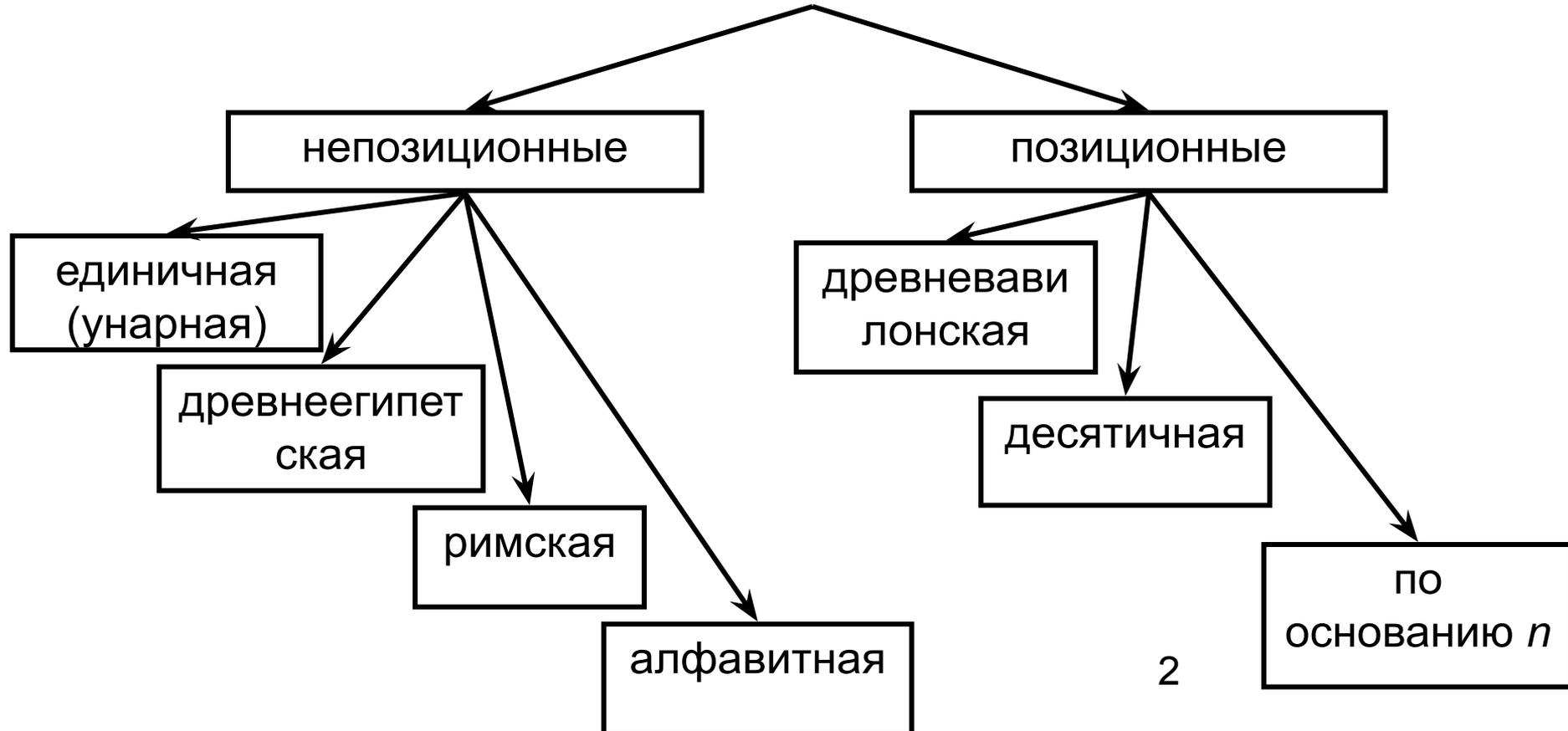


ТЕМА 1: СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

1. Определение системы счисления и виды СС.
2. Основные понятия позиционной системы счисления.
3. Правила перевода числа из одной системы счисления в другую.
4. Основные операции над двоичными числами.

1.1. Определение системы счисления и виды СС

Система счисления (СС) – это способ кодирования числовой информации, т.е. способ записи чисел с помощью некоторого алфавита, символы которого называют **цифрами**.



Древнеегипетская СС (система с основанием)

| | | |
|--|---------|--------------------|
|  | 1 | шест |
|  | 10 | дуга |
|  | 100 | пальмовый лист |
|  | 1000 | цветок лотоса |
|  | 10 000 | указательный палец |
|  | 100 000 | головастик |

                 -?

