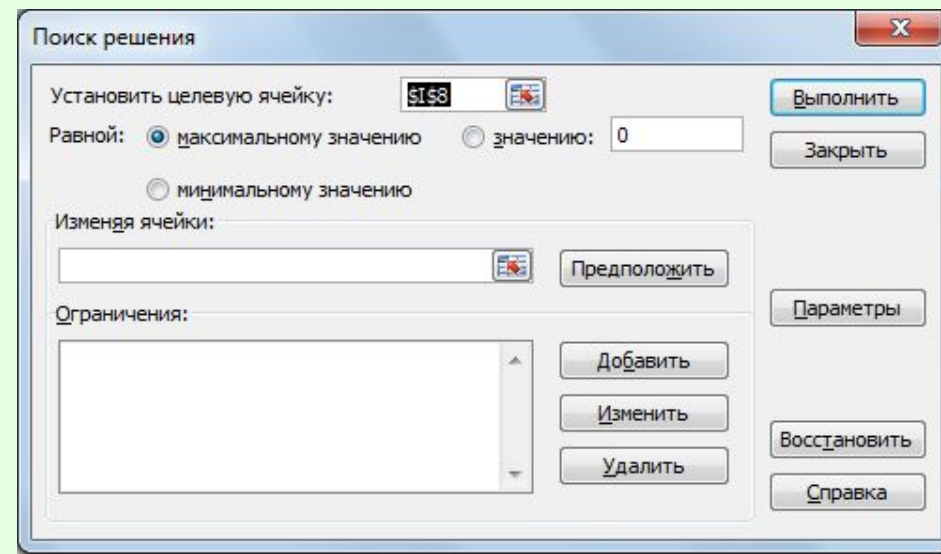
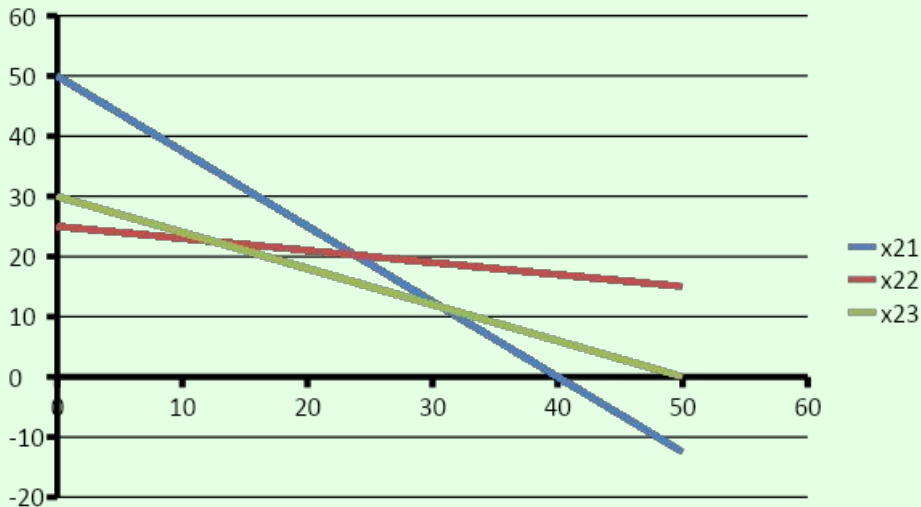


Задачи линейного программи- рования

Одноиндексны
е
ЗЛП



Задача 1: Постановка

Нефтеперерабатывающая установка может работать в двух режимах. При работе в **первом** режиме из одной тонны нефти производится **300 кг темных** и **600 кг светлых** нефтепродуктов; при работе во **втором** режиме — **700 кг темных** и **200 кг светлых** нефтепродуктов. Ежедневно на этой установке необходимо производить **110 т темных** и **70 т светлых** нефтепродуктов. Это плановое задание необходимо ежедневно выполнять, расходуя минимальное количество нефти.

