Лекция 2
Численные методы

1. Задача оптимизации
2. Численное интегрирование

Задача оптимизации

Опр. Под оптимизацией понимают процесс выбора наилучшего варианта из всех возможных.

Выбор <u>оптимального решения</u> производится с помощью некоторой зависимой от параметров x_1, x_2, …, x_n функции $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая называется **<u>целевой функцией</u>**.

<u>Задачи оптимизации</u> делятся на:

а) **безусловные**, когда необходимо найти max/min целевой функции

б) **условные,** при постановке которых задаются некоторые условия (ограничения) в виде уравнений и неравенств.

Одномерная оптимизация

- Найти наибольшее или наименьшее значение целевой функции ***y=f(x)***, заданной на множестве ***σ*** и найти величину ***x ∈ σ***, соответствующую ***max/min*** значению функции.

Теорема Вейерштрасса: Всякая функция ***f(x)***, непрерывная на отрезке **[a,b],** принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значение, т.е. на отрезке **[a,b]** существуют такие x_1 *и* x_2, что

$$f(x1) \le f(x) \le f(x2)$$

1) Не доказывает единственности решения – на **[a,b]** может быть несколько min и max;
2) Это может быть точка локального max/min.

Основные методы задачи

1. Метод трисекций.

   Не является оптимальным

2. Метод Фибоначчи.

   Необходимо заранее задавать количество вычислений функции.

3. Метод золотого сечения.

   Наиболее распространенный метод.

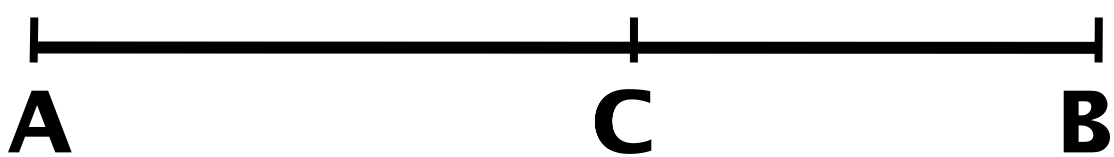
4. Метод перебора.

   Часто используется.

Определение золотого сечения

Опр. Золотым сечением отрезка ***AB*** на две неравных части ***AC*** и ***CB*** называется такое деление отрезка, при котором отношение его бóльшей части ко всей длине отрезка равно отношению его меньшей части к бóльшей:

$$S = \frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC} \approx 0.618$$



Метод золотого сечения

Постановка задачи.

1. Пусть функция ***f(x)*** непрерывна и дифференцируема на отрезке **[a,b]**;

2. Функция ***f(x)*** имеет одну точку экстремума (min или max) на интервале **[a,b],** т.е. функция **УНИМОДАЛЬНА.**

3. Задана точность нахождения точки экстремума ***ε***, например ***ε*** $= 10^{-3}$.

Найти: Минимальное значение функции на **[a,b].**

Алгоритм метода золотого сечения

1. Разобьем интервал **[a,b]** на неравные части, используя золотое сечение. Найдем точки **y** и **z** по формулам:

$$y = b - (b-a)*s = b - bs + as = as + (1-s)b \Rightarrow$$

$$\mathbf{y = 0{,}618a + 0{,}382b}$$

$$z = a + (b-a)*s = a - as + bs = (1-s)a + sb \Rightarrow$$

$$\mathbf{z = 0{,}382a + 0{,}618b}$$

Алгоритм метода золотого сечения

2. Вычисляем значения функции **f(x)** в точках **y** и **z**, т.е. **f(y)** и **f(z)**.

3. Проверяем условие **f(y) < f(z) (1):**

а) Если условие выполняется, то переопределяем интервал **[a,b] <= [a,z],** т.е. сокращаем интервал до **[a,z]** и называем новый интервал **[a,b].**

б) Если условие не выполняется, то переопределяем интервал **[a,b] <= [y,b],** т.е. сокращаем интервал до **[y,b]** и называем новый интервал **[a,b].**