Римская СС (система с основанием)

| | |
|---|-------|
| I | 1 |
| V | 5 |
| X | 10 |
| L | 50 |
| C | 100 |
| D | 500 |
| M | 1 000 |

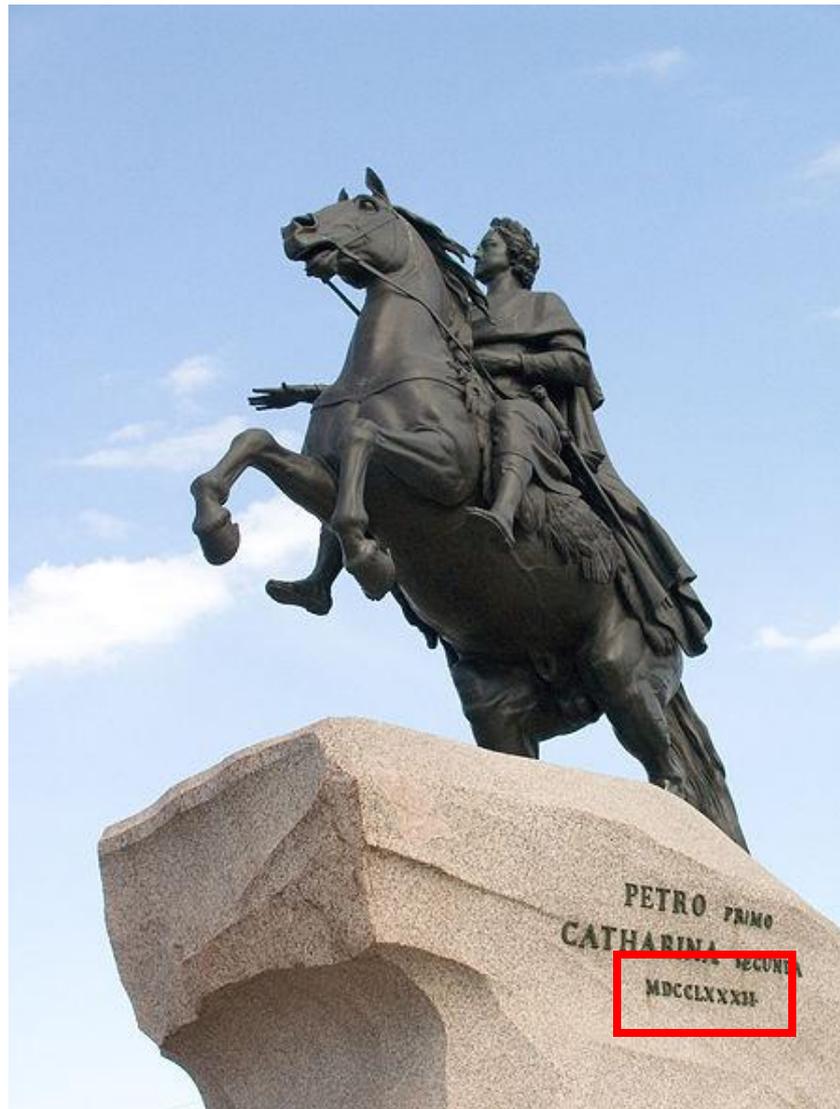
$$IV = 4$$

$$VI = 6$$

$$IX = 9$$

$$XI = 11$$

$$XXXX = XL (50-10) = 40$$



$$\text{MDCCLXXXII} = 1000 + 500 + 100 + 100 + 50 + 3 \cdot 10 + 2 = 1782$$

Древнерусская СС

А В Г Д Е С З И Ф

аз веди глаголь добра есть зело земля иже фита
1 2 3 4 5 6 7 8 9

І К Л М Н ђ О П Ч

и како люди мыслете наш кси он покой червь
10 20 30 40 50 60 70 80 90

Р С Т У Ф Х Ѩ Ц

рцы слово твердь ук ферт жа пси о цы
100 200 300 400 500 600 700 800 900

А І - 11

Л Г - 23

У Н З = 400 + 50 + 7 = 457

Числа, большие 900

| | | |
|---|--------|-------------|
|  | Тысяча | 1000 |
|  | Тьма | 10 000 |
|  | Легион | 100 000 |
|  | Леодр | 1 000 000 |
|  | Ворон | 10 000 000 |
|  | Колода | 100 000 000 |

Словесные СС

| Число | Русское название | Английское название |
|-------|------------------|---------------------|
| 0 | нуль | zero |
| 1 | один | one |
| 2 | два | two |
| 3 | три | three |
| 4 | четыре | four |
| 5 | пять | five |
| 6 | шесть | six |
| 7 | семь | seven |
| 8 | восемь | eight |
| 9 | девять | nine |
| 10 | десять | ten |
| 100 | сто | hundred |
| 1000 | тысяча | thousand |

11 - один-на-дцать (1 + 10)

