

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Случайные величины

Схема Бернулли

- Рассмотрим последовательность **n независимых однородных** испытаний (экспериментов).
 - Испытания считаем **независимыми**, если результат испытания не зависит от номера испытания и от того, что произошло до этого испытания.
 - **Однородными** испытаниями считаем такие, которые проводятся в одинаковых условиях.

Пусть в каждом испытании событие **A** может произойти с вероятностью **p**

$$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - p = q$$

Формула Бернулли

- Вероятность того, что при n испытаниях
- событие A наступит k -раз:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

где C_n^k — число сочетаний

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Схема Бернулли

- **Пример.**
- Вероятность того, что образец бетона при испытании выдержит нормативную нагрузку, равна 0,9.
- Найти вероятность того, что из 7 образцов 5 выдержат испытания.
- **Решение.**
- По формуле Бернулли

$$P_7^5 = C_7^5 p^5 q^2 = \frac{7!}{5!2!} 0,9^5 0,1^2 = 0,124$$

Схема Бернулли

- **Асимптотические формулы.**

- **1. Формула Пуассона.**

- Пусть число испытаний n - велико ($n \rightarrow \infty$)

- Вероятность p события A – мала ($p \rightarrow 0$)

- Причем $np \rightarrow a$

- Тогда при любом фиксированном k

$$P_n(k) \cong \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

Закон редких событий

($n \gg 100$, $a = np \ll 10$)

Схема Бернулли

- **Пример 1 .**
- Известно, что при транспортировке 2,5% декоративной плитки повреждается. Определить вероятность того, что в партии из 200 плиток оказалось поврежденными:
- **а) ровно 4 плитки; б) не более 6 плиток.**
- **Решение.**
- Вероятность того, что плитка окажется поврежденной,
- $p=0.025$ – *мала*, число испытаний $n=200$ – *велико*, причем $np=5 < 10$.
- **По формуле Пуассона:**
- **а)** $P_{200}(4) \cong \frac{5^4}{4!} e^{-5} \approx 0,18$ **б)** $P_{200}(i \leq 6) \cong e^{-5} \sum_{i=0}^6 \frac{5^i}{i!} \approx 0,76$

Схема Бернулли

- **2. Локальная теорема Муавра-Лапласа.**
- Пусть число испытаний n – велико ($n \rightarrow \infty$)
- Вероятность p события A – не очень мала ($0 \ll p \ll 1$)
- *(p не близко к 0 и к 1)*
- Тогда при любом фиксированном k

$$P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

$$\text{где } \varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

Схема Бернулли

- **3. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.**

Пусть число испытаний n – велико ($n \rightarrow \infty$)

Вероятность p события A – не очень мала ($0 \ll p \ll 1$)
(p не близко к 0 и к 1)

Тогда вероятность того, что событие A наступит
не менее k -раз и не более m -раз,

приблизительно равна $P_n(k \leq i \leq m) \cong \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ – функция Лапласа

$$x_1 = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

Схема Бернулли

- **Пример 2 .**

- Завод изготавливает 80% высоконапорных железобетонных труб первого сорта.
- Определить вероятность того, что из 100 труб 75 будет первого сорта.

- **Решение.**

- $n = 100$ – велико, $p = 0,8$ – не близко к 0 и к 1.

- По локальной теореме Муавра –Лапласа:

$$P_{100}(75) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \varphi\left(\frac{75 - 80}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) =$$
$$= 0,25 \varphi(-1,25) \approx 0,046$$

Схема Бернулли

- **Пример 3 .**
- Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,8.
- Производится 100 выстрелов.
- Норматив считается выполненным, если цель будет поражена не менее 75 раз.
- Определить вероятность выполнения норматива.
- **Решение.**
- По интегральной теореме Муавра-Лапласа:

$$P_{100}(75 \leq i \leq 100) \cong \Phi\left(\frac{100 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) =$$
$$= \Phi(5) - \Phi(-1,25) = 0,5 + 0,3943 \approx 0,89$$

Случайная величина

- **Определение.**
- Случайной величиной называется числовая величина (числовая функция), значение которой может меняться в зависимости от результата стохастического эксперимента.
 - Обозначения: $X, Y, Z...$ или $\xi, \eta, \mu...$

Пример 1.

