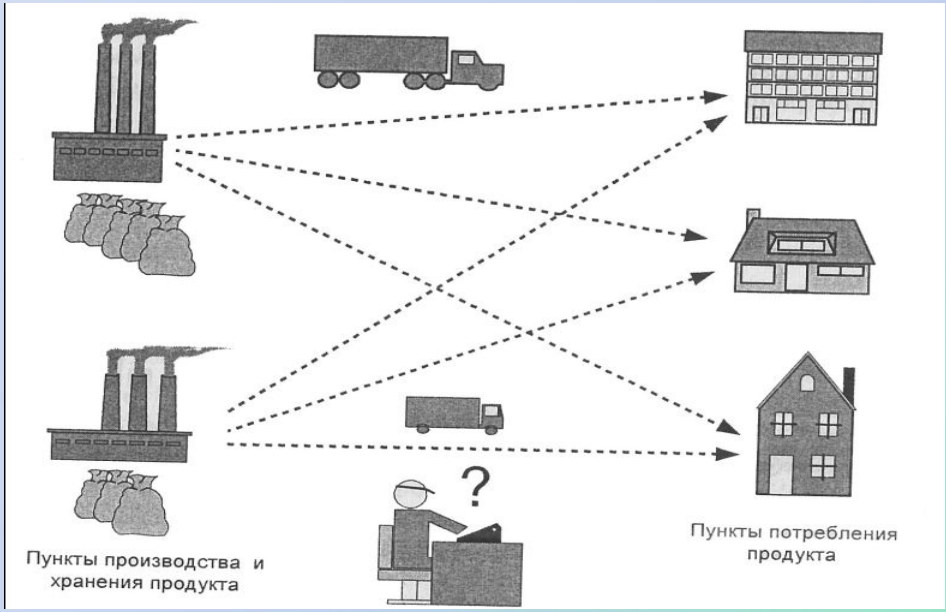
Транспортные задачи



Различные типы задач, сводящихся к модели транспортной задачи

1. Замкнутая транспортная задача.

Общее предложение *равно* общему спросу

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j .$$

Это необходимое и достаточное условие существования допустимого плана задачи.

2. Открытая транспортная задача

а) $\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j$ — ***излишек*** продукта

Способ сведения к замкнутой задаче.

Вводится фиктивный потребитель. Его потребность b_{m+1} равна величине избытка продукции, т.е.

$$b_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j;$$

«стоимость» перевозок к фиктивному потребителю $c_{i,m+1}$ =0

б) $\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j$ — ***дефицит*** продукта

Способ сведения к замкнутой задаче.

Вводится фиктивный производитель. Его потребность a_{n+1} равна величине дефицита продукции, т.е.

$$a_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i;$$

«стоимость» перевозок от фиктивного производителя $c_{n+1,j}$ =0

3. Транспортная задача с запретами

Пусть *для каких-то* пунктов i и j невозможна (запрещена) транспортировка продукта, то есть $x_{ij} = 0$.

Способ сведения к замкнутой задаче.

Соответствующие стоимости c_{ij} делаем достаточно большими числами, чтобы перевозка в данном направлении была невыгодна (приводила к значительному росту суммарной стоимости перевозки).

4. Транспортная задача с фиксированными перевозками

Если объем перевозок между пунктами i и j задан, то вводится дополнительное ограничение: $x_{ij} = v_{ij}$,

где v_{ij} — заданный объем перевозок.

5. Транспортная задача с ограничениями на пропускную способность

Если объем перевозок из пункта i в пункт j ограничен величиной w_{ij}, то вводится дополнительное ограничение: $x_{ij} \le w_{ij}$.

6. Транспортная задача с фиксированными доплатами

Предположим, что в открытой транспортной задаче имеет место дефицит продукта и для его устранения в пунктах $i=n+1,...,k$ возможно создание новых мощностей d_i.

Пусть переменные $z_i = 1$, если в пункте i (i=n+1,...,k) вводятся мощности d_i и $z_i = 0$, если в пункте i мощности не вводятся. Издержки на ввод мощностей d_i, составляют u_i.

С учетом возможности создания новых мощностей транспортная задача может быть записана в следующем виде:

6. Транспортная задача с фиксированными доплатами

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{i=n+1}^{k} u_i\, z_i \to \min,$$

— целевая функция (минимум затрат на транспортировку и ввод мощностей);

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

— ограничения предложения в каждом пункте производства;

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le d_i\, z_i, \quad i = n+1, \ldots, k,$$

— ограничения по величине предложения в каждом новом пункте производства;

$$\sum_{i=1}^{k} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \ldots, m,$$

— ограничения по величине спроса в каждом пункте потребления;

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, \ldots, k; \quad j = 1, \ldots, m.$$

— условия неотрицательности объемов перевозок.

Помимо непрерывных переменных x_{ij} в модель включены булевы переменные z_i,. Эта модель является задачей линейного программирования со «смешанными» переменными.

7. Задача о назначениях

В процессе управления производством часто возникают задачи назначения исполнителей на различные виды работ (*подбор кадров и назначение кандидатов на вакантные должности, распределение источников капитальных вложении между различными проектами, распределение экипажей самолетов между авиалиниями*).

Постановка задачи

Необходимо выполнить N различных работ. Для их выполнения можно привлечь N рабочих. Каждый рабочий за определенную плату готов выполнить любую работу. Каждая работа выполняется одним рабочим.

Требуется так распределить работы между рабочими, чтобы общие затраты на выполнение всех работ были минимальными.

7. Задача о назначениях

Обозначения:

c_{ij} — показатель эффективности назначения i-го рабочего на j-й работе, например, издержки выполнения i-м рабочим j-й работы;

x_{ij} — переменная модели ($x_{ij} = 1$, если i-й рабочий используется на j-й работе, и $x_{ij} = 0$ в противном случае)

7. Задача о назначениях

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \to \min,$$

— целевая функция (минимум издержек на выполнение всех работ);

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j=1,\ldots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i=1,\ldots,n,$$

— система ограничений, отражающая следующие условия:
а) каждая работа должна быть выполнена одним рабочим;
б) каждый рабочий может быть привлечен к одной работе;

$$x_{ij} \geq 0.$$

— условия неотрицательности переменных.

Исходной информацией является квадратная матрица **c={*c*$_{ij}$}**, элементы которой – показатели эффективности назначений.

Оптимальным планом задачи о назначениях является квадратная матрица назначений **x={*x*$_{ij}$}**, , ***в каждой строке и в каждом столбце которой*** *находится*