15 - пят-на-дцать (5 + 10)

20 - два-дцать (2 * 10)

17000 - семнадцать тысяч (17 * 1000)

10017 - тысяча семнадцать (1000+17)

Представле ние чисел в различных системах счисления

| Совре- менная | Египетс- кая (иеро- глифич.) | Египетс- кая (иера- тическая) | Вавилон- ская | Греческая (аттичес- кая) | Греческая (ионичес- кая) | Римская | Древневе- райская | Индийцев мая | Древнеки- тайская (палочк.) | Древнекит. (иерогли- фическая) | Индийск. (девана- гари) | Арабская (алфавит) | Арабская (совре- менная) | Арабская (гобари) |
|------------------|------------------------------------|-------------------------------------|------------------|--------------------------------|--------------------------------|---------|----------------------|-----------------|-----------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------|-----------------------|--------------------------------|----------------------|
| 1 | I | | Y | I | A | I | X | • | I | 一 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | II | | YY | II | B | II | ∩ | •• | II | 二 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | III | | YYY | III | Г | III | ∪ | ••• | III | 三 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | IIII | ∪ | YYY | IIII | Δ | IIII | ∩ | •••• | IIII | 四 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 5 | IIII | ∩ | YYY | ∩ | E | V | ∩ | — | IIII | 五 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 6 | IIII | ∩ | YYY | ∩ | F | VI | ∩ | —• | ∩ | 六 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 7 | IIII | ∩ | YYY | ∩ | Z | VII | ∩ | —•• | ∩ | 七 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 8 | IIII | ∩ | YYY | ∩ | H | VIII | ∩ | —••• | ∩ | 八 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 9 | IIII | ∩ | YYY | ∩ | Θ | IX | ∩ | —•••• | ∩ | 九 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 10 | ∩ | ∩ | < | Δ | I | X | ∩ | — | — | 十 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| 20 | ∩∩ | ∩ | ∩ | ΔΔ | K | XX | ∩ | —• | — | 二十 | 20 | 20 | 20 | 20 |
| 30 | ∩∩∩ | ∩ | ∩ | ΔΔΔ | Λ | XXX | ∩ | —•• | — | 三十 | 30 | 30 | 30 | 30 |
| 40 | ∩∩∩∩ | ∩ | ∩ | ΔΔΔΔ | M | XL | ∩ | —••• | — | 四十 | 40 | 40 | 40 | 40 |
| 50 | ∩∩∩∩ | ∩ | ∩ | ∩ | N | L | ∩ | —•••• | — | 五十 | 50 | 50 | 50 | 50 |
| 60 | ∩∩∩∩ | ∩ | ∩ | ∩Δ | E | LX | ∩ | —••••• | ∩ | 六十 | 60 | 60 | 60 | 60 |
| 70 | ∩∩∩∩ | ∩ | ∩ | ∩ΔΔ | O | LXX | ∩ | —•••••• | ∩ | 七十 | 70 | 70 | 70 | 70 |
| 80 | ∩∩∩∩ | ∩ | ∩ | ∩ΔΔΔ | Π | LXXX | ∩ | —••••••• | ∩ | 八十 | 80 | 80 | 80 | 80 |
| 90 | ∩∩∩∩ | ∩ | ∩ | ∩ΔΔΔΔ | ∩ | XC | ∩ | —•••••••• | ∩ | 九十 | 90 | 90 | 90 | 90 |
| 100 | ∩ | ∩ | ∩ | H | P | C | ∩ | —••••• | ∩ | 百 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 200 | ∩∩ | ∩ | ∩ | HH | Σ | CC | ∩ | —•••••• | ∩ | 二百 | 200 | 200 | 200 | 200 |
| 300 | ∩∩∩ | ∩ | ∩ | HHH | T | CCC | ∩ | —••••••• | ∩ | 三百 | 300 | 300 | 300 | 300 |
| 400 | ∩∩∩∩ | ∩ | ∩ | HHHH | Υ | CD | ∩ | —•••••••• | ∩ | 四百 | 400 | 400 | 400 | 400 |
| 500 | ∩∩∩∩ | ∩ | ∩ | ∩ | Φ | D | ∩ | —••••••••• | ∩ | 五百 | 500 | 500 | 500 | 500 |
| 600 | ∩∩∩∩ | ∩ | ∩ | ∩H | X | DC | ∩ | —•••••••••• | ∩ | 六百 | 600 | 600 | 600 | 600 |
| 700 | ∩∩∩∩ | ∩ | ∩ | ∩HH | Ψ | DCC | ∩ | —••••••••••• | ∩ | 七百 | 700 | 700 | 700 | 700 |
| 800 | ∩∩∩∩ | ∩ | ∩ | ∩HHH | Ω | DCCC | ∩ | —•••••••••••• | ∩ | 八百 | 800 | 800 | 800 | 800 |
| 900 | ∩∩∩∩ | ∩ | ∩ | ∩HHHH | ∩ | CM | ∩ | —••••••••••••• | ∩ | 九百 | 900 | 900 | 900 | 900 |