- 1. **Число вызовов**, поступивших от абонентов на телефонную станцию в течение определенного промежутка времени, является **случайным** и принимает те или иные значения в зависимости от случайных обстоятельств.

Случайная величина

- **Пример 2.**

- Рассмотрим схему Бернулли:
- последовательность n независимых однородных испытаний,
- событие A – случайное событие, которое может наступить при каждом испытании.

$\Omega = \{\omega\}$ – пространство элементарных событий,

где $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$

- $\omega_i = 1$, если при i -ом испытании событие A наступило, и
- $\omega_i = 0$, если оно не наступило.
- Случайная величина $X = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$
- - число наступлений события A в схеме Бернулли.

```
graph TD; A[Случайная величина] --- B[дискретная]; A --- C[непрерывная]
```

Случайная
величина

дискретная

непрерывная

Случайная величина

- **Дискретная случайная величина** – такая случайная величина, которая может принимать **конечное** или **счетное** множество значений.
- **Значения непрерывной случайной величины** – принадлежат **интервалу** (конечному или бесконечному).

Случайная величина

- **Пример 3.** Рассмотрим схему Бернулли:
- последовательность n независимых однородных испытаний,
- A – случайное событие, которое может наступить при каждом испытании.
- Пусть X – число наступлений события A .
- $X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ – **дискретная** случайная величина.
- **Пример 4.**
- Проводятся независимые однородные испытания **до первого появления** события A .
- Пусть ξ – функция, равная числу испытаний, проведенных до первого появления события A .
- $\xi = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ – **дискретная** случайная величина.

Случайная величина

- **Пример 5.**
- Случайным образом бросают точку на отрезок $[a, b]$.
- X – координата точки попадания.
- $X \in [a, b]$ – непрерывная случайная величина.

- **Пример 6.**
- Время работы прибора без поломки μ – непрерывная случайная величина.
- $\mu \in (0, \infty)$

Способы задания случайной величины

- **Функция распределения и ее свойства.**

- **Определение.**

- Функция $F(x)$, равная вероятности того, что случайная величина ξ примет значение меньше x , называется **функцией**

распределения:
$$F(x) = P(\xi \leq x)$$

- **Свойства.**

- 1. Область определения $F(x)$: $x \in (-\infty, \infty)$.
- 2. Область значений : $0 \leq F(x) \leq 1$.
- 3. Функция $F(x)$ – неубывающая: $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
- 4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
- 5. Вероятность попадания в интервал (a, b) :

$$P(a < \xi < b) = F(b) - F(a)$$

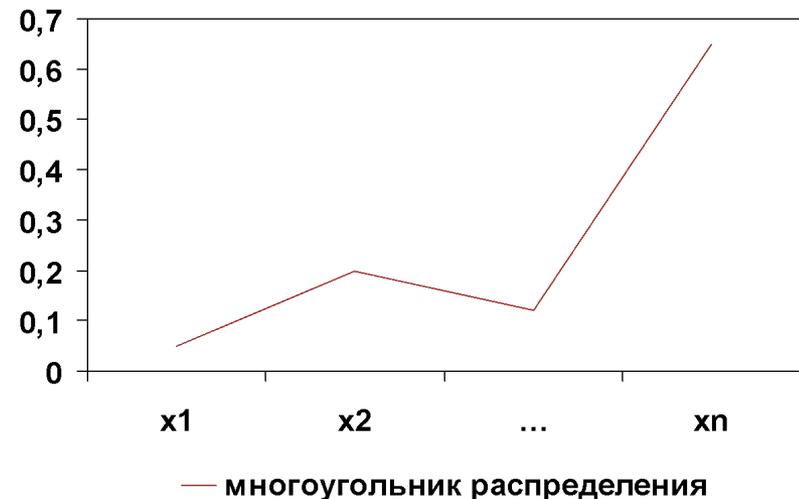
Закон распределения дискретной случайной величины

