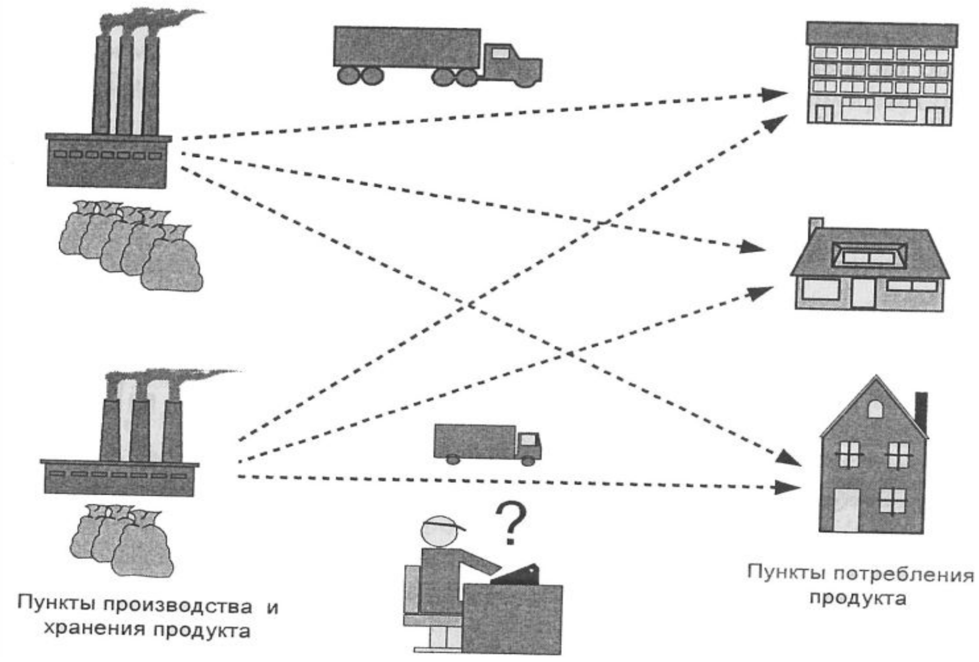
Транспортные задачи

Двухиндексные задачи линейного программирования

Классическая постановка задачи

В некотором географическом регионе имеется фиксированное число пунктов производства и хранения некоторого однородного продукта и конечное число пунктов потребления этого продукта. В качестве продукта может выступать, например, нефть, уголь, песок, цемент, т.д.

Для каждого из пунктов производства и хранения известен объем производства продукта или его запаса. Для каждого пункта потребления задана потребность в продукте в этом пункте потребления.



Требуется определить оптимальный план перевозок продукта, так чтобы потребности во всех пунктах потребления были удовлетворены, а суммарные затраты на транспортировку всей продукции были минимальными.

Математическая постановка

Пункты производства	Пункты потребления				Объемы производства (a_i)
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1 A_2 … A_m	c_{11} c_{21} … c_{m1}	c_{12} c_{22} … c_{m2}	… … … …	c_{1n} c_{2n} … c_{mn}	a_1 a_2 … a_m
Объемы потребления (b_j)	b_1	b_2	…	b_n	

c_{ij} – стоимость перевозки от i-го поставщика к j-ому потребителю;

x_{ij} – объём перевозки от i-го поставщика к j-ому потребителю;

Математическая модель задачи

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n} \end{cases}$$

План $X^* = \{x_{ij}^*\}, (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$, при котором функция *F(X)* принимает своё минимальное значение, называется **оптимальным планом** транспортной задачи.

Выбор критерия оптимальности

Оценка экономической эффективности примерного плана может определятся по тому или иному критерию, положенному в основу расчета плана. Этот критерий является экономическим показателем, характеризующим качество плана.

о настоящего времени нет бщепринятого единого критерия сторонне учиты-вающего номические факторы. При решении нспортной задачи, в качестве терия оптимальности в различных учаях используют следующие

Показатели оптимальности

1) **Объем работы транспорта**
(критерий - расстояние в т/км).

Минимум пробега удобен для оценки планов перевозок, поскольку расстояние перевозки определяется легко и точно для любого направления. Поэтому критерию нельзя решать транспортные задачи с участием многих видов транспорта.

С успехом применяется при решении транспортных задач для автомобильного транспорта и при разработке оптимальных схем перевозки однородных грузов автомобилями.

Показатели оптимальности

2) **Тарифная плата за перевозку груза** (критерий - тарифы провозных плат).

Позволяет получить схему перевозок, наилучшую с точки зрения хозрасчетных показателей предприятия.

Все надбавки, а также существующие льготные тарифы затрудняют его использование.

Показатели оптимальности

3) **Эксплуатационные расходы на транспортировку грузов**

(критерий - себестоимость эксплуатационных расходов).

Более верно отражает экономичность перевозок различными видами транспорта. Позволяет делать обоснованные выводы о целесообразности переключения с одного вида транспорта на другой.