Древневавилонская СС

(частично позиционная)



- единицы (прямой клин)



- десятки (лежащий клин)



1.2. Основные понятия позиционной системы счисления

$$\dots + a_{-3} \cdot n^{-3} + a_{-2} \cdot n^{-2} + a_{-1} \cdot n^{-1} + a_0 \cdot n^0 + a_1 \cdot n^1 + a_2 \cdot n^2 + a_3 \cdot n^3 \dots$$

Общая запись числа в позиционной СС

n – основание ($n \geq 2$)

a_i - цифра ($\leq n$)

разряд – положение цифры в записи числа

Примеры СС:

Десятичная СС:

$n = 10$

цифры: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Двоичная СС:

$n = 2$

цифры: 0 1

Троичная СС:

$n = 3$

цифры: 0 1 2

Восьмеричная СС:

$n = 8$

цифры: 0 1 2 3 4 5 6 7

**Представ
ление
чисел в
десятичн
ой СС и
СС
кратных
2**

| Десятичная | Двоичная | Восьмеричная | Шестнадцатеричная |
|-------------------|-----------------|---------------------|--------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 10 | 2 | 2 |
| 3 | 11 | 3 | 3 |
| 4 | 100 | 4 | 4 |
| 5 | 101 | 5 | 5 |
| 6 | 110 | 6 | 6 |
| 7 | 111 | 7 | 7 |
| 8 | 1000 | 10 | 8 |
| 9 | 1001 | 11 | 9 |
| 10 | 1010 | 12 | A |
| 11 | 1011 | 13 | B |
| 12 | 1100 | 14 | C |
| 13 | 1101 | 15 | D |
| 14 | 1110 | 16 | E |
| 15 | 1111 | 17 | F |
| 16 | 10000 | 20 | 10 |
| 17 | 10001 | 21 | 11 |

1.3. Правила перевода числа из одной системы счисления в другую

А) Перевод числа в десятичную систему счисления

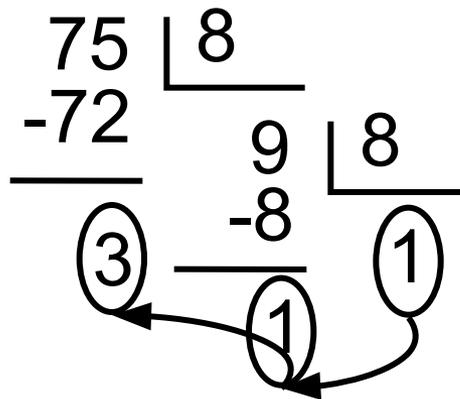
$$\dots + a_3 \cdot n^3 + a_2 \cdot n^2 + a_1 \cdot n^1 + a_0 \cdot n^0 + a_{-1} \cdot n^{-1} + a_{-2} \cdot n^{-2} + a_{-3} \cdot n^{-3} \dots$$

$$(4B)_{16} = 4 \cdot 16^1 + B \cdot 16^0 = 4 \cdot 16 + 11 \cdot 1 = 64 + 11 = 75$$

$$(113)_8 = 1 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 64 + 8 + 3 = 75$$

Пример 2:

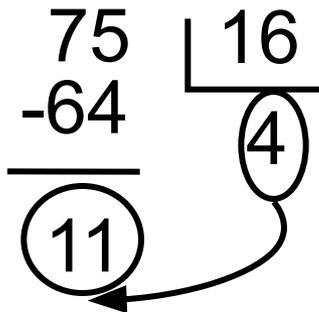
$$(75)_{10} = (?)_8$$



$$(75)_{10} = (1\ 1\ 3)_8$$

Пример 3:

$$(75)_{10} = (?)_{16}$$



$$(75)_{10} = (4\ B)_{16}$$

В) Перевод числа из одной СС в другую

Пример 1:

$$(56)_7 = (?)_3 \Rightarrow$$

1 этап: $(56)_7 = 5 \cdot 7^1 + 6 \cdot 7^0 = 35 + 6 = (41)_{10}$

2 этап:

$$\begin{array}{r} 41 \\ -3 \\ \hline 11 \\ -9 \\ \hline \textcircled{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 13 \\ -12 \\ \hline \textcircled{1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 4 \\ -3 \\ \hline \textcircled{1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 3 \\ -3 \\ \hline \textcircled{1} \end{array}$$