1. Сколько тонн нефти следует ежедневно перерабатывать в первом режиме?
2. Сколько тонн нефти следует ежедневно перерабатывать во втором режиме?
3. Каков минимальный ежедневный расход нефти?
4. На сколько тонн увеличится ежедневный минимальный расход нефти, если потребуются производить в день 80 т светлых нефтепродуктов?

Задача 1: Ввод обозначений

1. Сколько тонн нефти следует ежедневно перерабатывать в первом режиме?

Пусть:

x_1 – кол-во тонн нефти, перерабатываемое в первом режиме;

2. Сколько тонн нефти следует ежедневно перерабатывать во втором режиме?

x_2 – кол-во тонн нефти, перерабатываемое во втором режиме;

3. Каков минимальный ежедневный расход нефти?

Тогда:

$x_1 + x_2$ – ежедневный расход нефти (тонн).

Задача 1: Формализация ограничений

Технологические особенности, приведенные в условии задачи, для наглядности сведем в таблицу:

Вид нефтепродуктов	Производство (т)		Ежедневная потребность (т)
	Первый режим	Второй режим	
Темные	0,3	0,7	110
Светлые	0,6	0,2	70

Тогда:

$0,3 \cdot x_1$ – выход темных нефтепродуктов при работе в первом режиме;

$0,7 \cdot x_2$ – выход темных нефтепродуктов при работе во втором режиме;

$$0,3 \cdot x_1 + 0,7 \cdot x_2 \geq 110$$

Первое
ограничение

Задача 1: Формализация ограничений

Вид нефтепродуктов	Производство (т)		Ежедневная потребность (т)
	Первый режим	Второй режим	
Темные	0,3	0,7	110
Светлые	0,6	0,2	70

Тогда:

$0,6 \cdot x_1$ – выход темных нефтепродуктов при работе в первом режиме;

$0,2 \cdot x_2$ – выход темных нефтепродуктов при работе во втором режиме;

$$0,6 \cdot x_1 + 0,2 \cdot x_2 \geq 70$$

Второе
ограничение

Задача 1: Модель задачи

Вид нефтепродуктов	Производство (т)		Ежедневная потребность (т)
	Первый режим (x_1)	Второй режим (x_2)	
Темные	0,3	0,7	110
Светлые	0,6	0,2	70

Поскольку плановое задание необходимо ежедневно выполнять, расходуя *минимальное* количество нефти

тогда:

$$x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

Целевая функция

$$\left[\begin{array}{l} 0,3 \cdot x_1 + 0,7 \cdot x_2 \geq 110 \\ 0,6 \cdot x_1 + 0,2 \cdot x_2 \geq 70 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Ограничения