Алгоритм метода золотого сечения

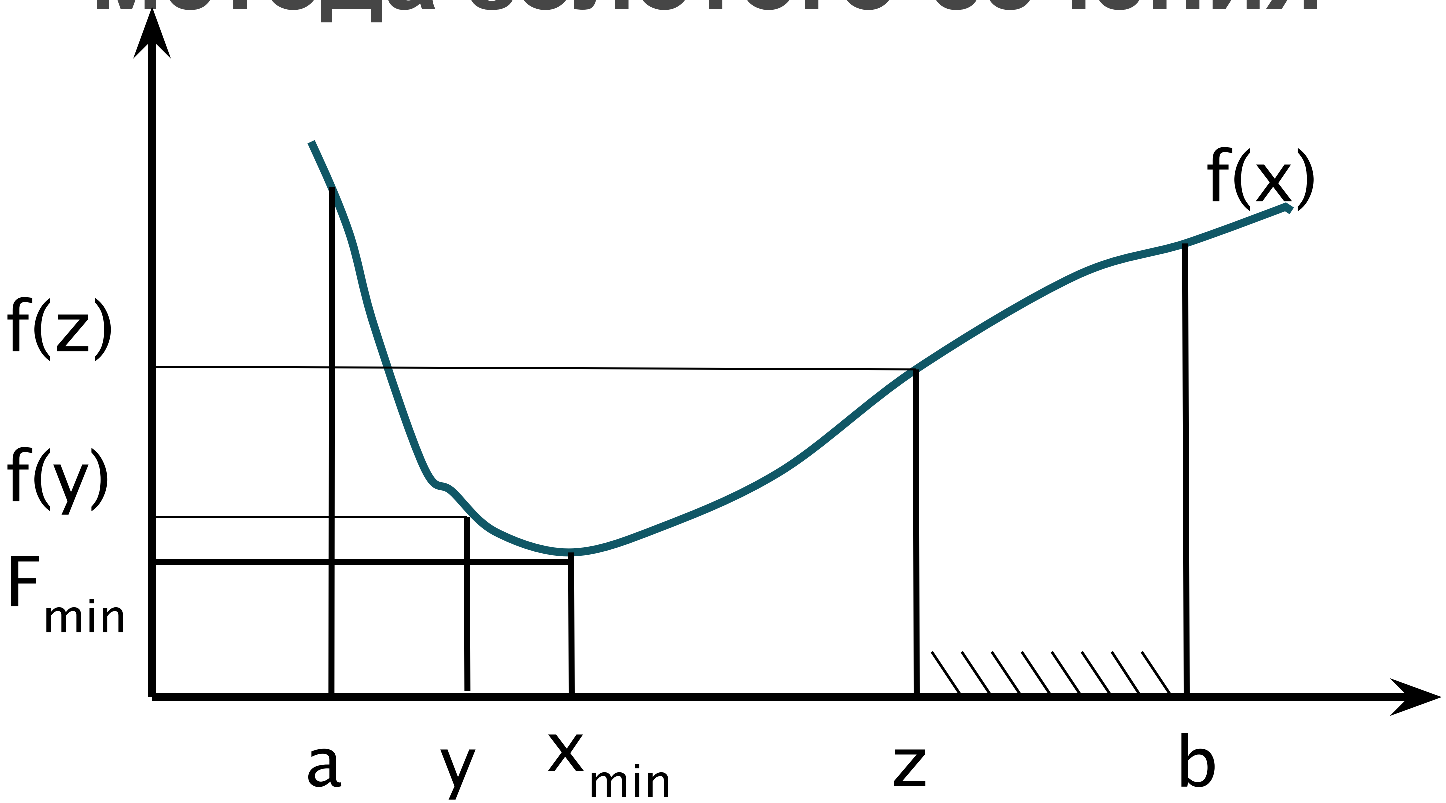
4. Проверяем условие о достижении точности найденного решения: $|b - a| < \varepsilon$ (2).

а) Если <u>точность достигнута</u> (условие (2) выполняется), то решение найдено и равно:

$$X_{\min} = \frac{a+b}{2} \quad \text{и} \quad f(X_{\min}) = F_{\min}$$

б) Если точность не достигнута (условие (2) не выполняется), то перейти к п 1. (к следующей итерации).

Графическое представление метода золотого сечения



Поиск минимального значения функции

Вывод:

- Таким образом, в процессе решения задачи интервал изменения оптимизируемого параметра <u>последовательно уменьшается</u>:

в начале его длина равна **b – a**, а к концу становится меньше заданной точности ***ε***.

Если искать максимум функции **f(x)**, то в методе золотого сечения меняется только условие **(1)** на противоположное:

$$\mathbf{f(y) > f(z)}$$

Численное интегрирование

- **Задача:** Найти площадь криволинейной трапеции **ABCD**, ограниченной подынтегральной функцией ***f(x)*** и пределами интегрирования **[a,b]**.

  Решение: Разбиваем интервал **[a,b]** на равные по длине интервалы (***N*** интервалов) и заменяем площадь каждой ***i***-той трапеции площадями прямоугольников:

$$S_{ABCD} = \sum_{i=1}^{N} S_i + R$$

S_i – площадь ***i***-того прямоугольника, ***R*** – погрешность вычисления.

Более точно площадь трапеции равна:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S_i = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Однако этой формулой на практике можно пользоваться не всегда по следующим причинам:

1. Первообразная функции ***F(x)*** (т.е. ***F´(x) = f(x)***) не может быть найдена.

2. Функция ***f(x)*** задана таблично.

Численные методы поиска интеграла:

- Метод прямоугольников (левых, центральных, правых).
- Метод трапеций.
- Метод Симпсона (метод парабол).