~~перевод в 10 СС~~
~~перевод в требуемую СС~~

$$(41)_{10} = (1112)_3$$

$$(56)_7 = (1112)_3$$

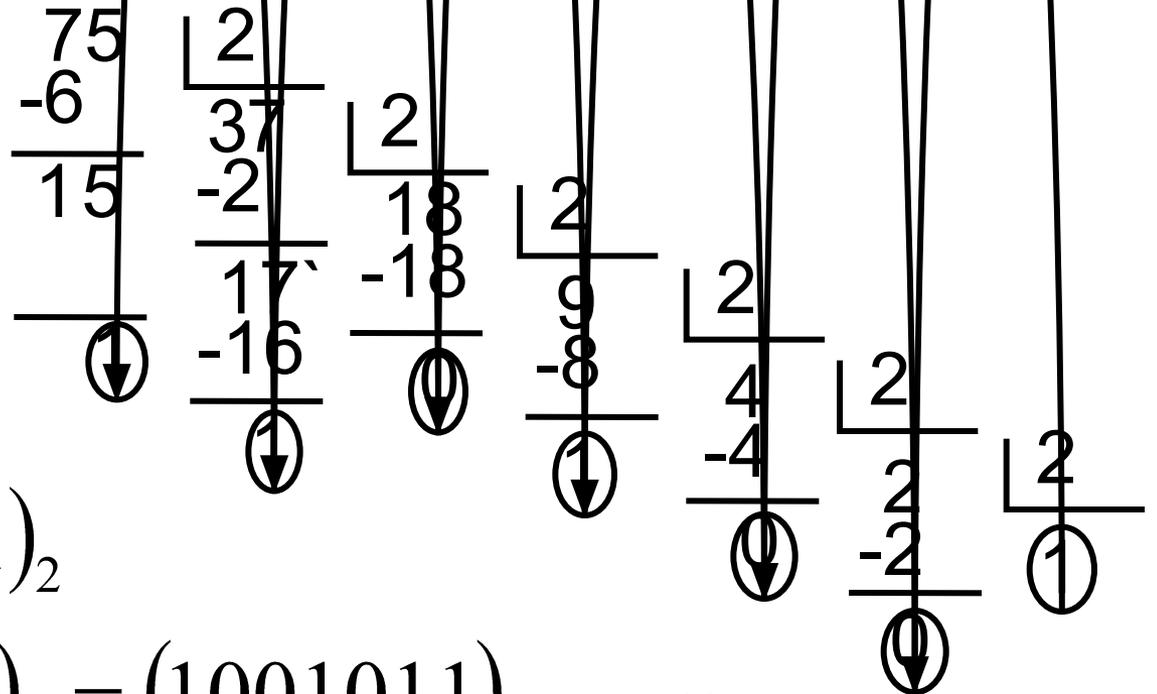
Пример 2:

$$(113)_8 = (?)_2$$

1 этап: $(113)_8 = (?)_{10}$

$$(113)_8 = 1 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = (75)_{10}$$

2 этап: $(75)_{10} = (?)_2$



$$(75)_{10} = (1001011)_2$$

$$(113)_8 = (1001011)_2$$

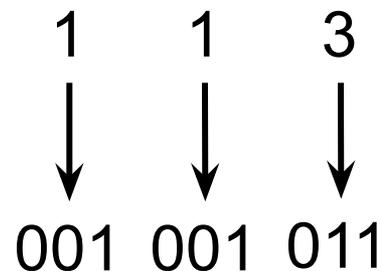
Г) Перевод числа из одной СС в другую, когда обе имеют основание кратное 2

Пример 1:

$$(113)_8 = (?)_2$$

$$8 = 2^3$$

| Десятичная | Двоичная | Восьмеричная |
|------------|----------|--------------|
| 0 | 000 | 0 |
| 1 | 001 ← | 1 |
| 2 | 010 | 2 |
| 3 | 011 ← | 3 |
| 4 | 100 | 4 |
| 5 | 101 | 5 |
| 6 | 110 | 6 |
| 7 | 111 | 7 |



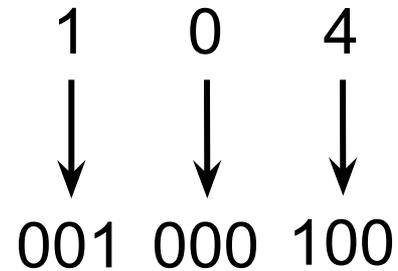
$$(113)_8 = (1001011)_2$$

Пример 2:

$$(104)_8 = (?)_2$$

$$8 = 2^3$$

| Десятичная | Двоичная | Восьмеричная |
|------------|----------|--------------|
| 0 | 000 ← | 0 |
| 1 | 001 ← | 1 |
| 2 | 010 | 2 |
| 3 | 011 | 3 |
| 4 | 100 ← | 4 |
| 5 | 101 | 5 |
| 6 | 110 | 6 |
| 7 | 111 | 7 |