- **Определение.**
- Закон распределения дискретной случайной величины – это соответствие между возможными значениями и вероятностями, с которыми эти значения принимает случайная величина.
- **Способы задания:**
- Таблично

ξ	x_1	...	x_n
P	p_1	...	p_n

- Аналитически $P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$

Графически



Закон распределения дискретной случайной величины

- Примеры.
- **1. Биномиальный закон** (в схеме Бернулли):

$$P(\mu = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

- **2. Равномерное распределение** (в классической схеме):

$$P(\xi = k) = \frac{1}{n}$$

- **3. Распределение Пуассона:**

$$P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

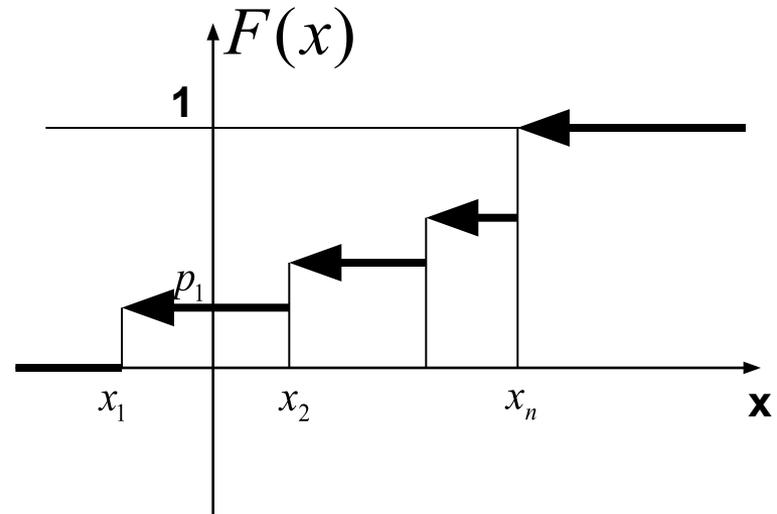
Дискретная случайная величина

- **Основное свойство**
- закона распределения:

$$\sum_{(i)} p_i = 1$$

- Функция распределения –
- **кусочно- непрерывная** функция.
- График функции распределения –
- **ступенчатая фигура.**

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$



Непрерывная случайная величина

- **Определение.**
- Случайная величина ξ называется непрерывной, если ее функция распределения $F(x)$ - непрерывная при всех x и имеет почти всюду производную $F'(x)=f(x)$.
- В этом случае **функция $f(x)$ называется плотностью распределения вероятности.**
 - **Замечания.** В некоторых учебниках такие случайные величины называют **абсолютно непрерывными**.
 - Если $F(x)$ - непрерывная и не дифференцируемая функция, то в этом случае случайную величину называют **сингулярной**.

Свойства плотности распределения

- 1. $f(x) \geq 0$
- 2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- 3. $P(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b f(x)dx$
- 4. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$

Непрерывная случайная величина

- **Пример.**

- Случайным образом бросают точку на отрезок $[0, 1]$.

- ξ – координата точки попадания.

- Найти **функцию распределения $F(x)$ и плотность $f(x)$** .