Постановка задачи: Пусть функция **f(x)** непрерывна и дифференцируема на интервале **[a,b]**. Дана точность $\varepsilon = 10^{-4}$ нахождения интеграла.

Найти: значение интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

с заданной точностью ε.

Метод центральных прямоугольников

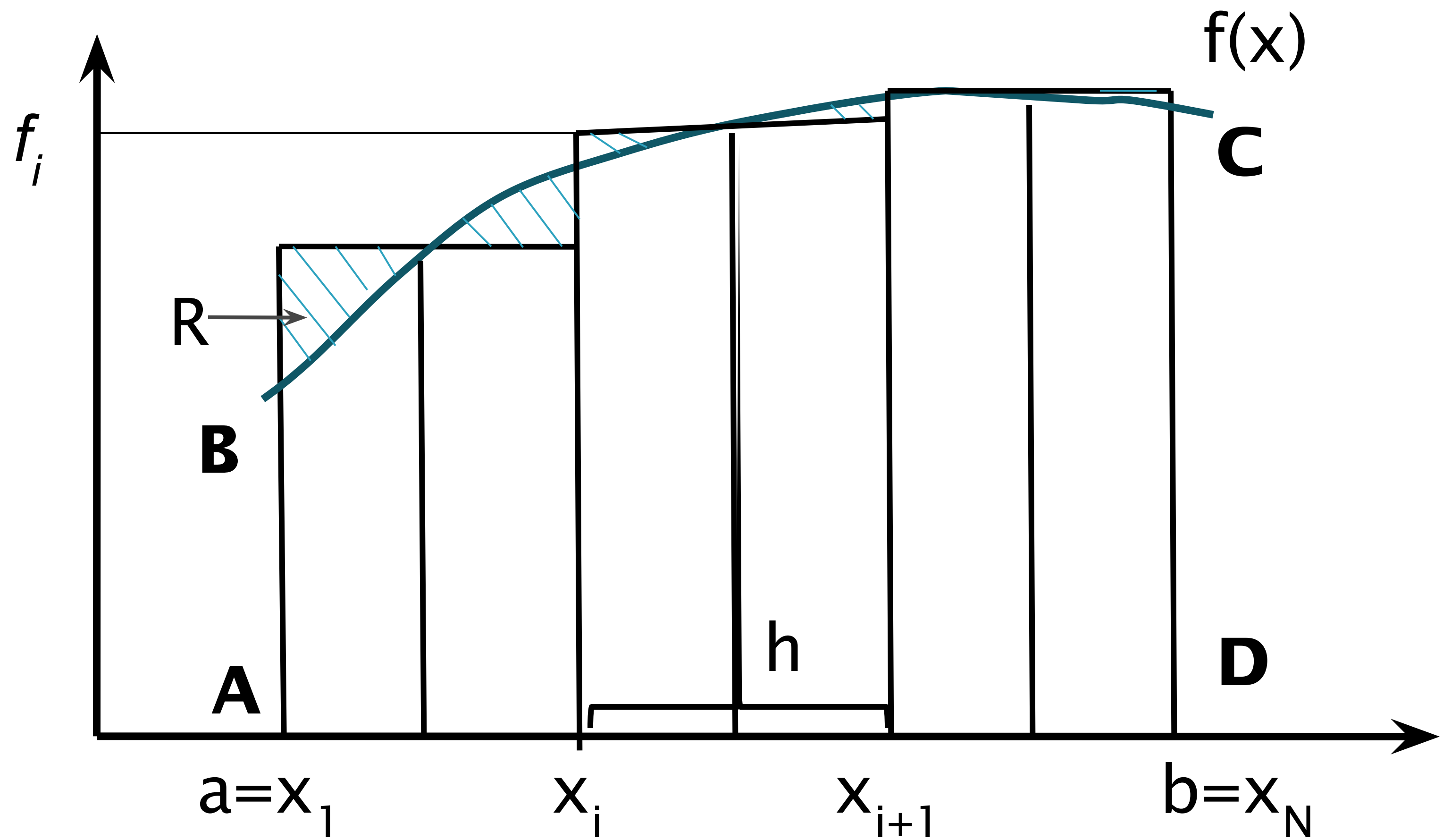
1. Разобьем интервал **[a,b]** на **N** равных частей.

2. Найдем **h** – длину каждого **i**-того интервала
h = (b – a)/N.