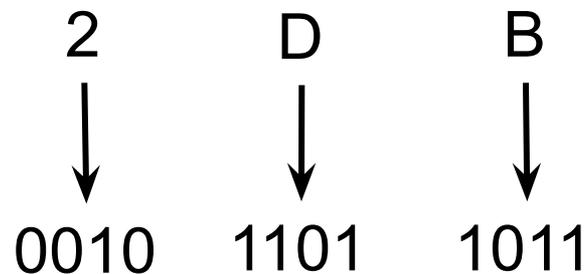
$$(104)_8 = (1000100)_2$$

Пример 3:

$$16 = 2^4$$

$$(2DB)_{16} = (?)_2$$

| Десятичная | Двоичная | Шестнадцатеричная |
|------------|----------|-------------------|
| 0 | 0000 | 0 |
| 1 | 0001 | 1 |
| 2 | 0010 ← | 2 |
| 3 | 0011 | 3 |
| 4 | 0100 | 4 |
| 5 | 0101 | 5 |
| 6 | 0110 | 6 |
| 7 | 0111 | 7 |
| 8 | 1000 | 8 |
| 9 | 1001 | 9 |
| 10 | 1010 | A |
| 11 | 1011 ← | B |
| 12 | 1100 | C |
| 13 | 1101 ← | D |
| 14 | 1110 | E |
| 15 | 1111 | F |



$$(2DB)_{16} = (1011011011)_2$$

21

Проверка вычислений:

$$\begin{aligned}(2DB)_{16} &= 2 \cdot 16^2 + D \cdot 16^1 + B \cdot 16^0 = \\ &= 512 + 208 + 11 = 731_{10}\end{aligned}$$

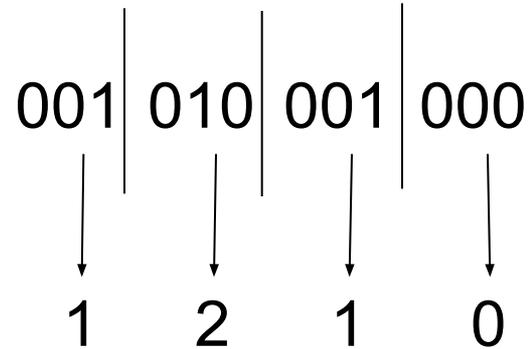
$$\begin{aligned}(1011011011)_2 &= 1 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + \\ &+ 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \\ &= 512 + 0 + 128 + 64 + 0 + 16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 731_{10}\end{aligned}$$

Пример 4:

$$(1010001000)_2 = (?)_8$$

$$8 = 2^3$$

| Десятичная | Двоичная | Восьмеричная |
|------------|----------|--------------|
| 0 | 000 → | 0 |
| 1 | 001 → | 1 |
| 2 | 010 → | 2 |
| 3 | 011 | 3 |
| 4 | 100 | 4 |
| 5 | 101 | 5 |
| 6 | 110 | 6 |
| 7 | 111 | 7 |



$$(1010001000)_2 = (1210)_8$$

Проверка:

$$(1010001000)_2 = 1 \cdot 2^9 + 0 + 1 \cdot 2^7 + 0 + 0 + 0 + 1 \cdot 2^3 + 0 + 0 + 0 = 648$$

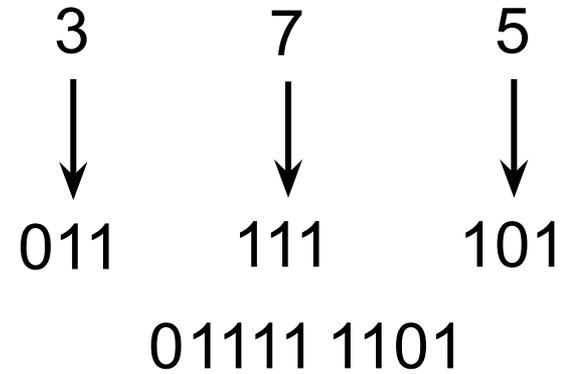
$$(1210)_8 = 1 \cdot 8^3 + 2 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 0 = 648$$

Пример 5:

