Лекция 1
Численные методы

1. Предмет изучения численных методов
2. Решение нелинейных уравнений

Литература:

- Турчак Л.Е. Основы численных методов. Учебное пособие. – М.: Наука. – 2003. – 320 с.
- Тарасевич. Основы численных методов на MathCAD
- www.exponenta.ru
- Мудров А.Е. Числ. методы для ПЭВМ на языках Бэйсик, Фортран и Паскаль. – Томск:МП «Раско», 1991.

Предмет изучения численных методов

Область применения численных методов – решение тех задач математического анализа, для которых аналитическое (точное) решение затруднено или невозможно

Примеры:
«неберущиеся» интегралы (нет первообразных функций);

Математические задачи, требующие больших затрат времени
и другие

Методы решения математических задач:

- **Аналитические**

Теоретические рассуждения и выводы. Рассматриваются в курсе математики, физики и др. наук.

Конечный результат: Формулы, системы уравнений.

Преимущества:

1) **Вычисления по конечным формулам,**
2) **Можно строить графики**
3) **Решить доп. теоретические задачи**

Недостатки:

1) **Приближения при выводе формул**
2) **Отсутствие методов решения систем уравнений некоторого вида**
3) **Трудности проведения вычислений по формулам**

Методы решения математических задач:

- **Графические**

Построение графиков, диаграмм, запись измерений с помощью датчиков.

Конечный результат: Графики и точки на графиках.

Преимущества:

1) **Наглядное представление о поведении исследуемой величины**
2) **Позволяет оценить приближенное значение некоторой величины**
3) **Можно составить таблицу значений**

Недостатки:

1) **Трудности проведения дополнительных теоретических исследований**

Методы решения математических задач:

- **Численные**

Решение задачи сводится к вычислению в определенной последовательности.

Конечный результат: Число или числа.

Преимущества:

1) **Решение задач, для которых нет аналитических методов**

Недостатки:

1) **Вычисления содержат погрешности**
2) **Не для всех задач есть численные методы**
3) **Вычисления могут занимать много времени**

Численные методы позволяют свести решение задачи к выполнению конечного числа арифметических действий над числами, при этом результаты получаются в виде числовых значений

Отличие вычислений «вручную» от компьютерных

1. Вычисления с помощью ручки и бумаги можно проводить с любой степенью точности

2. В компьютере числа хранятся в ячейках памяти с фиксированной разрядностью не более 15 цифр. Ограничен диапазон представления чисел: $10^{-307} < |x| < 10^{307}$

3. Компьютерные вычисления могут содержать миллионы операций, что приводит к накоплению ошибки.

4. Компьютерная арифметика связана с представлением чисел в ЭВМ и отличается от обычной

Процесс решения задачи:

- **Постановка задачи** (исходные данные и определение конечного результата исследования).
- **Построение модели** (модель должна адекватно описывать законы физического явления).
- **Разработка численного метода** (нахождение метода, позволяющего свести задачу к вычислительному алгоритму).

Все численные методы являются ПРИБЛИЖЕННЫМИ, т.е. решение всегда находится с некоторой погрешностью ε

Решение нелинейных уравнений с одним неизвестным

Опр. Нелинейным называется уравнение, которое содержит неизвестное X^n ($n \neq 1$) или переменная X входит под знак функции.

Опр. Если в уравнении переменная X входит только в виде X^n ($n \neq 1$), то такое уравнение называется **алгебраическим**.

Опр. Уравнение называется **трансцендентным**, если переменная X входит под знак какой-либо математической функции: корень, экспонента, тригонометрическая функция и др.

Решение делится на 2 этапа:

1. **Локализация корня** X_0, т.е. нахождение интервала (a,b), где $X_0 \in (a,b)$, в котором содержится корень уравнения.

   а) Графически (строится приближенный график функции $y=f(x)$)

   б) Аналитически (строится таблица значений функции $f(x)=0$)

2. **Уточнение значения корня** X_0 до заданной точности ε.

Метод бисекции
(деления отрезка пополам)

Постановка задачи: Решить уравнение f(x)=0.