Задача 1: Графическое представление

$$x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

$$0,3 \cdot x_1 + 0,7 \cdot x_2 \geq 110$$

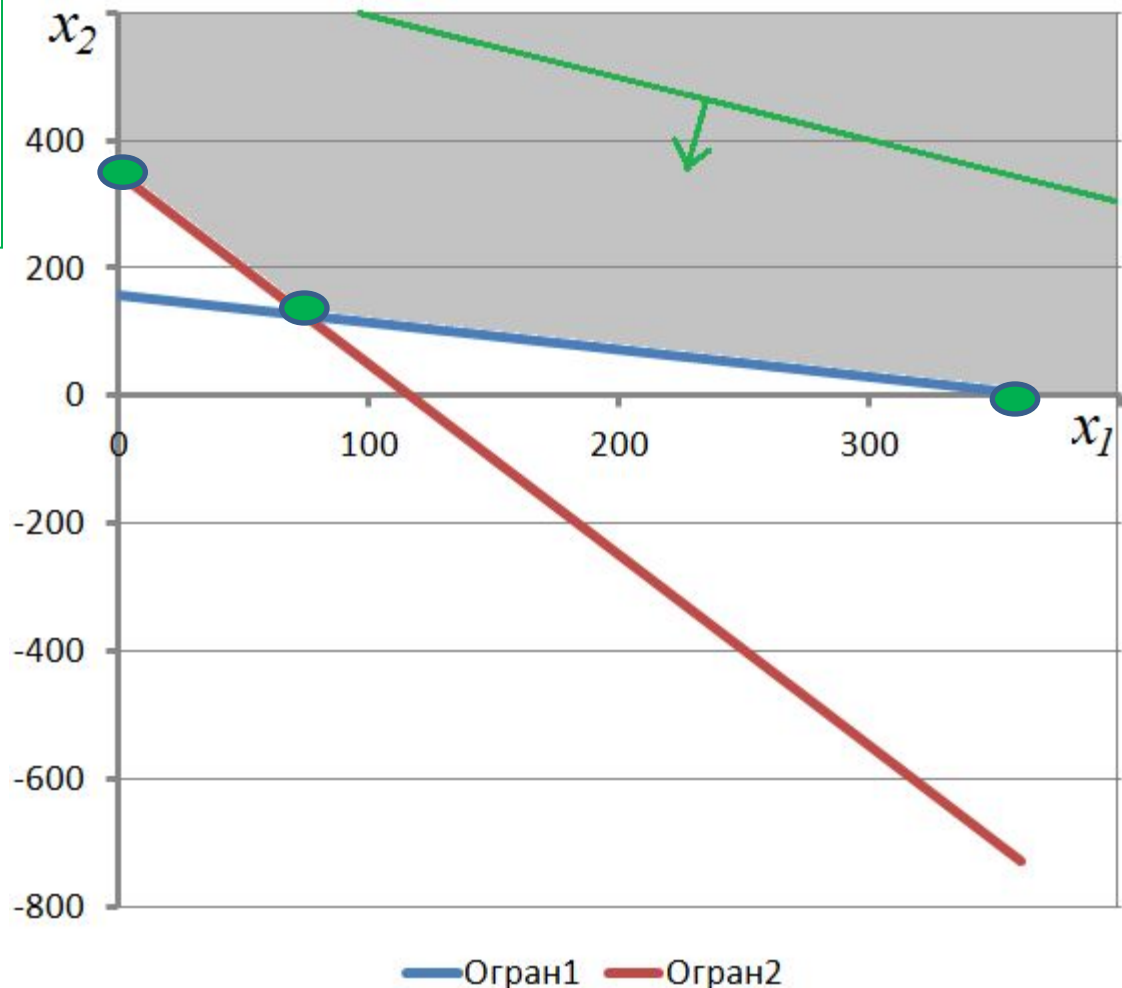
$$0,6 \cdot x_1 + 0,2 \cdot x_2 \geq 70$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Вершины области допустимых решений, одна из которых является решением (целевая функция принимает минимальное значение)

Область допустимых решений

Целевая функция



Задача 1: Графическое представление

$$x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 0,3 \cdot x_1 + 0,7 \cdot x_2 \geq 110 \\ 0,6 \cdot x_1 + 0,2 \cdot x_2 \geq 70 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