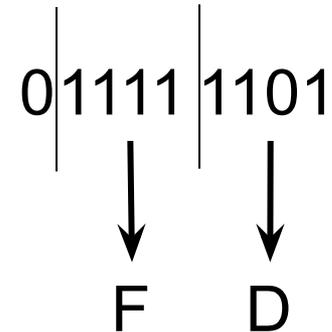
$$(375)_8 = (?)_{16}$$

| Десятичная | Двоичная | Восьмеричная | Шестнадцатеричная |
|------------|----------|--------------|-------------------|
| 0 | 000 | 0 | 0 |
| 1 | 001 | 1 | 1 |
| 2 | 010 | 2 | 2 |
| 3 | 011 ← | 3 | 3 |
| 4 | 100 | 4 | 4 |
| 5 | 101 ← | 5 | 5 |
| 6 | 110 | 6 | 6 |
| 7 | 111 ← | 7 | 7 |
| 8 | 1000 | 10 | 8 |
| 9 | 1001 | 11 | 9 |
| 10 | 1010 | 12 | A |
| 11 | 1011 | 13 | B |
| 12 | 1100 | 14 | C |
| 13 | 1101 → | 15 | D |
| 14 | 1110 | 16 | E |
| 15 | 1111 → | 17 | F |

1 этап: $8 = 2^3$



2 этап: $16 = 2^4$



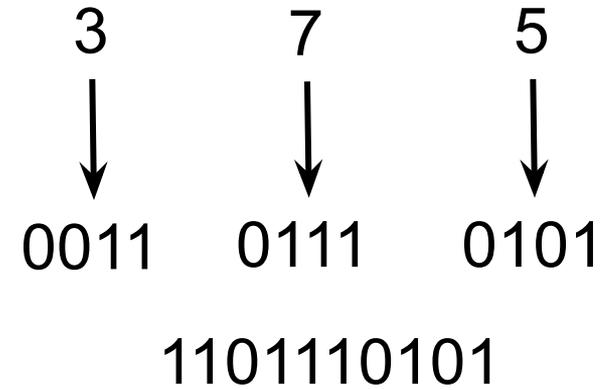
$$(375)_8 = (FD)_{16}$$

Пример 6:

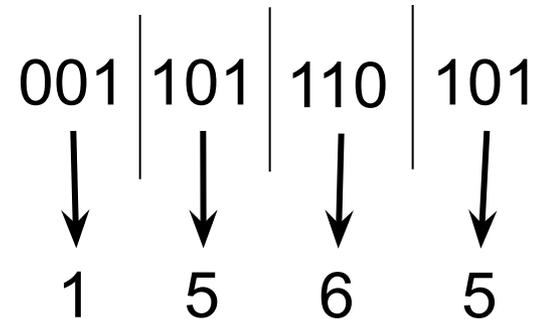
$$(375)_{16} = (?)_8$$

| Десятичная | Двоичная | Восьмеричная | Шестнадцатеричная |
|------------|----------|--------------|-------------------|
| 0 | 000 | 0 | 0 |
| 1 | 001 | 1 | 1 |
| 2 | 010 | 2 | 2 |
| 3 | 011 | 3 | 3 |
| 4 | 100 | 4 | 4 |
| 5 | 101 | 5 | 5 |
| 6 | 110 | 6 | 6 |
| 7 | 111 | 7 | 7 |
| 8 | 1000 | 10 | 8 |
| 9 | 1001 | 11 | 9 |
| 10 | 1010 | 12 | A |
| 11 | 1011 | 13 | B |
| 12 | 1100 | 14 | C |
| 13 | 1101 | 15 | D |
| 14 | 1110 | 16 | E |
| 15 | 1111 | 17 | F |

1 этап: $16 = 2^4$



2 этап: $8 = 2^3$

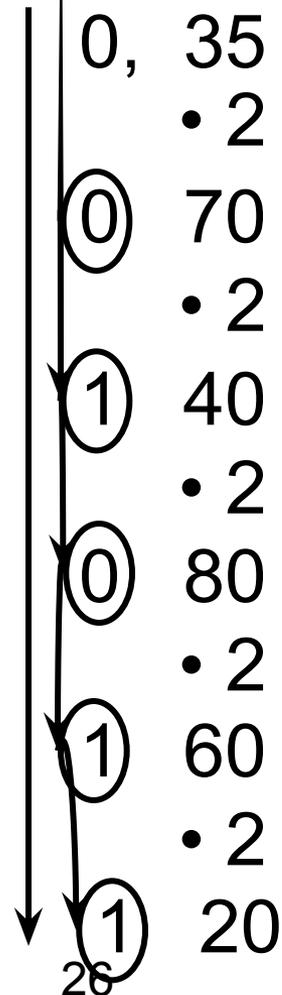
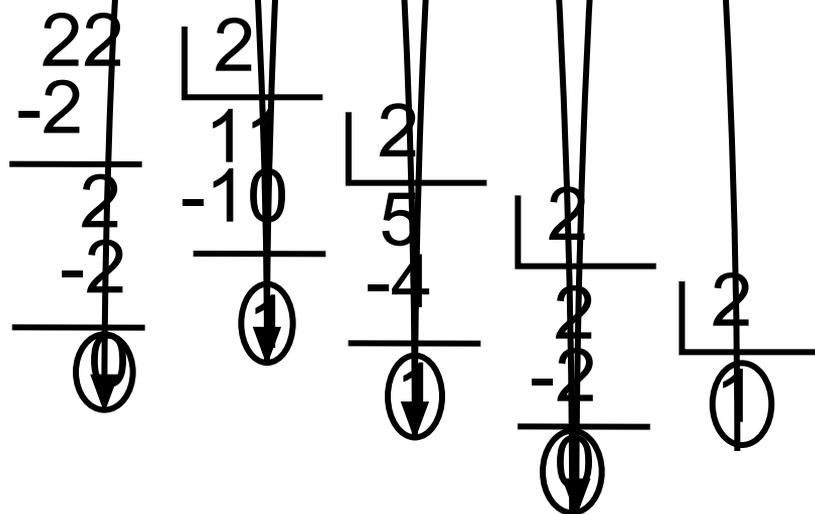