Пусть на интервале [a,b] содержится один корень уравнения x_0. На данном интервале выполняются ограничения применимости метода:

1. $f(a) \cdot f(b) \le 0$
2. Существует f'(x) и не меняет знак на [a,b]
3. Функция f(x) непрерывна и дифференцируема на [a,b]
4. Задана точность нахождения корня X_0: $\varepsilon=10^{-3}$

Метод бисекции

Тогда, чтобы найти корень уравнения X_0 необходимо сделать следующее:

1. Найти середину отрезка [a,b], точку c=(a+b)/2.

2. Найти значение функции f(x) в точке c.

3. Проверить, выполняется ли условие

$$f(c) \cdot f(b) \le 0 \qquad (1).$$

4. В случае выполнения условия (1), сузить интервал поиска до [c,b]. Если условие (1) не выполняется – сузить интервал поиска до [a,c].

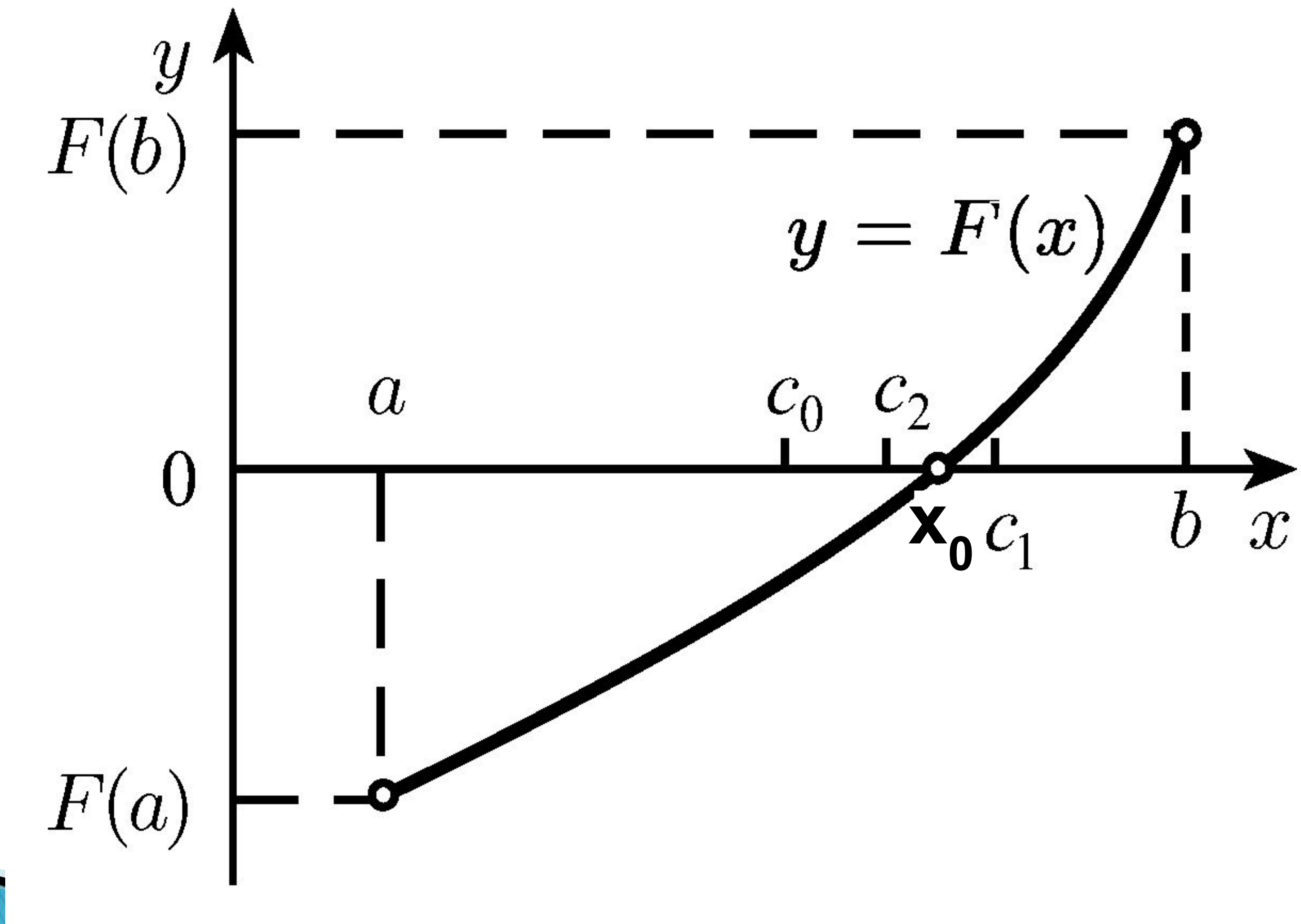
Метод бисекции

5. Переопределить интервал: новый интервал поиска снова назвать как [a,b].