Показатели оптимальности

4) Сроки доставки грузов

(критерий - затраты времени).

$$T = \sum \frac{l_{\text{уч}}}{v_{\text{уч}}} + \sum T_{\text{тех}}$$

Т – время доставки;

$l_{\text{уч}}$ – расстояние;

$v_{\text{уч}}$ – скорость доставки;

$T_{\text{тех}}$ – время техобслуживания.

Показатели оптимальности

5) **Приведенные затраты** (с учетом эксплуатационных расходов, зависящих от размеров движения и капиталовложения в подвижной состав).

Показатели оптимальности

6) **Приведенные затраты** (с учетом полных эксплуатационных расходов капиталовложений на строительство объектов в подвижной состав).

$$C_{прив} = C_{зав} + K_{эф}\left(K_{п} + \frac{T}{24}\frac{Ц}{365}\right) руб/т$$

где $C_{прив}$ - эксплуатационные издержки;

$C_{зав}$ – заводские издержки;

$K_{эф}$ - расчетный коэффициент эффективности капиталовложения;

$K_{п}$ - капитальные вложения, приходящие на 1 т груза на протяжении участка;

T - время следования;

$Ц$ - цена одной тоны груза.

Позволяет более полно производить оценку рационализации разных вариантов планов перевозок, с достаточно полным учётом одновременного влияния нескольких экономических факторов

Условие разрешимости транспортной задачи

Теорема: Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы запасы груза в пунктах отправления были равны потребности в грузе в пунктах назначения, т. е. чтобы выполнялось равенство:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Модель такой транспортной задачи называется **сбалансированной** или **закрытой**, или **замкнутой.**

В противном случае модель называется **открытой**

Условие разрешимости транспортной задачи

В случае $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводится фиктивный (*n+1*)-й пункт назначения с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, и соответствующие тарифы считаются равными нулю: $c_{i,\, n+1} = 0,\ i=1,m$.

Аналогично, при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводится фиктивный (*m+1*)-й пункт отправления с запасом груза $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, и соответствующие тарифы считаются равными нулю: $c_{m+1,\, j} = 0,$ $j=1,n$.

Этим задача сводится к закрытой транспортной задаче.

Условие разрешимости транспортной задачи

Число переменных x_{ij} в транспортной задаче с m пунктами отправления и n пунктами назначения равно $m \cdot n$, а число уравнений в системе – $n + m$.

Тогда число линейно независимых уравнений равно

$$n + m - 1.$$

Поэтому опорный план может иметь не более $n + m - 1$ отличных от нуля неизвестных.

Если в опорном плане число отличных от нуля компонент равно в точности $n + m - 1$, то план называется **невырожденным**, а если меньше – то **вырожденным**.

Общий алгоритм аналитического решения транспортной задачи методом потенциалов

1) Находим первоначальный допустимый план (*методы северо-западного угла, минимального элемента, двойного предпочтения, метод Фогеля*);
2) проверяем полученный план на оптимальность (*применяя свойства двойственных ЗЛП*);
3) пока план не оптимальный переходим к плану с меньшей стоимостью перевозок.

Нахождение первоначального допустимого плана

1. Метод северо-западного угла.

При нахождении опорного плана на каждом шаге рассматривают первый из оставшихся пунктов отправления и первый из оставшихся пунктов назначения. Заполнение клеток таблицы условий начинается с левой верхней клетки для неизвестного x_{11} («северо-западный угол») и заканчивается клеткой для неизвестного x_{mn}, т.е. как бы по диагонали таблицы.

Нахождение первоначального допустимого плана

2. Метод наименьшей стоимости.

Из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую и в клетку (*i, j*), которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел a_i и b_j.

Затем из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо и строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя.

Из оставшейся части таблицы стоимостей снова выбирают наименьшую стоимость, и процесс размещения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Нахождение первоначального допустимого плана

3. Метод двойного предпочтения.

В каждом столбце отмечают знаком «√» клетку с наименьшей стоимостью. Затем то же проделывают в каждой строке. В результате некоторые клетки имеют отметку «√√». В них находится минимальная стоимость, как по столбцу, так и по строке.

В эти клетки помещают максимально возможные объемы перевозок, каждый раз исключая из рассмотрения соответствующие столбцы или строки.

Затем распределяют перевозки по клеткам, отмеченным знаком «√». В оставшейся части таблицы перевозки распределяют по наименьшей

Нахождение первоначального допустимого плана

4. Метод аппроксимации Фогеля.

При определении опорного плана данным методом на каждой итерации по всем столбцам и всем строкам находят разность между двумя записанными в них минимальными тарифами.

Эти разности заносят в специально отведенные для этого строки и столбцы в таблице условий задачи.

Среди указанных разностей выбирают максимальную. В строке (или столбце), который данная разность соответствует, определяют минимальный тариф. Клетку, в которой он записан, заполняют на данной итерации.

Построенный первоначальный план транспортной задачи как задачи линейного программирования можно было бы довести до оптимального с помощью симплексного метода.

Однако из-за громоздкости симплексных таблиц, содержащих mn неизвестных, и большого объема вычислительных работ для получения оптимального плана используют более простые методы.