$$(375)_{16} = (1565)_8$$

Д) Перевод смешанного числа из одной СС в другую

Пример 1:

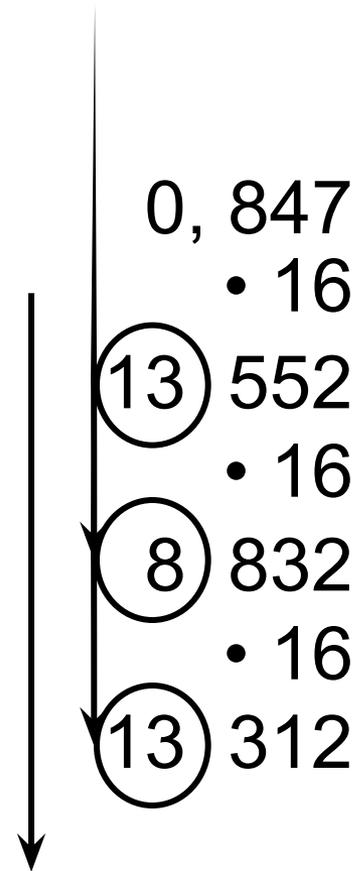
$$(22,35)_{10} = (?)_2$$



$$(22,35)_{10} = (10110,01011)_2$$

Пример 2:

$$(0,847)_{10} = (?)_{16}$$



$$(0,847)_{10} = (0,D8D)_{16}$$

1.4. Основные операции над двоичными числами

A) Сложение

| A | B | A+B |
|----------|----------|------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 10 |

Пример:

$$110_2 + 11_2 = ?$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ + \\ \hline 1 \end{array}$$

Проверка:

$$110_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4 + 2 + 0 = 6_{10}$$

$$11_2 = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 2 + 1 = 3_{10}$$

$$6_{10} + 3_{10} = 9_{10}$$

$$1001_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 0 + 0 + 1 = 9_{10}$$

Б) Вычитание

| A | B | A-B |
|----------|----------|------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 10 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Пример:

$$110_2 - 11_2 = ?$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 0 \\ - \quad 1 \ 1 \\ \hline 0 \ 1 \ 1 \end{array}$$

Проверка:

$$110_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4 + 2 + 0 = 6_{10}$$

$$11_2 = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 2 + 1 = 3_{10}$$

$$6_{10} - 3_{10} = 3_{10} \quad 30$$

В) Умножение

| A | B | A*B |
|----------|----------|------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Пример:

$$110_2 * 11_2 = ?$$

Проверка:

$$110_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4 + 2 + 0 = 6_{10}$$

$$11_2 = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 2 + 1 = 3_{10}$$

$$10010_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 16 + 2 = 18_{10}$$

$$6_{10} \cdot 3_{10} = 18_{10}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \hline 1 \\ 31 \end{array}$$

Г) Деление

Пример:

$$\begin{array}{r} 101000101 \quad | \quad 1101 \\ - \quad 1101 \\ \hline 01110 \\ \quad 1101 \\ \hline 0001101 \\ \quad 1101 \\ \hline 0 \end{array}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} (101000101)_2 &= 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \\ &= 256 + 0 + 64 + 0 + 0 + 0 + 4 + 0 + 1 = 325_{10} \end{aligned}$$

$$(1101)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13_{10}$$

$$(11001)_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 8 + 0 + 0 + 1 = 25_{10}$$

$$325_{10} : 13_{10} = 25_{10}$$

ЛИТЕРАТУРА

- Цифры и системы счисления [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.krugosvet.ru>
- Система счисления [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.wikiznanie.ru>
- История чисел и систем счисления [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://files.school-collection.edu.ru>