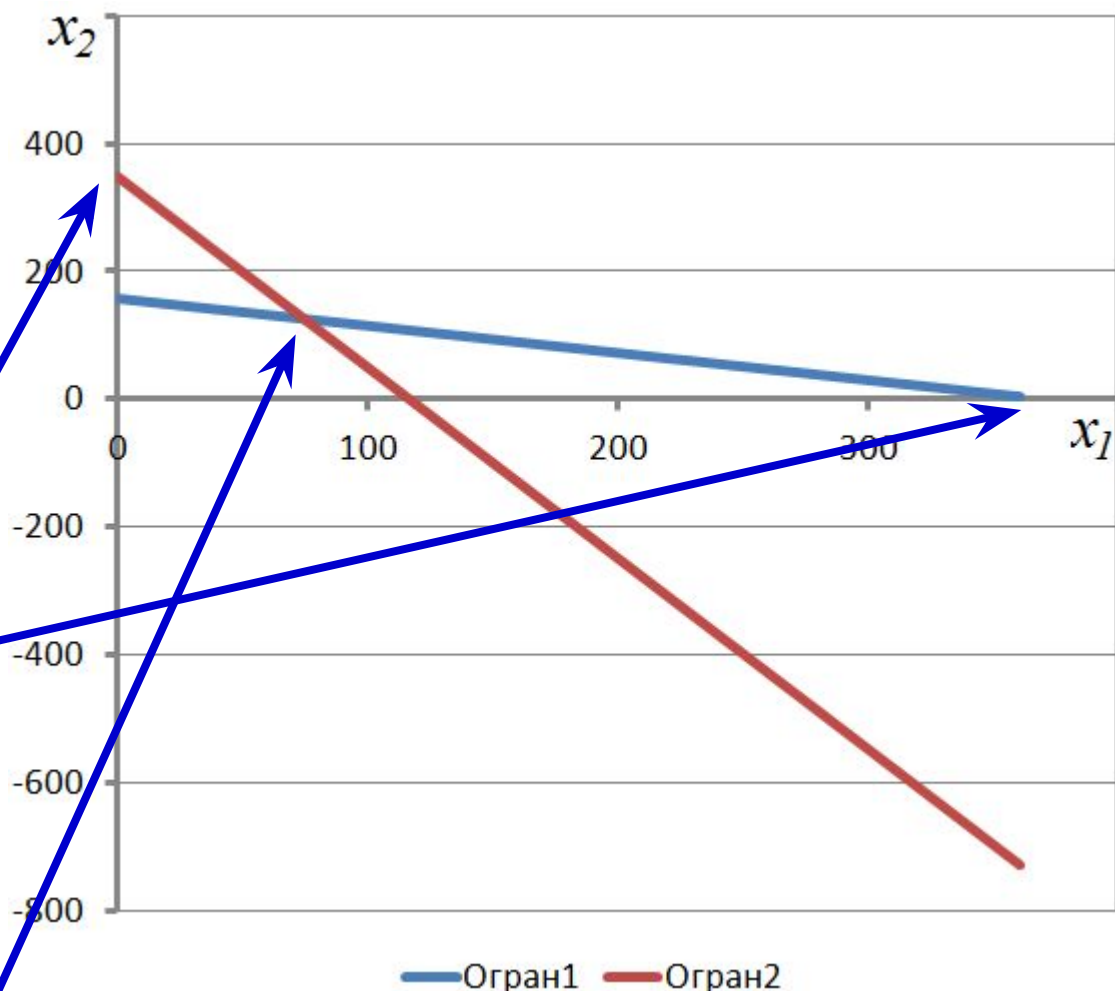
$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 350$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 366,7$$

$$\begin{cases} 0,3 \cdot x_1 + 0,7 \cdot x_2 = 110 \\ 0,6 \cdot x_1 + 0,2 \cdot x_2 = 70 \end{cases}$$