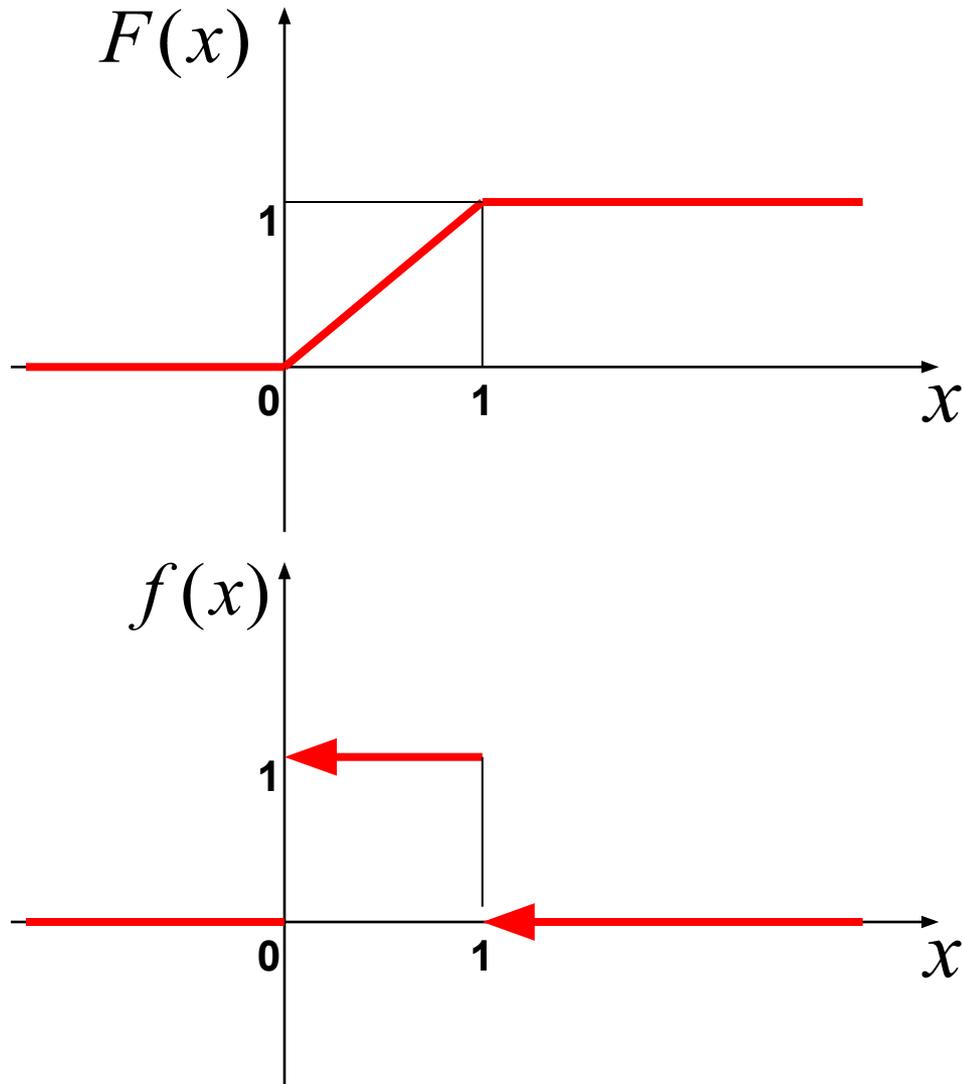
- **Решение.**

- Из определения:

$$F(x) = P(\xi \leq x) \implies F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ x, & \text{если } x \in (0, 1] \\ 1, & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = F'(x) \implies f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ 1, & \text{если } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$$

Непрерывная случайная величина



Числовые характеристики случайных величин

- **Математическое ожидание.**
- **Определение.**
- **Математическим ожиданием**
- **дискретной случайной величины ξ**
- **называется число, равное**

$$M\xi = \sum_{(i)} x_i p_i$$

где x_i – значения случайной величины,
 p_i – их вероятности.

Числовые характеристики случайных величин

- **Математическим ожиданием** непрерывной случайной величины ξ называется число, равное

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

где $f(x)$ – плотность распределения.

Числовые характеристики случайных величин

- **Свойства математического ожидания.**
- **1.** $M(C) = C$, где C – постоянная.
- **2.** $M(C\xi) = C \cdot M(\xi)$
- **3.** $M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta)$,
где ξ и η – случайные величины.
- **4.** $M(\xi \cdot \eta) = M(\xi) \cdot M(\eta)$,
если ξ и η – независимые случайные величины.