3. Найдем площадь каждого **i**-того прямоугольника, принимая за его длину значение функции <u>в середине каждого **i**-того интервала</u>, а за ширину – длину интервала **h**. Т.е.

$$S_{ABCD}=\sum_{i=1}^{N}S_i+R\approx\sum_{i=1}^{N}h\cdot f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)=h\sum_{i=1}^{N}f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)$$

Геометрическая интерпретация метода прямоугольников



$$f_i = f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

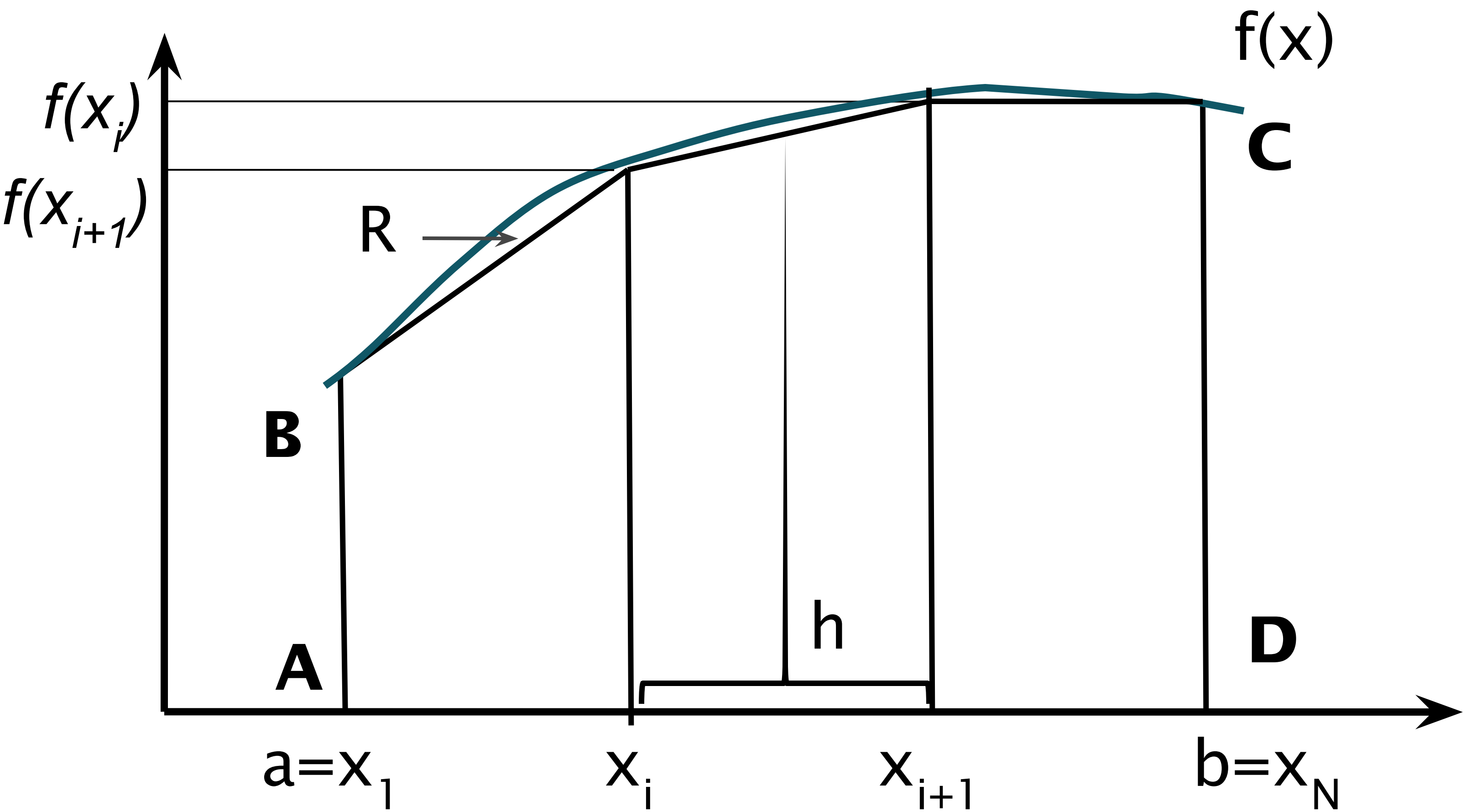
Метод трапеций

- 1.-2. Те же, что и в методе прямоугольников.
- 3. Найдем площадь каждой ***i***-той прямолинейной трапеции (соединяя точки в начале и конце *i*-того интервала прямой линией). Тогда

$$S_{ABCD} = \sum_{i=1}^{N} S_i + R \approx$$

$$\sum_{i=1}^{N} h \cdot \left(\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right) = h \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right)$$

Геометрическая интерпретация метода трапеций



Погрешность вычислений

- Погрешность **R** зависит от длины интервала разбиения.

На практике используется формула Рунге:

$$\Delta = I - I_n = \frac{I_{2n} - I_n}{2^k - 1} \quad \Rightarrow$$

$$\underbrace{\Delta\left(2^k - 1\right)}_{\varepsilon} = I_{2n} - I_n$$

$$\boxed{I_{2n} - I_n < \varepsilon}$$