6. Проверить, достигнута ли заданная точность ε: $|b - a| < \varepsilon$

7. Если точность достигнута, то вывести на печать значение корня $X_0 = (a+b)/2$. Если точность не достигнута, то перейти к п 1. (к следующей итерации).

Графическое представление метода бисекции



Пример. Найти корень уравнения $y = -x^4 + 5$ на интервале $[0,\infty]$ с точностью $\epsilon = 0.001$

1. Локализация корня. Составим таблицу значений функции $f(x)=-x^4+5$:

x	F(x)
0	Y=5
1	Y=4
2	Y=-11
3	Y=-76

Из таблицы видно, что корень находится на интервале $x \in [1,2]$.

2. Решение методом бисекции в MathCAD

1 итерация

a:= 1 b:= 2

c:=(a+b)/2 c=1.5 f(b)*f(c) = 0.688 > 0

поэтому b:=c

|b-a|=0.5 > ε

2 итерация

c:=(a+b)/2 c=1.25 f(b)*f(c) = -0.16 < 0

поэтому a:=c

|b-a|=0.25 > ε

и т.д.

Решение нелинейных уравнений:

1. Метод бисекции (деление отрезка пополам);

2. Метод хорд (метод касательных);

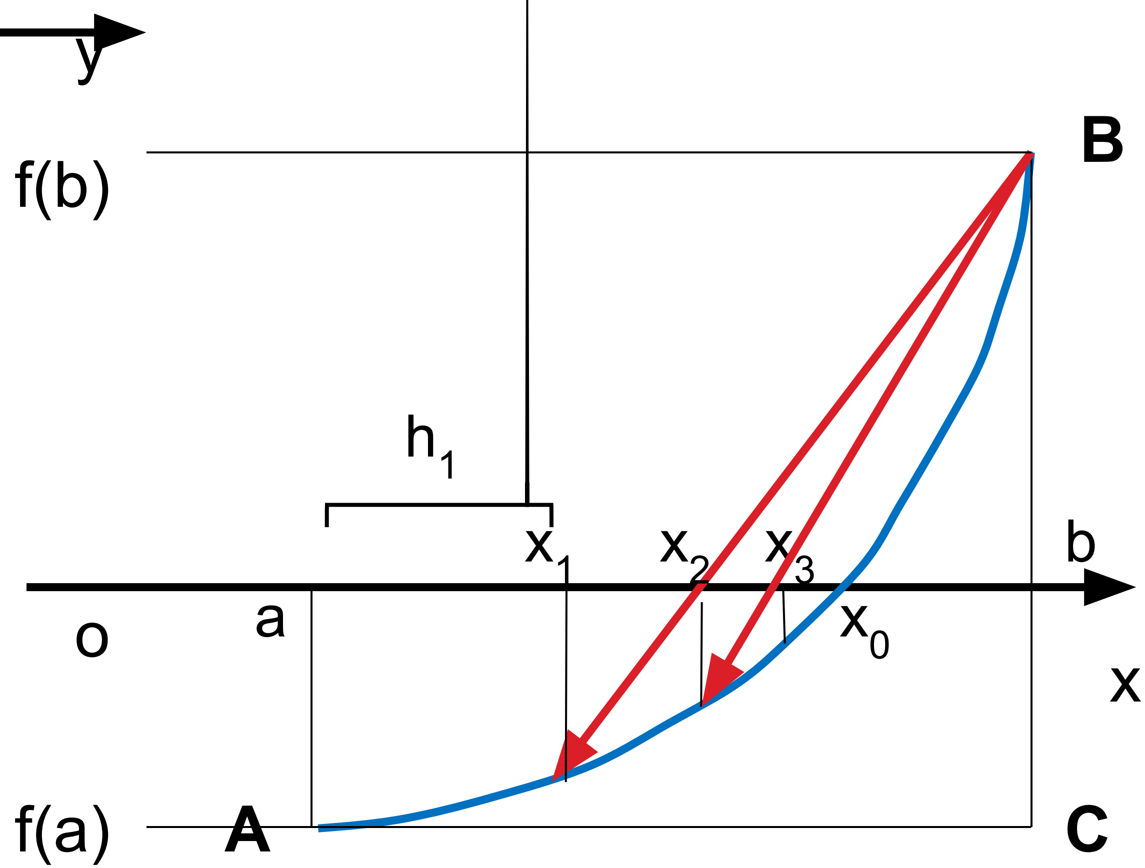
3. Метод итераций (метод последовательных приближений).