Числовые характеристики случайных величин

- **Пример 1.**

- Случайным образом бросают точку на отрезок $[0, 1]$.
- ξ – координата точки попадания.

- Найти **математическое ожидание** $M(\xi)$

- **Решение.**

- Из определения: $M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ 1, & \text{если } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{если } x \geq 1 \end{cases} \implies M(\xi) = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Числовые характеристики случайных величин

- **Дисперсия случайной величины.**
- **Определение.**
- Дисперсией случайной величины ξ называется
- **математическое ожидание** квадрата отклонения
- случайной величины от ее
- **математического ожидания:**

$$D(\xi) = M(\xi - a)^2,$$

$$\text{где } a = M(\xi)$$

Числовые характеристики случайных величин

- **Свойства дисперсии.**

- **1.** $D(C) = 0$

- **2.** $D(C \cdot \xi) = C^2 \cdot D(\xi)$

- **3.** $D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta),$

если ξ и η – независимые случайные величины.

- **4. Следствие.**

$$D(\xi - \eta) = D(\xi) + D(\eta),$$

если ξ и η – независимые случайные величины.

Числовые характеристики случайных величин

$$D(\xi) = M(\xi^2) - a^2$$

- **Доказательство.**

$$\begin{aligned} D(\xi) &= M(\xi - a)^2 = M(\xi^2 - 2a\xi + a^2) = \\ &= M(\xi^2) - 2aM(\xi) + M(a^2) = \\ &= M(\xi^2) - a^2, \end{aligned}$$

так как $a = M(\xi)$

Числовые характеристики случайных величин

- **Среднеквадратическое отклонение случайной величины.**
- **Определение.**
- **Среднеквадратическим отклонением**
- **случайной величины ξ называется число**

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}$$

- **Свойства.**
- **1.** $\sigma(\xi) \geq 0$, $\sigma(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = C$
- **2.** $\sigma(C\xi) = |C|\sigma(\xi)$

Числовые характеристики случайных величин

- **Пример 2.**

- Случайным образом бросают точку на отрезок $[0, 1]$.
- ξ – координата точки попадания.

- **Найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение.**

- **Решение.**

- Из формулы: $D(\xi) = M(\xi^2) - a^2$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ 1, & \text{если } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$$

$$a = M(\xi) = \frac{1}{2}$$



$$M(\xi^2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$D(\xi) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\sigma(\xi) = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Обзор стандартных распределений

Дискретные случайные величины

Биномиальное распределение

Распределение Пуассона

Геометрическое распределение

Обзор стандартных распределений

Непрерывные случайные величины

Равномерное распределение

Показательное распределение

Нормальное распределение

Биномиальное распределение

- ξ = (число «успехов» при n испытаниях в схеме Бернулли).
- **Закон распределения:**

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

p – вероятность "успеха",

$q = 1 - p$; $k = 0, 1, \dots, n$.

n , p – параметры распределения.

$$M(\xi) = a = np$$

$$D(\xi) = \sigma^2 = npq$$

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

**Приме
р**



Распределение Пуассона

- $\xi = (0, 1, 2, \dots, n, \dots)$
- **Закон распределения:**

$$P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

a – параметр распределения.

$$M(\xi) = a$$

$$D(\xi) = a$$

$$\sigma = \sqrt{a}$$



Геометрическое распределение

- $\xi=(0,1,2,\dots,n,\dots)$
- Закон распределения:

$$P(\xi = k) = p \cdot q^k$$

p – параметр распределения –
– вероятность "успеха"