Метод потенциалов – нахождение оптимального плана

Составим двойственную задачу

$u_1, u_2, \dots, u_m, \quad v_1, v_2, \dots, v_n$ – *двойственные переменные;*

целевая функция: $T(u,v) = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \to \max$

ограничения: $u_i + v_j \le c_{ij}, \; i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$

Метод потенциалов

Теорема (критерий оптимальности)

Для того чтобы допустимый план перевозок в транспортной задаче $X^* = \{x_{ij}^*\}, (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа $u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n$, что

$u_i + v_j = c_{ij}$, если $x_{ij} > 0$,

$u_i + v_j < c_{ij}$, если $x_{ij} \leq 0$.

Числа u_i и v_j называются потенциалами пунктов отправления A_i и назначения B_j соответственно.

Алгоритм нахождения оптимального решения транспортной задачи методом потенциалов

1. Пусть одним из рассмотренных выше методов найден опорный план.
2. Для базисных клеток плана (их $m + n - 1$), определяем потенциалы u_i и v_j так, чтобы выполнялось условие

$$u_i + v_j = c_{ij} .$$

Поскольку система ограничений содержит $m + n - 1$ уравнений и $m + n$ неизвестных, то одну из них можно задать произвольно (например, приравнять к нулю). После этого определяются остальные потенциалы.

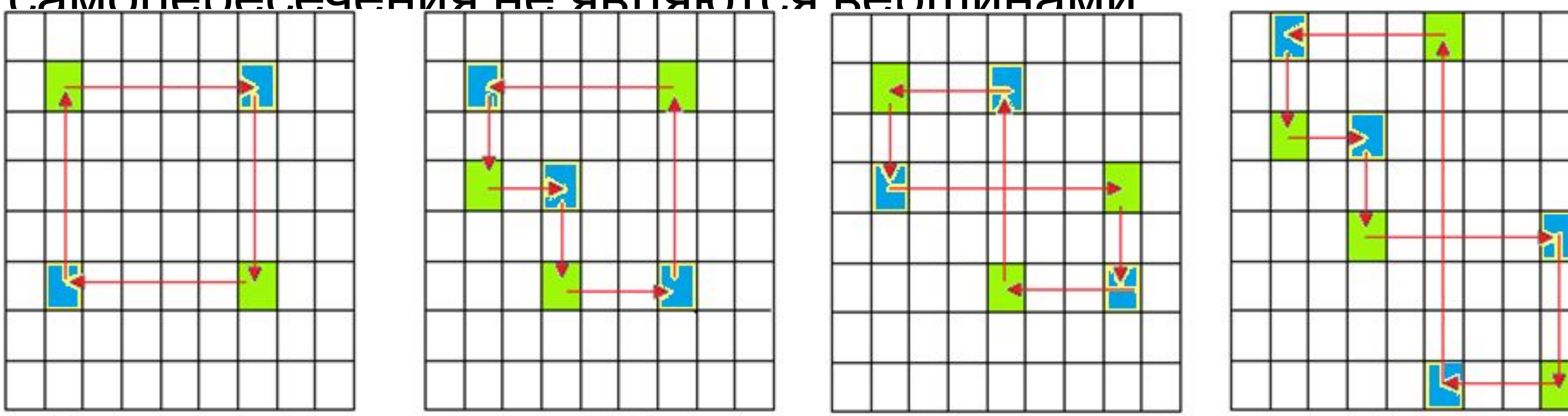
3. Для каждой из свободных клеток вычисляются величины

$$w_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}.$$

4. Если оказалось, что $w_{ij} < 0$, то план оптимален. Если же хотя бы в одной свободной клетке $w_{ij} > 0$, то план не является оптимальным и может быть улучшен путем переноса по циклу, соответствующему данной свободной клетке.

Алгоритм нахождения оптимального решения транспортной задачи методом потенциалов

Циклом в таблице условий транспортной задачи, называется ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья – вдоль строк и столбцов, причем в каждой вершине цикла встречается ровно два звена, одно из которых находится в строке, а другое – в столбце. Если ломанная линия, образующая цикл, пересекается, то точки самопересечения не являются вершинами



Пример

На четыре базы A_1, A_2, A_3, A_4 поступил однородный груз в следующем количестве: a_1 тонн – на базу A_1, a_2 тонн – на базу A_2, a_3 тонн – на базу A_3, a_4 тонн – на базу A_4. Полученный груз требуется перевезти в пять пунктов: b_1 тонн – на базу B_1, b_2 тонн – на базу B_2, b_3 тонн – на базу B_3, b_4 тонн – на базу B_4, b_5 тонн – на базу B_5. Расстояния между пунктами назначений указаны в матрице расстояний.

пункты отправления	пункты назначения					запасы
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**	
A_1	30	24	11	12	25	**21**
A_2	26	4	29	20	24	**19**
A_3	27	14	14	10	18	**15**
A_4	6	14	28	8	2	**25**
потребности	**15**	**15**	**15**	**15**	**20**	

Стоимость перевозок пропорциональна количеству груза и расстоянию, на которое этот груз перевозится. Спланировать перевозки так, чтобы их общая стоимость была минимальной.