Метод хорд (пропорциональных частей)

Постановка задачи та же, что и в методе бисекций. **НЕПОДВИЖНА ТОЧКА B.**

Проводим хорду **AB**, которая делит отрезок **[a,b]** в соотношении: **-f(a) : f(b).** Опускаем перпендикуляр из т. $\mathbf{x_1}$ на функцию **f(x).** Повторяем до тех пор, пока не выполняется условие

$|\mathbf{x_{n+1}} - \mathbf{x_n}| < \varepsilon$.



Правила применения метода

1. **Неподвижна та граница интервала, для которой знак функции *f(x)* совпадает со знаком ее второй производной *f ”(x)*, т.е. *f(b)*f ”(b) >0*.**
2. **Последовательные приближения x_n лежат по ту сторону корня x_0, где функция имеет знак, противоположный знаку ее второй производной.**

I. Неподвижна точка B.

Случай используется, если первая и вторая производные функции ***f(x)*** имеют одинаковые знаки, т.е.

$$f'(x) \cdot f''(x) > 0$$

Из подобия треугольников $\Delta \mathbf{Aax_1}$ и $\Delta \mathbf{ABC}$ следует:

$$\frac{ax_1}{AC} = \frac{Aa}{BC} \qquad \frac{h_1}{b-a} = \frac{-f(a)}{-f(a)+f(b)}$$

Тогда длина отрезка $\boldsymbol{h_1}$ равна:

$$h_1 = \frac{-f(a)}{-f(a)+f(b)}(b-a)$$

I. Неподвижна точка B.

Найдем значение в т. x_1:

$$x_1 = a + h_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$$

Тогда последовательно находим следующие точки:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}(b - x_1)$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(b) - f(x_2)}(b - x_2)$$ и т.д.

Окончательно получаем:

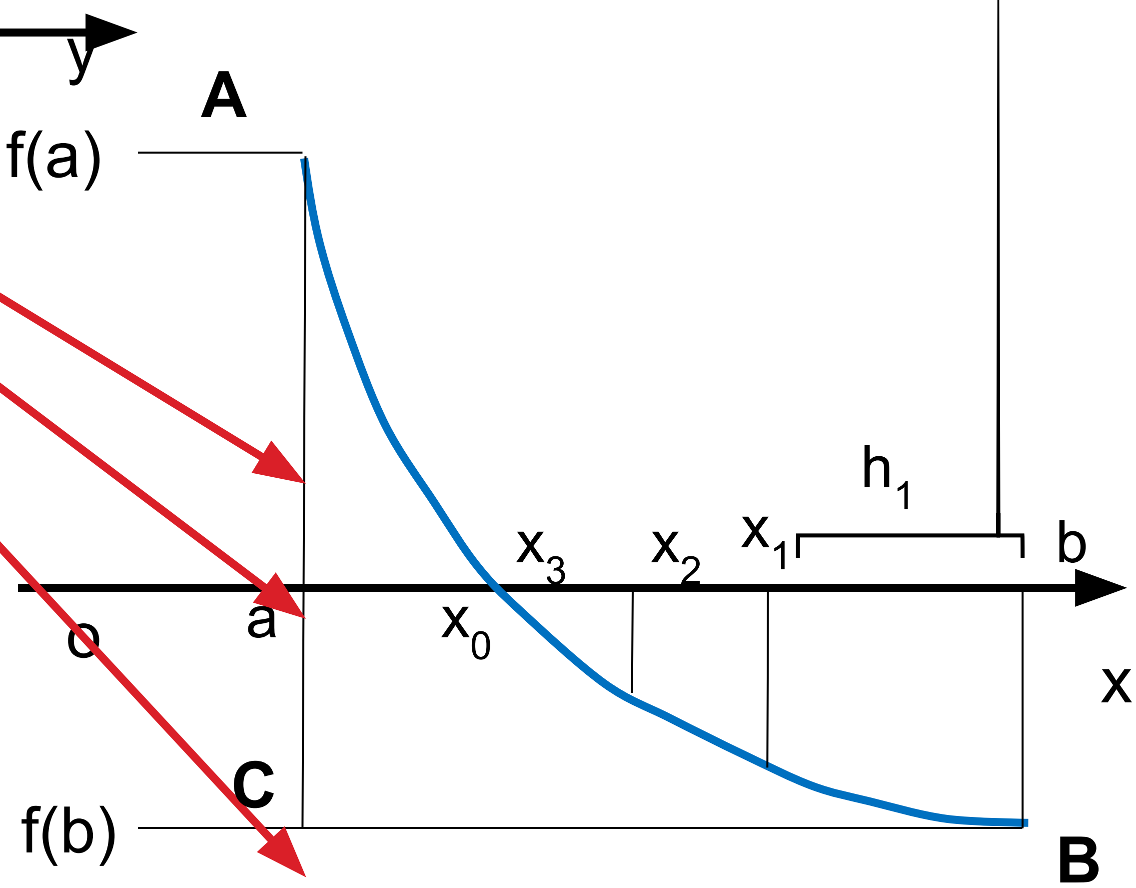
$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n)} \quad (*)$$

Метод хорд (пропорциональных частей)

НЕПОДВИЖНА ТОЧКА А.

Проводим хорду **АВ**, которая делит отрезок **[a,b]** в соотношении: **f(b) : -f(a).** Опускаем перпендикуляр из т. $\mathbf{x_1}$ на функцию **f(x).** Повторяем до тех пор, пока не выполняется условие

$| x_{n+1} – x_n| < \varepsilon$.



II. Неподвижна точка А.

Случай используется, если первая и вторая производные функции ***f(x)*** имеют разные знаки, т.е.

$$f'(x) * f''(x) < 0$$

Из подобия треугольников $\Delta \mathbf{Bbx_1}$ и $\Delta \mathbf{ABC}$ следует:

$$\frac{bx_1}{CB} = \frac{bB}{AC} \qquad \frac{h_1}{b-a} = \frac{-f(b)}{f(a)-f(b)}$$

Тогда длина отрезка $\boldsymbol{h_1}$ равна:

$$h_1 = \frac{-f(b)}{f(a)-f(b)}(b-a)$$

II. Неподвижна точка A.

Найдем значение в т. x_1:

$$x_1 = b - h_1 = b - \frac{f(b)}{f(b) - f(a)}(b - a)$$

Тогда последовательно находим следующие точки:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(a)}(x_1 - a)$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(a)}(x_2 - a)$$ и т.д.

Окончательно получаем:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a)} \quad \textbf{(**)}$$

Вывод

- Метод хорд заключается в том, что на отрезке *[a,b]* функция *f(x)* заменяется стягивающей её хордой.
- В качестве приближенного значения корня x_0 принимается точка пересечения хорды с осью Ох.

Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

В матричном виде система уравнений записывается в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i, (j = 1,2,\ldots,m)$$

Здесь a_{ij} – матрица коэффициентов при неизвестных;

B_j – вектор-столбец свободных членов;

X_j – вектор-столбец неизвестных.

Решение: Любая совокупность чисел α_1, α_2, …, α_n, приводящая систему в тождество

Методы решения СЛАУ

1. Метод Крамера (Правило Крамера)

2. Метод Гаусса (приведение расширенной матрицы системы к треугольному виду):

а) неравенство нулю диагонального элемента;

б) с выбором главного элемента;

в) итерационный.

3. Метод Жордана-Гаусса.