$$M(\xi) = \frac{q}{p}$$

$$D(\xi) = \frac{q}{p^2}$$

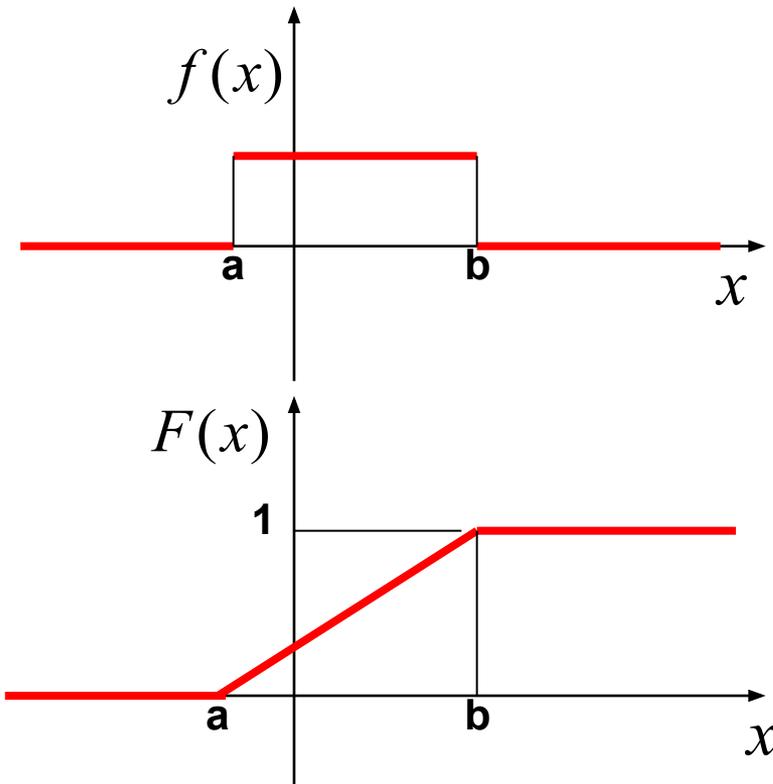
$$\sigma = \frac{\sqrt{q}}{p}$$

Приме
р



Равномерное распределение

$$\xi \in (-\infty, \infty)$$



- Плотность распределения:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b] \\ 0, & \text{если } x \notin [a, b] \end{cases}$$

- Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b] \\ 1, & \text{если } x \geq b \end{cases}$$

Пример

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2}$$

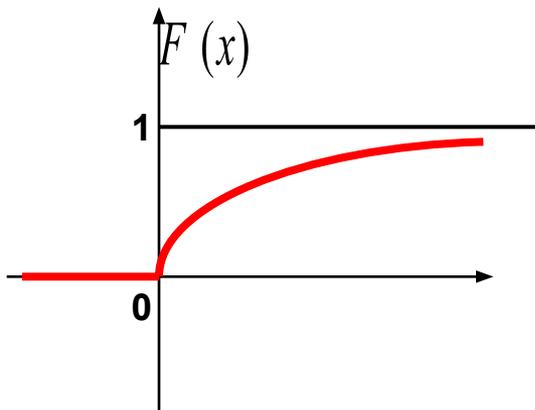
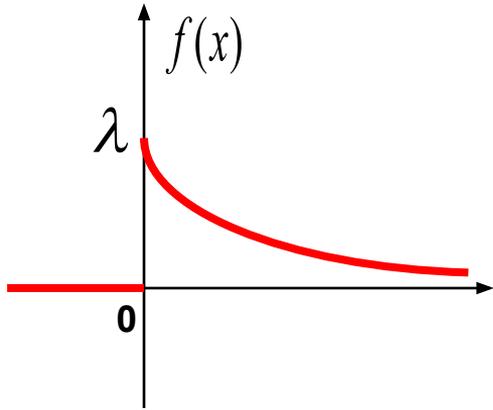
$$D(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$



Показательное распределение

$$\xi \in (-\infty, \infty)$$



- **Плотность распределения:**

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$$

- **Функция распределения:**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$$

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda} \quad D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \sigma = \frac{1}{\lambda}$$



Нормальное распределение

- **Определение.**
- Непрерывная случайная величина ξ
- имеет **нормальное распределение**
- **с параметрами a и σ ,**
- если плотность распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\xi \sim N(a, \sigma)$$