$$x_1 = 75; x_2 = 125$$



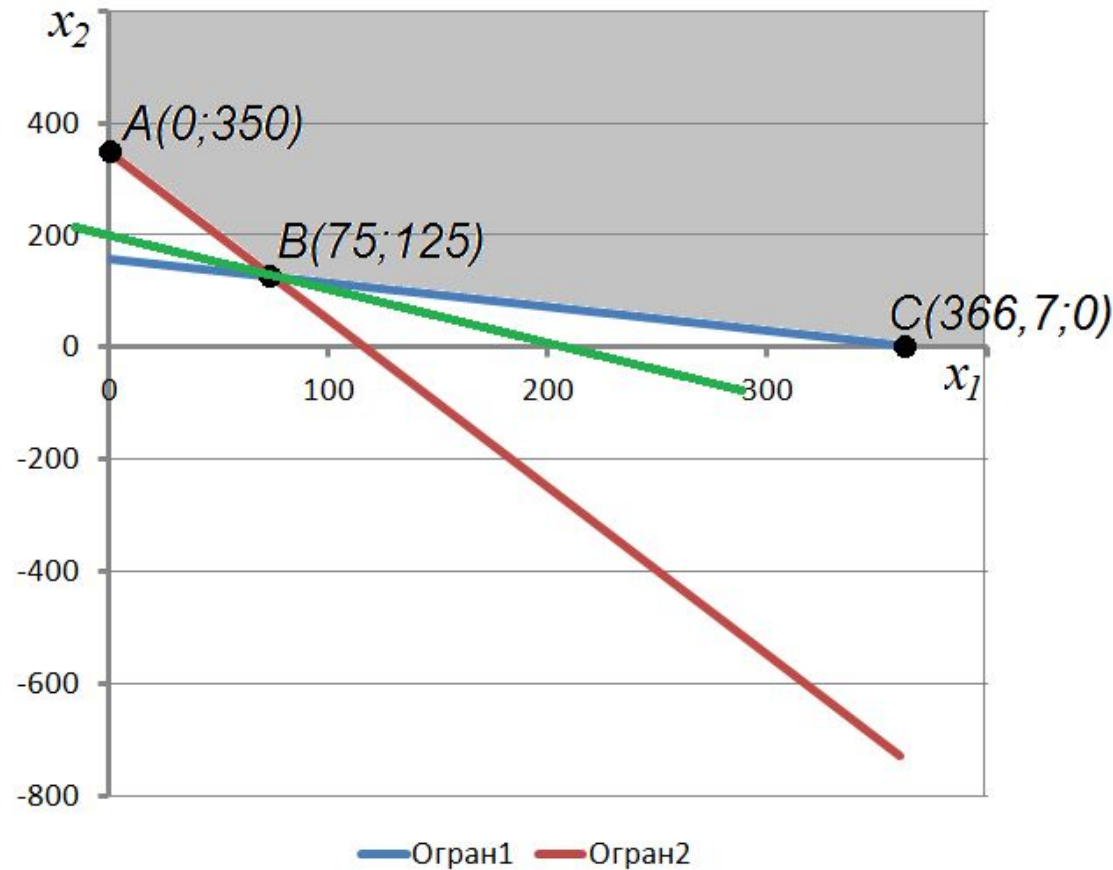
Задача 1: Результат графического решения

В первом режиме следует ежедневно перерабатывать **75 тонн** нефти.

Во втором режиме – **125 тонн**.

Минимальный ежедневный расход нефти – $75+125 = 200$ т.

4. На сколько тонн увеличится ежедневный минимальный расход нефти, если потребуется производить в день 80 т светлых нефтепродуктов?



Чтобы ответить, надо вновь строить график и решать систему уравнений

Задача 2: Постановка

Предприятие располагает ресурсами сырья и рабочей силы, необходимыми для производства двух видов продукции. Затраты ресурсов на изготовление одной тонны каждого продукта, прибыль, получаемая предприятием от реализации тонны продукта, а также запасы ресурсов указаны в следующей таблице:

	Расход ресурсов		Запас ресурса
	на продукт 1	на продукт 2	
Сырьё, т	3	5	120
Трудозатраты, ч	20	12	400
Прибыль на единицу продукта, тыс. руб / т	30	35	

Вопросы:

1. Сколько продукта 1 следует производить для того, чтобы обеспечить максимальную прибыль?
2. Сколько продукта 2 следует производить для того, чтобы обеспечить максимальную прибыль?
3. Какова максимальная прибыль?

Задача 2: Формализация условий

	Расход ресурсов		Запас ресурса
	на продукт 1	на продукт 2	
Сырьё, т	3	5	120
Трудозатраты, ч	20	12	400
Прибыль на единицу продукта, тыс. руб / т	30	35	

Пусть

x_1 – объём выпуска 1 продукта, т;

x_2 – объём выпуска 2 продукта, т,

Тогда:

суммарная прибыль

$$30 \cdot x_1 + 35 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

$$3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 120$$

$$20 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 \leq 400$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Целевая функция

Ограничения

Задача 2: Графическое решение

$$30 \cdot x_1 + 35 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

$$3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 120$$

$$20 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 \leq 400$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Множество
допустимых решений

