * | a_0 | a_0 |
|-------|---|---|---|---|-------|-------|

$q_3^* \rightarrow q_3^* \Pi$

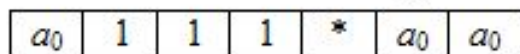
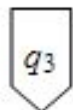


Решение

Полное подробное решение

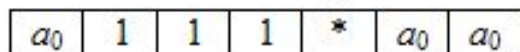
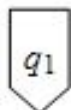
| | q_1 | q_2 | q_3 |
|-------|------------------|-------------|---------------|
| a_0 | | $q_3 1\Pi$ | $q_1 a_0 \Pi$ |
| 1 | $q_2 a_0 \Pi$ | $q_2 1 \Pi$ | $q_3 1 \Pi$ |
| * | $q_0 a_0 \Sigma$ | $q_2^* \Pi$ | $q_3^* \Pi$ |

9)



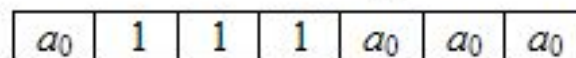
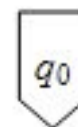
$$q_3 a_0 \rightarrow q_1 a_0 \Pi$$

10)



$$q_1 * \rightarrow q_0 a_0 \Sigma$$

11)



$$\underline{\beta = 111}$$



Решение

| | q_1 | q_2 | q_3 |
|-------|--------------------|------------------|--------------------|
| a_0 | | $q_3 1\Pi$ | $q_1 a_0 \text{Л}$ |
| 1 | $q_2 a_0 \text{Л}$ | $q_2 1 \text{Л}$ | $q_3 1\Pi$ |
| * | $q_0 a_0 \text{С}$ | $q_2^* \text{Л}$ | $q_3^* \Pi$ |

Решение, записанное с помощью конфигураций
(в строчку)

$$\begin{aligned}
 & a_0 1 1 * q_1 1 a_0 \Rightarrow a_0 1 1 q_2 * a_0 \Rightarrow a_0 1 q_2 1 * a_0 \Rightarrow a_0 q_2 1 1 * a_0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow a_0 q_2 a_0 1 1 * a_0 \Rightarrow a_0 1 q_3 1 1 * a_0 \Rightarrow a_0 1 1 q_3 1 * a_0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow a_0 1 1 1 q_3 * a_0 \Rightarrow a_0 1 1 1 * q_3 a_0 \Rightarrow a_0 1 1 1 q_1 * a_0 \Rightarrow a_0 1 1 1 q_0 a_0
 \end{aligned}$$


$$\alpha = 1^*11$$

| | q_1 | q_2 | q_3 |
|-------|-------------|------------|-------------|
| a_0 | | $q_31\Pi$ | $q_1a_0\Pi$ |
| 1 | $q_2a_0\Pi$ | $q_21\Pi$ | $q_31\Pi$ |
| * | q_0a_0C | $q_2^*\Pi$ | $q_3^*\Pi$ |

Ответ: $\beta = 111$