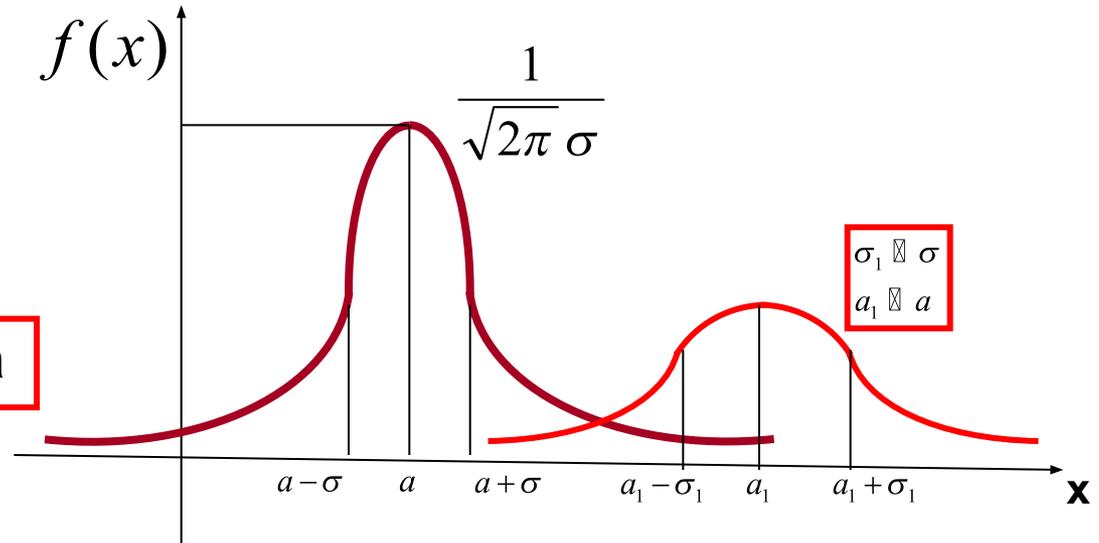
- **Вероятностный смысл параметров:**

$$a = M(\xi), \quad \sigma = \sqrt{D(\xi)}$$

Нормальное распределение

- График плотности распределения.

Кривая Гаусса



- Нормированное распределение.

$$a = 0, \sigma = 1 \quad \longrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(x)$$

Нормальное распределение

- Функция распределения.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_a^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

||

$$\frac{1}{2} \quad ?$$

||

$$\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) - \text{функция Лапласа}$$



$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

Нормальное распределение

- Вероятность попадания в интервал.

$$\begin{aligned} P(x_1 \leq \xi \leq x_2) &= F(x_2) - F(x_1) = \\ &= \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

- Следствие:

- (вероятность отклонения ξ от a не более чем на ε)

$$\begin{aligned} P(|\xi - a| \leq \varepsilon) &= P(a - \varepsilon \leq \xi \leq a + \varepsilon) = \\ &= \Phi\left(\frac{a + \varepsilon - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \varepsilon - a}{\sigma}\right) \end{aligned}$$



$$P(|\xi - a| \leq \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

Нормальное распределение

- Правило «3σ».

$$P(|\xi - a| \leq 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 0,9973$$



Практически достоверно, что

$$\underline{N(a, \sigma) \in [a - 3\sigma, a + 3\sigma]}$$

Нормальное распределение

- **Пример.**
- Отклонение длины изготавливаемой детали от стандарта
- - случайная величина, распределенная по нормальному закону.
- Если стандартная длина – 40 см, а среднеквадратическое отклонение – 0,4 см, то какое отклонение длины изделия от стандарта можно ожидать с вероятностью 0,8 ?
- **Решение.**

$$P(|\xi - a| \leq \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0,8 \Rightarrow \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0,4 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\sigma} = 1,285$$

$$a = 40, \sigma = 0,4 \implies \varepsilon = 0,514 \implies 39,486 \leq \xi \leq 40,514$$