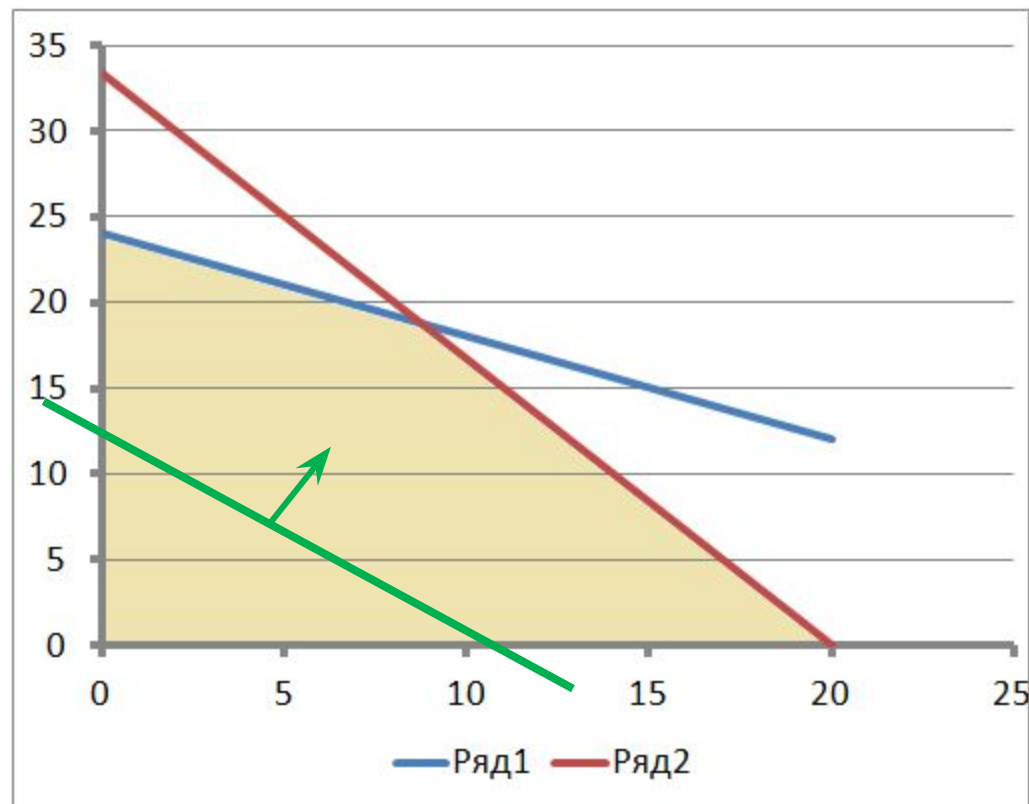
Решение:

$$x_1 = 8,75 \text{ т}$$

$$x_2 = 18,75 \text{ т}$$

Суммарная прибыль =
968,75 тыс. руб.

Целевая функция



Общая постановка задачи линейной оптимизации

Целевая функция (ЦФ)

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max (\min),$$

при ограничениях

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq (\geq, =) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq (\geq, =) b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq (\geq, =) b_m, \\ x_1, x_2, \dots, x_k \geq 0 (k \leq n). \end{array} \right.$$

Основные понятия

Допустимое решение – это совокупность чисел (план) $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи.

Оптимальное решение – это план, при котором ЦФ принимает свое **максимальное** (минимальное) значение.

При описании реальной ситуации с помощью линейной модели следует проверять наличие у модели таких свойств, как **пропорциональность** и **аддитивность**.

Основные понятия

Пропорциональность означает, что вклад каждой переменной в ЦФ и общий объем потребления соответствующих ресурсов должен быть *прямо пропорционален величине этой переменной*.

Например, если, продавая j -й товар в общем случае по цене 100 рублей, фирма будет делать скидку при определенном уровне закупки до уровня цены 95 рублей, то будет отсутствовать прямая пропорциональность между доходом фирмы и величиной переменной x_j . Т.е. в разных ситуациях *одна единица j -го товара будет приносить разный доход*.

Аддитивность означает, что ЦФ и ограничения должны представлять собой сумму вкладов от различных переменных.

Примером нарушения аддитивности служит ситуация, когда увеличение сбыта одного из конкурирующих видов продукции, производимых одной фирмой, влияет на объем реализации другого.

